পদার্থের ধর্ম

(PROPERTIES OF MATTER)

ডঃ ডি. পি. রায়চৌধুরী

কল্যাণী বিশ্ববিদ্যালয়ের পদার্থবিদ্যা বিভাগের প্রাক্তন প্রধান

দ্বিতীয় সংস্করণ

(সংশোধিত ও পরিবর্ধিত)

পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ

(পশ্চিমবঙ্গ সরকারের একটি সংস্থা)

প্রথম সংস্করণের ভূমিকা

লেখকের নিবেদন

শিক্ষার সকল স্তরেই মাতৃভাষা ব্যবহৃত হইবে, ভারত সরকারের গৃহীত এই নীতির অনুসরণে পশ্চিমবঙ্গ সরকারের শিক্ষামন্ত্রক বাংলা ভাষায় বিভিন্ন স্তরের পাঠক্রমের জন্য পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নে উদ্যোগী হইয়াছেন। স্নাতকীয় 'অনার্স' পাঠক্রমের পদার্থবিদ্যার 'পদার্থের ধর্ম' অংশ লিখিতে বর্তমান লেখককে শিক্ষা-সচিবের ২ এপ্রিল ১৯৭০ তারিখের D.O. 1045(50)-Edn (M) নং পত্রে নির্দেশ দেওয়া হইয়াছিল। এই পাণ্ডুলিপি উপরোক্ত নির্দেশ ক্রমে প্রস্তুত হইয়াছে।

শিক্ষা-সচিবের পত্রে পাঠ্যবিষয়ের বিস্তারিত কোন সূচী বা পরিভাষা সম্বন্ধে কোন নির্দেশ দেওয়া ছিল না। বর্তমান পাণ্ডুলিপিতে পশ্চিমবঙ্গের বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের পদার্থবিদ্যার 'অনার্স' ক্রমের পদার্থের ধর্ম সংক্রান্ত আলোচ্য বিষয়গুলি প্রায় সবই অন্তর্ভুক্ত করা হইয়াছে। পাণ্ডুলিপির আয়তন সঙ্গত সীমার মধ্যে রাখার জন্য 'পাশ' পাঠক্রমের অন্তর্গত অংশের আলোচনা কেবল প্রয়োজনস্থলে সংক্ষেপে রাখা হইয়াছে। শিক্ষার্থী 'পাশ' পাঠক্রমের সঙ্গে ঘনিষ্ঠভাবে পরিচিত থাকিবেন ধরিয়া লওয়া হইয়াছে। বলবিজ্ঞানের আলোচনা ভেক্টরের সাহায্যে করাই সঙ্গত মনে হইয়াছে। শিক্ষার্থী ভেক্টরের মূল সূত্রগুলি কোন্ অংশের সঙ্গে পড়িবেন তাহা জানা না থাকায় প্রয়োজনীয় সূত্রগুলি পরিশিষ্টে আলোচিত হইয়াছে। আলোচনায় সূত্রগুলি বুঝিতে পারা ও প্রয়োগ করিতে পারার উপরেই জোর বেশী দেওয়া হইয়াছে, প্রমাণের উপর নহে।

আলোচ্য বিষয়গুলিতে ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দের বাংলা রূপ অধিকাংশ ক্ষেত্রে দুইটি সূত্র হইতে নেওয়া হইয়াছে। এক হইল সাহিত্য সংসদ্ কর্তৃক প্রকাশিত 'সংসদ্ বাঙ্গালা অভিধান'। অন্যটি হইল ভারত সরকারের শিক্ষামন্ত্রক হইতে প্রকাশিত 'বিজ্ঞান শব্দাবলী'। যেখানে 'শব্দাবলী'র পরিভাষা বাংলায় অর্থদ্যোতক মনে হয় নাই বা যেগুলি এ দুইটির কোনটিতেই পাই নাই, সেখানে সাধ্যমত নিজের পরিভাষা ব্যবহার করিয়াছি। এরূপ শব্দের সংখ্যা কম।

তদ্ভব, দেশজ ও বিদেশী শব্দের বানানে বিশ্ববিদ্যালয় প্রবর্তিত বানানের নিয়ম অনুসরণ করা হইয়াছে।

দ্বিতীয় সংস্করণের ভূমিকা

দ্বিতীয় সংস্করণে প্রধান প্রধান যে পরিবর্তনগুলি করা হইয়াছে পরিচ্ছেদ অনুযায়ী তাহার সংক্ষিপ্ত বর্ণনা নিচে দেওয়া হইল।

প্রথম পরিচ্ছেদ (Units and dimensions)—আন্তর্জাতিক একক (S. I. units)-এ ভিত্তিতে পরিচ্ছেদের প্রথম অংশ লেখা হইয়াছে। একক চিহ্ন ও তাহাদের ব্যবহার সংক্রান্ত আন্তর্জাতিক সুপারিশগুলিও দেওয়া হইয়াছে। তাছাড়া 'unit'-এর বাংলা ভারত সরকারের "বিজ্ঞান শব্দাবলীর" অনুসরণে 'মাত্রক' না লিখিয়া 'একক' করা হইয়াছে। 'একক' বাংলা ভাষায় বেশী প্রচলিত। 'Dimension' কথাটিকে 'মাত্রা' বলা হইয়াছে। প্রথম সংস্করণে উহাকে 'ঘাত' বলা হইয়াছিল।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ (Vectors)—প্রথম সংস্করণের পরিশিষ্ট হইতে আনিয়া এ অংশকে দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ করা হইয়াছে। ছাত্রদের চর্চার সুবিধার জন্য 36-টি প্রশ্ন সংযোজিত হইয়াছে।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ (Dynamics of a particle)—স্থানে স্থানে ভাষা ও পরিভাষাগত কিছু পরিবর্তন.করা হইয়াছে। Central force এবং Centro-symmetrical force-এর প্রভেদ বুঝান হইয়াছে। 3.3 চিত্রে একটু অশুদ্ধি ছিল ; তাহা দূর করা হইয়াছে।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ (Dynamics of a system of particles)—সামান্য ভাষা ও পরিভাষাগত পরিবর্তন, বিদেশীয় নামের দেশীয় উচ্চারণ সম্বন্ধে একটি মন্তব্য এবং 4-12.15*b* সমীকরণের অশুদ্ধি সংশোধনই প্রধান পরিবর্তন। 'Nucleus' কথাটির বাংলা 'কেন্দ্রীন' না রাখিয়া বিজ্ঞান শব্দাবলীর অনুসরণে 'কেন্দ্রক' করা হইয়াছে।

পঞ্চম পরিচ্ছেদ (Accelerated frames of reference)—কিছু ছাত্রের অনুরোধে Frame of reference এবং Coordinate system কথা দুইটির অর্থ আর একটু পরিষ্কার করার চেষ্টা করা হইয়াছে।

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ (Dynamics of rigid bodies)—Inertia tensor কথাটির অর্থ আরও স্পষ্ট করিয়া বলা হইয়াছে। Momental ellipsoid (Poinsot's ellipsoid) কি তাহা যোগ করা হইয়াছে। ভৌতরাশির সংকেত (Symbols for physical quantities) সংক্রান্ত আন্তর্জাতিক

সুপারিশ অনুসারে অয়লারের গতীয় সমীকরণে বলের ভ্রামক বুঝাইতে M ব্যবহার করা হইয়াছে। প্রথম সংস্করণে উহা N ছিল।

সপ্তম পরিচ্ছেদ (Gravitation)—সমসত্ত্ব গোলকের নিজস্ব মহাকর্ষীয় শক্তি সংক্রান্ত একটি অংশ (7-4.1 বিভাগ) যোগ করা হইয়াছে। মহাকর্ষীয় বলের ক্রিয়াসীমা সম্বন্ধে আলোচনা একটু বাড়ান হইয়াছে। তুলার সাহায্যে পয়েণ্টিং-এর *G* মাপনের পরীক্ষা সংক্ষেপে বর্ণনা করা হইয়াছে।

অষ্টম পরিচ্ছেদ (Pendulum and gravity)—কোন পরিবর্তন প্রয়োজন মনে হয় নাই।

নবম পরিচ্ছেদ (Elasticity)—স্থিতিস্থাপক গুণাংক তিনটি ও পোয়াসঁর অনুপাতের সংকেত আন্তর্জাতিক সুপারিশ অনুযায়ী E, G, K এবং μ করা হইয়াছে। প্রথম সংস্করণে এগুলি যথাক্রমে Y, n, K এবং σ ছিল। সংশ্লিষ্ট অন্যান্য রাশিগুলিও ঐ ভাবে বদলান হইয়াছে। দণ্ডের বক্রণ (Bending of beams) জনিত নমন (depression) সকল ক্ষেত্রে $EID^4y = w$ অবকল সমীকরণটি চার বার সমাকলিত করিয়া পাওয়া যায় তাহা ক্যাণ্টিলিভারের ক্ষেত্রে উদাহরণস্বরূপ করিয়া দেখান হইয়াছে। ঘনকুণ্ডলিত স্প্রিং-এর কৌণিক দোলনও আলোচনা করা হইয়াছে।

দশম পরিচ্ছেদ (Surface tension)—এই পরিচ্ছেদটি সবচেয়ে দীর্ঘ হইলেও এইখানেই অন্যের অনুরোধে যোগ করিতে হইয়াছে বেশী। পৃষ্ঠটানের চিহ্ন T না ধরিয়া আন্তর্জাতিক রীতি মানিয়া γ ধরা হইয়াছে। 10-3.1 বিভাগের দীর্ঘ পাদটীকা ও 10-9 বিভাগটি নূতন। 22 ও 23 প্রশ্ন দুইটিও অনুরোধক্রমে যোগ করা হইয়াছে এবং সমাধানের উপায় প্রায় সবটাই বলিয়া দেওয়া হইয়াছে।

একাদশ পরিচ্ছেদ (Viscosity)—ব্যাখ্যা পরিষ্কার করার জন্য স্থানে স্থানে পরিবর্তন করা হইয়াছে। মাত্রীয় বিচারে স্টোক্‌স্‌ সূত্র স্থাপনা করিতে r, η, u ছাড়া ঘনত্ব ρ-ও ধরা হইয়াছে।

দ্বাদশ পরিচ্ছেদ (Fluid mechanics)—প্রবাহীর 'কণা' বলিতে কি বুঝায় তাহা ব্যাখ্যা করা হইয়াছে। ভৌতবিন্দু ও গাণিতিক বিন্দুর প্রভেদও বুঝান হইয়াছে। Flow line ও stream line-এর প্রভেদ স্পষ্টতর করা হইয়াছে। Stream line-এর পরিভাষা 'ধারারেখা' ব্যবহার করা হইয়াছে।

ত্রয়োদশ পরিচ্ছেদ (Brownian movements)—এই পরিচ্ছেদটি নূতন। প্রথম সংস্করণে ইহা ছিল না।

চতুর্দশ পরিচ্ছেদ (Pumps and manometers)—উচ্চ ও অত্যুচ্চ নির্বাতের মিল ও অমিল কোথায় তাহা স্পষ্ট করিয়া বলা হইয়াছে। স্থানে স্থানে নূতন দু' চারটি কথা যোগ করা হইয়াছে। অত্যাধুনিক অতিস্বল্প চাপ পলিফিনাইল ইথারের কথা বলা হইয়াছে।

পারিভাষিক শব্দাবলী—কয়েকটি নূতন কথা যোগ করা হইয়াছে। পরিভাষা কোন সূত্র হইতে নেওয়া তাহা যথাসম্ভব বলা হইয়াছে।

প্রথম সংস্করণের সংশোধন ও পরিবর্ধনের জন্য প্রেসিডেন্সী কলেজের অধ্যাপক ডঃ অমল রায়চৌধুরী, ডঃ শ্যামল সেনগুপ্ত ও শ্রীহেমেন্দ্র মুখোপাধ্যায়ের কাছে আমার ঋণ অপরিশোধ্য। বিজ্ঞানে জাতীয় বৃত্তিভুক্ প্রেসিডেন্সী কলেজের ছাত্র শ্রীমান দীপঙ্কর হোম ছাত্রদের দিক হইতে বইখানার গঠনমূলক সমালোচনা করিয়া আমার বিশেষ কৃতজ্ঞতাভাজন হইয়াছেন।

বিষয়সূচী

পৃষ্ঠা

প্রথম পরিচ্ছেদ — একক ও মাত্রা — 1—16

এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতি, 1 ; রাশির মাত্রা, 5 ; মাত্রা নির্ণয়, 5 ; মাত্রার সমতার তত্ত্ব, 7 ; মাত্রাঘটিত সমীকরণ, 7 ; মাত্রীয় বিশ্লেষণের π-সূত্র, 7 ; একক পরিবর্তন, 12 ; এমকেএস পদ্ধতির একক, 13 ; মৌলিক মাত্রকের সংখ্যা বিষয়ে অনিশ্চয়তা, 13 ; প্রশ্ন, 15।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ — ভেকটর — 17—57

গতিবিজ্ঞানের কয়েকটি মৌলিক ভেক্টর, 28 ; ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ, 22 ; ঐকিক ভেক্টর, 23 ; ভেক্টরের গুণন, 23 ; স্কেলার গুণন, 24 ; ভেক্টর গুণন, 26 ; গতি-বিজ্ঞানের কয়েকটি ভেক্টর গুণফল, 29 ; তিনটি ভেক্টরের গুণফল, 31 ; স্কেলার ত্রিধা গুণন, 32 ; ভেক্টর ত্রিধা গুণন, 33 ; ভেক্টরের অবকলন, 34 ; ক্ষেত্রীয় ভেক্টর ও ক্ষেত্রীয় স্কেলার, 36 ; ভেক্টর অবকলীয় সংকারক 'ডেল' (∇), 37 ; ক্ষেত্রীয় স্কেলারের গ্রেডিয়েন্ট, 38 ; ক্ষেত্রীয় ভেক্টরের ডাইভার্জেন্স, 39 ; ক্ষেত্রীয় ভেক্টরের কার্ল, 40 ; লাপ্লাসিয়ান সংকারক ∇^2, 41 ; ভেক্টরের কার্লের কার্ল, 41 ; ভেক্টরের সমাকলন, 42 ; ভেক্টরের রেখা সমাকল, 43 ; বদ্ধরেখা সমাকল ও গ্রেডিয়েন্ট, 44 ; পৃষ্ঠ-সমাকল : ভেক্টরের ফ্লাক্স্, 45 ; আয়তন সমাকল, 46 ; ডাইভারজেন্স্ সূত্র ও স্টোক্স্ সূত্র, 47 ; ডাইভারজেন্সের জ্যামিতিক সংজ্ঞা, 48 ; স্টোক্স্ সূত্র, 49 ; ভেক্টরের কার্ল, 49 ; ভেক্টর ও টেনসর, 50 ; ভেক্টরের যথার্থ সংজ্ঞা, 51 ; টেনসর, ভেক্টর ও স্কেলার, 53 ; প্রশ্ন, 54।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ — কণাগোষ্ঠীর গতিবিজ্ঞান — 58—106

কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে বেগ ও ত্বরণের উপাংশ, 60 ; বেগ ভেক্টর, 61 ; ত্বরণ ভেক্টর এবং উহার স্পার্শক ও অভিলম্ব উপাংশ, 62 ; সমতলীয় গতিতে বেগ ও ত্বরণের অরীয় ও অনুপ্রস্থ উপাংশ, 64 ; কৌণিক বেগ ভেক্টর, 66 ; বলের কাল-সমাকল : আবেগী বল, 69 ; বলের পথ-সমাকল,

69 ; সংরক্ষীবল, 72 ; স্থিতিশক্তি, 74 ; শক্তির সংরক্ষণ, 75 ; সরল দোলগতি, 76 ; অবমন্দিত দোলন, 78 ; কণার কৌণিক ভরবেগ, 81 ; কেন্দ্রগ বলের ক্রিয়ায় গতি, 83 ; কেন্দ্রীয় গতির অবকল সমীকরণ, 85 ; বিষমবর্গীয় বলাধীন গতি, 86 ; কক্ষের প্রকৃতি, 90 ; মহাকর্ষীয় বল-ক্ষেত্রে কণার গতি, 92 ; ক্ষেপণাস্ত্র, 93 ; নকল উপগ্রহ, 95 ; আন্তর্গ্রহ কক্ষ, 98 ; কেন্দ্রকের বিকর্ষণ : রাদারফোর্ডের পরীক্ষা, 99 ; কেপলারের সূত্রাবলী, 101 ; প্রশ্ন, 105।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ কণাগোষ্ঠীর গতিবিজ্ঞান 107—133

ভরকেন্দ্র, 107 ; ভরকেন্দ্রের গতি, 108 ; কণাগোষ্ঠীর রৈখিক ভরবেগ, 110 ; কণাগোষ্ঠীর কৌণিক ভরবেগ, 111 ; কৌণিক ভরবেগ ও বাহ্য টর্ক, 112 ; কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ, 113 ; কণাগোষ্ঠীর গতিশক্তি, 113 ; সংরক্ষী বলের ক্রিয়ায় মোট শক্তি, 113 ; সবাধ কণাগোষ্ঠী, 115 ; কল্পিত কার্যের তত্ত্ব, 115 ; সাম্যে স্থিতিশক্তি অবম অথবা চরম, 117 ; দালাঁবেরের সূত্র, 118 ; সমানীত ভর, 120 ; ভরকেন্দ্রীয় নির্দেশাংক, 123 ; ব্যাপক নির্দেশাংক, 124 ; স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা, 124 ; ব্যাপক বেগ, বল ও ভরবেগ, 126 ; লাগ্রাঁজের গতীয় সমীকরণ, 128 ; হ্যামিল্টনের সূত্র, 130 ; হ্যামিল্টনীয় ফলন, 130 ; প্রশ্ন, 133।

পঞ্চম পরিচ্ছেদ ত্বরিত নির্দেশতন্ত্র 134—151

জড়ত্বীয় ও অজড়ত্বীয় নির্দেশ ফ্রেম, 134 ; সচল নির্দেশ ফ্রেমে নিউটনের গতীয় সমীকরণ, 135 ; ঘুরন্ত ফ্রেম, 137 ; ঘুরন্ত ফ্রেমের মৌলিক সূত্র, 138 ; ঘুরন্ত ফ্রেমে বেগ ও ত্বরণ, 140 ; ঘুরন্ত ফ্রেমে নিউটনের গতীয় সূত্রের প্রয়োগ, 140 ; সরণবিশিষ্ট ঘুরন্ত ফ্রেম, 141 ; ঘুরন্ত ভূপৃষ্ঠে গতীয় সমীকরণ, 142 ; পৃথিবীর আবর্তনের অপকেন্দ্র বল, 144 ; কোরিওলি বল, 145 ; ফুকোর দোলক, 148 ; প্রশ্ন, 151।

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ দৃঢ়বস্তুর গতিবিজ্ঞান 152—199

সূচনা, 152 ; স্থির অক্ষে আবর্তন, ১৫৩ ; স্থির বিন্দু সাপেক্ষে আবর্তন, 154 ; জাড্য-ভ্রামক ও জাড্য গুণফল,

155 ; যে কোন অক্ষে জাড্য-ভ্রামকের মান, 156 ; ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ, 157 ; জাড্য ইলিপসয়ড্ 158 ; জাড্যের মুখ্য অক্ষ ও মুখ্য ভ্রামক, 159 ; সমান্তরাল অক্ষ ও অভিলম্ব অক্ষের সূত্র, 160 ; কয়েকটি প্রতিসম বস্তুর জাড্য ভ্রামক, 162 ; সোজা, সরু দণ্ড, 162 ; আয়ত পাত, 164 ; আয়তাকার বস্তু, 166 ; ত্রিভুজাকার পাত, 167 ; গোল পাত, 167 : বেলন, 169 ; গোলক, 170 ; লম্ববৃত্তীয় শংকু, 172 ; বস্তুর এক অংশের জাড্য ভ্রামক, 174 ; ফাঁপা গোলক, 174 ; ত্রিভুজ, ত্রিভুজের সমতলে যে কোন অক্ষে উহার জাড্য ভ্রামক, 175 ; স্থিরবিন্দু সাপেক্ষে ঘুরন্ত দৃঢ়বস্তুর মোট কৌণিক ভরবেগ, 176 ; দৃঢ়বস্তুর আবর্তনের গতিশক্তি, 178 ; অয়লারের গতীয় সমীকরণ, 180 ; বাহ্যবলের প্রভাবমুক্ত দৃঢ়বস্তুর আবর্তন, 182 ; গাইরোস্কোপ, 185 ; দেহশংকু, 187 ; দেশশংকু, 188 ; পৃথিবীর গাইরোস্কোপীয় ক্রিয়া, 188 ; অয়লারীয় কোণ, 189 ; পুরঃসরণ ও অক্ষবিচলন, 192 ; প্রতিসম লাটিমের গতি, 192 ; প্রতিসম লাটিমের গতিতে লাগ্রাঞ্জ সমীকরণের প্রয়োগ, 196 ; প্রশ্ন, 199 ।

সপ্তম পরিচ্ছেদ **মহাকর্ষ** 200—242

মহাকর্ষীয় বলের কয়েকটি ধর্ম, 200 ; মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্র, বিভব ও তীব্রতা, 202 ; বিভব ও তীব্রতা গণনা, 205 ; গোলকের মহাকর্ষীয় স্বতঃ শক্তি, 214 ; গাউসের সূত্র, 215 ; গাউস সূত্রের কয়েকটি প্রয়োগ, 219 : লাপ্লাস ও পোয়াস'র সমীকরণ, 221 ; পলায়নের বেগ, 224 ; কয়েকটি গণনা, 226 ; গোলকের আকর্ষণে সুড়ঙ্গপথে কণার গতি, 228 ; G-নির্ণয়—বয়্জের পরীক্ষা, 230 ; হাইলের পরীক্ষা, 233 ; পয়েণ্টিংএর-পরীক্ষা, 238 ; প্রশ্ন, 240 ।

অষ্টম পরিচ্ছেদ **অভিকর্ষ ও দোলক** 243—285

অভিকর্ষ ও অভিকর্ষীয় ত্বরণ, 243 ; পৃথিবীর আহ্নিক গতির ক্রিয়া, 244 ; g-র পরিবর্তন : অক্ষাংশের সঙ্গে, 245 ; উচ্চতার সঙ্গে, 246 ; গভীরতার সঙ্গে, 247 ; সরল দোলক, 248 ; বিস্তারের ক্রিয়া, 249 ; চক্রজ দোলক, 250 ; যৌগিক দোলক, 251 ; তুল্যমান সরল দোলক, 253 ; লম্বন কেন্দ্র ও দোলন কেন্দ্র বিনিময়, 254 ; অবম

দোলনকাল, 255 ; বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের জ্যামিতিক চিত্র, 256 ; দণ্ড দোলক, 258 ; বিপর্যেয় দোলক, 258 ; কেটারের দোলক, 259 ; বেসেলের উপায়, 261 ; দোলকে শুদ্ধি প্রয়োগ, 262 ; g-নির্ণয়, 265 ; g-র নিরপেক্ষ মাপন, 267 ; নিরপেক্ষ মাপনের অন্য উপায়, 268 ; অভিকর্ষ জরিপ, 269 ; গ্র্যাভিমিটার, 271 ; Eötvös-এর ব্যাবর্তন তুলা, 274 ; সমুদ্রে g-নির্ণয়, 276 ; প্রেক্ষিত g-কে সমুদ্রপৃষ্ঠের মানে পরিণত করা, 278 ; অনুভূমিক দোলক, 279 ; অনুভূমিক ভূকম্পলেখী, 281 ; প্রশ্ন, 284।

নবম পরিচ্ছেদ — স্থিতিস্থাপকতা — 286—350

পীড়ন ও তাতি, 286 ; মৌলিক পীড়ন ও তাতি, 288 ; তাতি-পীড়ন বক্র, 292 ; হুকের সূত্র ও স্থিতিস্থাপকতার বিভিন্ন গুণাংক, 296 ; স্থিতিস্থাপকতার বিভিন্ন গুণাংক, 296 ; স্থিতিস্থাপক গুণাংকগুলির মধ্যে সম্পর্ক, 300 ; অক্ষীয় গুণাংক, 305 ; তার বা বেলন মোচড়ান, 306 ; ব্যাবর্তন দোলন, 308 ; তরল ও গ্যাসের স্থিতিস্থাপকতা, 309 ; তাতিজনিত স্থিতিশক্তি, 311 ; দণ্ডের বংকন, 313 ; বংকনে কৃন্তন বল ও দ্বন্দ্বের সম্পর্ক, 314 ; বংকনের আভ্যন্তরীণ টর্ক, 315 ; বাঁকান বীমের স্থিতিশক্তি ; 318 ; অনুপ্রস্থ বংকন—অসদৃশ বক্রতা, 319 ; অনুভূমিক বীমের নমন গণনা, 320 ; সারাংশ, 329 ; বংকন সংক্রান্ত বিনিময় সূত্র, 330 ; কৃন্তনের জন্য নমন, 331 ; ঘনকুণ্ডলিত স্প্রিং, 333 ; বক্রকুণ্ডলিত স্প্রিং, 336 ; সার্লে'র উপায়ে G ও E তুলনা, 338 ; σ মাপিবার কর্ণুর উপায়, 340 ; পীড়ন ও তাতি টেনসর 342 ; প্রশ্ন, 348।

দশম পরিচ্ছেদ — পৃষ্ঠটান — 351—404

পৃষ্ঠটানের আণবিক ব্যাখ্যা, 352 ; পৃষ্ঠের স্থিতিশক্তি, 355 ; তরল পৃষ্ঠের মোট শক্তি, 357 ; স্পর্শকোণ, 360 ; তরল ছড়াইবে কি গুটাইবে, 361 ; স্পর্শকোণ মাপন, 363 ; বক্র তরলপৃষ্ঠের দুই পাশে প্রেষের প্রভেদ, 365 ; কৈশিকতা, 369 ; সংসক্তি, আসঞ্জন ও স্পর্শকোণ, 370 ; কৈশিক নলে তরলের ওঠা ও নামা, 370 ; ছেঁদা পাত্রে তরল রাখা, 374 ; কৈশিক বক্র, 375 ; পৃষ্ঠটান মাপা, 376 ; কৈশিক নলের সাহায্যে, 378 ; ফার্গুসনের উপায়, 379 ; বড় ফোঁটার সাহায্যে, 380 ; বুদ্বুদের চরম প্রেষবৈষম্য

হইতে—ইয়েগারের উপায়, 384 ; সাগডেনের তত্ত্ব, 385 ; ফোঁটার ভার মাপিয়া, 389 ; তুলার সাহায্যে, 392 ; লহরীর সাহায্যে, 395 ; পৃষ্ঠটান মাপনের বিভিন্ন উপায়ের সমালোচনা, 396 ; বক্র তরল পৃষ্ঠে বাষ্পচাপ, 399 ; প্রশ্ন, 401 ।

একাদশ পরিচ্ছেদ সান্দ্রতা 405—452

শান্ত ও অশান্ত প্রবাহ, 405 ; সান্দ্রতা, 408 ; নিউটনীয় ও অনিউটনীয় তরল, 410 ; ক্রান্তিক বেগ ও রেনল্ডস সংখ্যা, 412 ; পোয়াস্যেইর সমীকরণ, 414 ; পোয়াস্যেই সমীকরণের শুদ্ধি, 416 ; পোয়াস্যেই সমীকরণের সাহায্যে তরলের সান্দ্রতা নির্ণয়, 417 ; খাড়া কৈশিক নলে সান্দ্র তরলের প্রবাহ, 419 ; অসোয়াল্ডের ভিস্কোমিটার, 421 ; একাধিক কৈশিক নলের শ্রেণী সজ্জায় প্রবাহ, 423 ; গ্যাসের সান্দ্রতা, 426 ; র‍্যান্‌কিনের উপায়, 428 ; স্থির আয়তনে চাপ বদলাইতে দিয়া সান্দ্রতা মাপন, 431 ; ঘুরন্ত বেলনের সাহায্যে সান্দ্রতা নির্ণয়, 432 ; আবর্তীয় ভিস্কোমিটার, 433 ; রক্ষীবেলন ব্যবহার, 436 ; সার্লে'র ভিস্কোমিটার, 436 ; বায়ুর সান্দ্রতার সূক্ষ্ম মাপনে আবর্তীয় ভিস্কোমিটার প্রয়োগ, 438 ; পড়ন্ত বস্তুর সাহায্যে সান্দ্রতা মাপন, 439 ; স্টোক্‌স্ সূত্র, 441 ; পড়ন্ত বেলনের সাহায্যে সান্দ্রতা নির্ণয়, 445 ; সান্দ্রতার উপর উষ্ণতা ও চাপের ক্রিয়া, 446 ; প্রশ্ন, 449 ।

দ্বাদশ পরিচ্ছেদ প্রবাহীর বলবিজ্ঞান 453—484

প্রবাহীর 'কণা', 453 ; ভৌতবিন্দু ও গণিতের বিন্দুর প্রভেদ 454 ; প্রবাহীর স্থিতিবিজ্ঞান, 454 ; প্রবাহীর সাম্যের শর্ত, 455 ; চাপশক্তি, 457 ; প্রবাহক্ষেত্র, 457 ; সময়সাপেক্ষে পরিবর্তনের হার, 460 ; অবিচ্ছিন্নতা সূত্র, 461 ; অঘূর্ণ প্রবাহ ও বেগবিভব, 463 ; বার্নুলির সূত্র, 465 ; শক্তি সংরক্ষণ ও বার্নুলির সূত্র, 467 ; বার্নুলি সূত্রের উদাহরণ, 469 ; টরিচেল্লির সূত্র, 473 ; ভেন্টুরি-মিটার, 474 ; পিটো নল, 475 ; বায়ুসাপেক্ষ বেগমান, 477 ; আদর্শ প্রবাহীর গতীয় সমীকরণ, 478 ; গতীয় সমীকরণ হইতে বার্নুলি সূত্র, 479 ; অঘূর্ণ প্রবাহে বার্নুলি সূত্র, 480 ; তরলপৃষ্ঠে পৃষ্ঠটান তরঙ্গের বেগ 481 ; প্রশ্ন, 483 ।

ত্রয়োদশ পরিচ্ছেদ **ব্রাউনীয় গতি** 485—493

অবতরণিকা, 485 ; ব্রাউনীয় গতি, 486 ; সূক্ষ্ম কলয়ড্ অবদ্রবে বায়ুমণ্ডলীয় সূত্রের সত্যতা : পের‍্যাঁর কাজ, 488 ; ব্রাউনীয় গতিতে কণার সরণ, 491 ; প্রশ্ন 493।

চতুর্দশ পরিচ্ছেদ **পাম্প ও প্রেষমান** 494—528

নির্বাতন হার, 495 ; নির্বাতন প্রক্রিয়া, 496 ; নলের চালকতা, 498 ; ঘূর্ণী পাম্প, 501 ; ব্যাপন পাম্প, 503 ; শোষণ দ্বারা নির্বাতন, 508 ; আয়ননে নির্বাতন, 510 ; গেটার আয়ন ও স্পাটার আয়ন পাম্প, 515 ; উচ্চ ও অত্যুচ্চ নির্বাত সৃষ্টি, 511 ; নিম্নচাপ মাপন, 515 ; ম্যাকলিওড গেজ, 518 ; পিরানি গেজ, 521 ; থার্মকাপল গেজ, 522 ; আয়নন গেজ, 522 ; উষ্ণ ক্যাথোড আয়ন গেজ, 524 ; বেয়ার্ড অ্যালপার্ট গেজ, 525 ; পেনিং গেজ, 526 ; ম্যাগনেট্রন গেজ, 527 ; প্রশ্ন, 527।

পারিভাষিক শব্দাবলী 529—538

প্রথম পরিচ্ছেদ

একক ও মাত্রা
(Units and Dimensions)

1-1. এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতি (International system of units)। পদার্থবিজ্ঞানের আর এক নাম 'ভৌতিকী'। পদার্থ বিজ্ঞানের সূত্রগুলি প্রকাশ করিতে যে সকল রাশির প্রয়োজন হয় সেগুলিকে 'ভৌত রাশি' (Physical quantity) বলে। সকল ভৌত রাশিই পরিমেয় (=মাপন যোগ্য)। উহার মান প্রকাশ করিতে দুইটি বিষয় উল্লেখ করিতে হয়—

(1) রাশির 'একক' (unit) বা 'মাত্রক*',

(2) এককের তুলনায় রাশিটি কত বড়, সেই সংখ্যা ; অর্থাৎ

ভৌত রাশি=সাংখ্যিক মান×একক (বা মাত্রক)

কয়েকটি মৌলিক একককে ভিত্তি করিয়া উহাদের প্রয়োজন মত গুণ ও ভাগে বিভিন্ন ঘাতাংকে (power-এ) তুলিয়া, এবং 1 ছাড়া অন্য কোন সংখ্যার অবতারণা না করিয়া, এই গুণিত ও/বা ভাজিত এককগুলির সংযোগে যে সকল যৌগিক একক পাওয়া যায়, তাহাদের 'সুসঙ্গত' (coherent) বা 'নিরপেক্ষ' (absolute) পদ্ধতির একক (system of units) বলে। কোন পদ্ধতির ব্যবহারিক (practical) একককে সুসঙ্গত বা নিরপেক্ষ শ্রেণীর একক মনে করা হয় না।

নিম্নোক্ত ছয়টি মৌলিক একককে ভিত্তি করিয়া এককের যে সুসঙ্গত পদ্ধতি গঠিত হইয়াছে তাহাকে এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতি বলে।

একক	চিহ্ন	একক	চিহ্ন
মিটার (metre)	m	অ্যাম্পিয়ার (ampere)	A
কিলোগ্রাম (kilogram)	kg	ডিগ্রী কেলভিন (degree kelvin)	°K
সেকেণ্ড (second)	s	ক্যাণ্ডেলা (candela)	cd

* 'মাত্রক' কথাটি ভারত সরকারের শিক্ষামন্ত্রক unit-এর পরিভাষা হিসাবে গ্রহণ করিয়াছেন। বাংলায় আমরা unit বুঝাইতে সাধারণতঃ 'একক' কথাটি ব্যবহার করি।

এই পদ্ধতির এককগুলি SI-একক (SI-units) নামে পরিচিত। বিভিন্ন বৈজ্ঞানিক আন্তর্জাতিক সংস্থা পৃথিবীর সর্বত্র বৈজ্ঞানিক সকল প্রকার মাপনে এইগুলি গ্রহণের সুপারিশ করিয়াছেন। আমরা এ বইয়ে প্রধানতঃ আন্তর্জাতিক এককগুলিই ব্যবহার করিব। তবে মিটার, কিলোগ্রাম ও সেকেণ্ড ছাড়া অন্য এককগুলির এখানে দরকার হইবে না।

1-1.1. **আন্তর্জাতিক মৌলিক এককগুলির মান।** এককের যে কোন পদ্ধতি গঠন করিতে যে রাশিগুলিকে মৌলিক বলিয়া ধরা হইবে তাহাদের প্রত্যেকের একটা সুনির্দিষ্ট পরিমাণকে ঐ পদ্ধতিতে ঐ রাশির মৌলিক একক বলা হয়। আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে মৌলিক রাশিগুলি হইল (1) দৈর্ঘ্য, (2) ভর, (3) কাল, (4) বিদ্যুৎ-ধারা, (5) উষ্ণতা এবং (6) আলোক-তীব্রতা। বর্তমানে ইহাদের যে যে পরিমাণকে একক বলিয়া ধরা হয় তাহা নিচে বলা হইল।

(1) **দৈর্ঘ্যের একক মিটার (m)।** 86 ভর সংখ্যা (mass number) বিশিষ্ট krypton আইসোটোপের (Kr 86) কমলা (orange) রঙের বর্ণালি-রেখার শূন্যস্থানে (in vacuo) যে তরঙ্গদৈর্ঘ্য, মিটার হইল তাহার 1650763·73 গুণ। (এই তরঙ্গদৈর্ঘ্য $5d^5 \rightarrow 2p^{10}$ প্লুতির (transition-এর) তরঙ্গদৈর্ঘ্য। সংজ্ঞা 1960 সালে গৃহীত।)

(2) **ভরের একক কিলোগ্রাম (Kg)।** ইহা আমাদের পূর্ব পরিচিত 'মূল আন্তর্জাতিক কিলোগ্রাম' (International prototype kilogram)।

(3) **কালের একক সেকেণ্ড (s)।** Cs 133 পরমাণুর নিম্নতম শক্তি-স্তরে (ground state-এ) উহার অতিসূক্ষ্ম দুই শক্তিস্তরে (hyperfine energy levels) প্লুতি (transition) হইলে যে বিকিরণ নির্গত হয় তাহার পর্যায়কালের 9,192,631,770 গুণ কাল এক সেকেণ্ড। (1972-তে গৃহীত; সিজিয়াম পারমাণবিক ঘড়ির সাহায্যে অন্যান্য জটিল যন্ত্রের মাধ্যমে এই সেকেণ্ডে কাল (time) মাপা যায়।)

(4) **বিদ্যুৎ-ধারার একক অ্যাম্পিয়ার (A)।** শূন্যস্থানে, এক মিটার দূরত্বে অবস্থিত খুব লম্বা দুইটি সরু পরিবাহীতে যে স্থিরমান বিদ্যুৎ-ধারা প্রবাহিত হইলে প্রত্যেক পরিবাহী নিজের প্রতি মিটার দৈর্ঘ্যে ঠিক 2×10^{-7} newton বল অনুভব করিবে, সেই স্থিরমান বিদ্যুৎ-ধারা এক অ্যাম্পিয়ার।

(5) **উষ্ণতার একক ডিগ্রী কেলভিন (°K)।** চরম শীতলতা (Absolute zero) এবং জলের ত্রিক-বিন্দু (triple point, অর্থাৎ যে উষ্ণতা ও চাপে জল, বরফ এবং জলীয় বাষ্প এক সঙ্গে থাকিতে পারে), এই দুই

উষ্ণতার ব্যবধানের 1/273·16 অংশ এক ডিগ্রী কেলভিন। (প্রায় সব সাধারণ কাজে ইহা আমাদের সুপরিচিত সেলসিয়াস বা সেণ্টিগ্রেড ডিগ্রীর সমান; প্রভেদ যাহা আছে তাহা 30,000 অংশে 1 অংশেরও কম। প্রভেদ এখনও সঠিক জানা নাই।)

(6) **আলোক-তীব্রতার একক ক্যাণ্ডেলা** (cd)। কোন প্রায়-বন্ধ আধারে গলা প্ল্যাটিনামকে উহার হিমাংকে (Freezing point-এ, 1769°C) রাখিলে আধারের ছোট ছিদ্র দিয়া গলা প্ল্যাটিনাম তলের প্রতি $1cm^2$ ক্ষেত্র হইতে তলের অভিলম্বে প্রতি সেকেণ্ডে প্রতি ঘন কোণে যে পরিমাণ আলোক শক্তি প্রবাহিত হয় তাহার $\frac{1}{60}$ অংশ এক ক্যাণ্ডেলা।

মৌলিক SI এককগুলি পূর্বতন অনুরূপ রাশির এককগুলির যথাসম্ভব কাছে, কিন্তু আরও সুনির্দিষ্ট।

1-2. CGS ও MKSA পদ্ধতি। ইহারা উভয়েই সুসঙ্গত পদ্ধতি।

(i) CGS পদ্ধতির ভিত্তি দৈর্ঘ্য, ভর ও কালের একক সেণ্টিমিটার (cm), গ্রাম (g) ও সেকেণ্ড (s)। বলবিজ্ঞানে এই তিনটি মৌলিক এককের সাহায্যে প্রয়োজনীয় সব যৌগিক এককই গঠন করা যায়। বিদ্যুৎ ও চুম্বকের ক্ষেত্রে CGS পদ্ধতির একাধিক রূপ করা হইয়াছে। ইহাদের মধ্যে সিজিএস্ স্থিরবৈদ্যুত (cgs electrostatic বা cgse) পদ্ধতি ও সিজিএস্ বিদ্যুৎচৌম্বক (cgs electromagnetic বা cgsm) পদ্ধতি বিশেষ উল্লেখযোগ্য। cgse পদ্ধতিতে বৈদ্যুত রাশি 'শূন্যস্থানের পারমিটিভিটি বা বিদ্যুৎশীলতা' (permittivity of vacuum) ϵ_0-র মান স্বেচ্ছিক ভাবে (arbitrarily) 1 ধরা হইয়াছে। cgsm পদ্ধতিতে চৌম্বকরাশি 'শূন্যস্থানের পারমিয়েবিলিটি বা চুম্বকশীলতা' (permeability of vacuum) μ_0-র মান 1 ধরা হইয়াছে। এরূপ করায় বিদ্যুৎ বা চুম্বকের ক্ষেত্রে চতুর্থ একটি মৌলিক একক আনার দরকার হয় নাই, কিন্তু ইহাতে ক্রমশঃ কতকগুলি অসুবিধা বোধ করা গিয়াছিল। MKSA পদ্ধতিতে সেগুলি দূর হইয়াছে। তা ছাড়া একাধিক রকম এককের পদ্ধতিও দরকার হয় নাই।

(ii) MKSA পদ্ধতির ভিত্তি চারটি মৌলিক একক—মিটার, কিলোগ্রাম, সেকেণ্ড ও অ্যাম্পিয়ার। (ইহাকে উদ্ভাবকের নামানুসারে জিওর্জি (Giorgi) পদ্ধতিও বলে।) বলবিজ্ঞানে মাত্র প্রথম তিনটি মৌলিক একক দিয়াই সব কাজ চলে। এই তিনটি দিয়া গঠিত পদ্ধতিকে MKS পদ্ধতি বলে।

বিদ্যুৎ ও চুম্বকের ক্ষেত্রে চতুর্থ একক অ্যাম্পিয়ারকে আনা হইয়াছে। ইহাতে cgse, cgsm এবং অ্যাম্পিয়ার, ওহ্‌ম্, ভোল্ট প্রভৃতি ব্যবহারিক

(practical) একক আলাদা করিয়া আনিতে হয় না। উহারা নিজ হইতেই পদ্ধতির স্বাভাবিক একক (সুসঙ্গত একক) রূপে আসিয়া পড়ে। বলবিজ্ঞানেও cgs পদ্ধতির ব্যবহারিক এককগুলি (জুল, ওয়াট) MKSA পদ্ধতির সুসঙ্গত একক রূপে আসে।

[তাপতত্ত্ব ও আলোকতত্ত্বের ক্ষেত্রে যথাক্রমে °K ও cd-র দরকার হয়। লক্ষণীয় যে S.I. পদ্ধতিতে ক্যালরির (calorie) স্থান নাই। তাপ একপ্রকার শক্তি বলিয়া S.I. পদ্ধতিতে উহা জুল (J) এককে প্রকাশ করা হয়।]

1-3. এককের চিহ্ন লেখা এবং তাহাদের গুণ ও ভাগ ইত্যাদি সম্বন্ধীয় আন্তর্জাতিক সুপারিশ।

(i) এককের চিহ্নগুলি ইংরেজী খাড়া (Roman) হরফে ছাপা হইবে।

(ii) এককের চিহ্নগুলির পর ফুল স্টপ (Full stop) দেওয়া হইবে না। উদাহরণ — cm. লেখা হইবে না। cm লিখিতে হইবে।

(iii) একক চিহ্নগুলির বহুবচনে কোন পরিবর্তন হইবে না। উদাহরণ — 5 cm লিখিতে হইবে ; 5 cms নয়।

(iv) একক নামগুলি ইংরেজী ছোট হাতের (lower case) হরফে ছাপা হইবে। কিন্তু নিউটন, জুল, ওয়াট, অ্যাম্পিয়ার প্রভৃতি যে সকল একক লোকের নামানুসারে হইয়াছে, তাহাদের চিহ্নে প্রথম অক্ষরটি রোমান বড় হরফে লিখিতে হইবে। উদাহরণ—N (newton), A (ampere), J (joule), W (watt) ইত্যাদি। কিন্তু m (metre), g (gram) ইত্যাদি।

একক চিহ্নে গুণ ও ভাগ। একক চিহ্নগুলিকে বীজগণিতীয় রাশি বলিয়া মনে করিতে হইবে। বীজগণিতীয় ঘাতাংক (index বা power) সংক্রান্ত নিয়মগুলি এখানে প্রযোজ্য হইবে।

(উদাহরণ—

$$\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{cm}^2}=\mathrm{cm}\;;\;\; \mathrm{m}\times\mathrm{m}\times\mathrm{m}=\mathrm{m}^3$$ ইত্যাদি।)

(a) গুণন বুঝাইতে নিচের যে কোন রূপ ব্যবহার করা যাইবে :
Nm, N m, N.m (N=newton, m=metre)

(b) ভাগ বুঝাইতে নিচের যে কোন রূপ ব্যবহার করা চলিবে :
$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, m/s, ms^{-1} (m = metre, s = second)

(c) ভাগ বুঝাইতে তির্যক্ চিহ্ন (/) একবারের বেশী ব্যবহার করা হইবে না। উদাহরণ—cm/s/s না লিখিয়া উহাকে cm/s^2 বা cms^{-2} রূপে লিখিতে হইবে। সান্দ্রতার একক পয়্‌জ্‌ (poise) g/s/cm রূপে না লিখিয়া g/s cm বা gs^{-1} cm^{-1} রূপে লেখা হইবে। সার্বিক গ্যাস স্থিরাংক (universal gas constant) R-কে J/°K/mol রূপে না লিখিয়া J/°K mol বা $J^{\circ}K^{-1}$ mol^{-1} লেখা চলিবে। আপেক্ষিক তাপ cal/g/°C না লিখিয়া cal/g°C বা cal g^{-1} $^{\circ}C^{-1}$ রূপে লেখা হইবে।

1-4. ভৌত রাশির মাত্রা (Dimensions of a physical quantity)। কোন ভৌত রাশির 'মাত্রা' (dimensions) বলিতে উহা মৌলিক রাশিগুলির উপর কি ভাবে নির্ভর করে তাহা বুঝায়। আলোচ্য ভৌত রাশির সংজ্ঞা অনুসারে উহাতে মৌলিক রাশিগুলির কোন্‌টি কতবার ও কি ভাবে আসিয়া পড়ে তাহাকে ভৌত রাশিটির 'মাত্রীয় সংকেত' (dimensional formula) বলে। 'মাত্রীয় সংকেত' দিয়া 'মাত্রা' বুঝান হয়।

উদাহরণ : (1) ক্ষেত্রফল একটি ভৌত রাশি। ক্ষেত্রফল পাইতে দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্য দিয়া গুণ করিতে হয়। ক্ষেত্রফলের মাত্রা দৈর্ঘ্য×দৈর্ঘ্য=(দৈর্ঘ্য)^2। L অক্ষর দিয়া দৈর্ঘ্য সূচিত করিলে ক্ষেত্রফলের মাত্রীয় সংকেত হইবে $L \times L = L^2$। অনুরূপে, আয়তনের মাত্রা দৈর্ঘ্য×দৈর্ঘ্য×দৈর্ঘ্য=(দৈর্ঘ্য)^3 এবং মাত্রীয় সংকেত L^3।

(2) বেগ রূপ ভৌত রাশিটি=দৈর্ঘ্য/কাল। T দিয়া কাল বুঝাইলে বেগের মাত্রীয় সমীকরণ হইবে L/T বা LT^{-1}।

(একটু পরে আরও কিছু উদাহরণ দেওয়া হইল।)

মাত্রীয় সংকেত বুঝাইতে অনেক সময় সংকেতটি গুরু বন্ধনী [ ]-র মধ্যে রাখা হয়। $[LT^{-1}]$ বেগের মাত্রীয় সংকেত বুঝাইবে। তবে ভুল বুঝিবার সম্ভাবনা না থাকিলে গুরু বন্ধনী বাদ দেওয়া চলে।

ভৌত রাশির মাত্রা উহার একক নিরপেক্ষ একটি ধর্ম প্রকাশ করে। এই ধর্মকে আমরা উহার 'জাতি' (Nature) বলিতে পারি। দুইটি রাশির জাতি এক হইলে তবেই উহাদের যোগ বিয়োগ হইতে পারে, বা একটিকে অন্যটিতে পরিণত করিয়া উভয়কে একই এককে প্রকাশ করা যায়।

1-4.1. সুপরিচিত কয়েকটি ভৌতরাশির মাত্রা।

কোণ (Angle)—কোণ বলিতে বৃত্তের চাপের সহিত উহার ব্যাসার্ধের অনুপাত বুঝায়। চাপ এবং ব্যাসার্ধ উভয়েই দৈর্ঘ্য। সুতরাং কোণের মাত্রা

L/L : ইহা সংখ্যা মাত্র এবং ইহার মাত্রা শূন্য কারণ সংখ্যা বুঝাইতে দৈর্ঘ্য, ভর বা কালের এককের দরকার হয় না ।

কোণ রাশিটি মাত্রাবিহীন সংখ্যা মাত্র হইলেও উহার একক আছে। এই এককের নাম রেডিয়ান ।

যে কোন বিশুদ্ধ সংখ্যা মাত্রাবিহীন ।

ঘনত্ব (Density)—ভর ও আয়তনের অনুপাতকে ঘনত্ব বলে। অতএব ঘনত্বের মাত্রা $M/L^3 = ML^{-3}$ ।

বেগ (Velocity)—দূরত্ব ও অতিক্রান্ত সময়ের অনুপাতকে বেগ বলে। অতএব বেগের মাত্রা দৈর্ঘ্য/কাল $= L/T = LT^{-1}$ ।

ত্বরণ (Acceleration)—বেগ পরিবর্তনের হারই ত্বরণ। অতএব ত্বরণের মাত্রা বেগ/কাল $= LT^{-1}/T = LT^{-2}$ ।

ভরবেগ (Momentum)—ভর ও বেগের গুণফলকে ভরবেগ বলে। অতএব উহার মাত্রা ভর×বেগ $= M \times LT^{-1} = MLT^{-1}$ ।

বল (Force)—বল=ভর×ত্বরণ। অতএব বলের মাত্রা $M \times LT^{-2} = MLT^{-2}$ ।

চাপ (Pressure)—চাপ=বল ক্ষেত্রফল। অতএব চাপের মাত্রা $= MLT^{-2}/L^2 = ML^{-1}T^{-2}$ ।

কার্য ও শক্তি (Work and energy)—উভয় রাশিই বল ও দূরত্বের গুণফল। অতএব কার্য বা শক্তির মাত্রা $MLT^{-2} \times L = ML^2T^{-2}$ ।

ক্ষমতা (Power)—সময়ের সহিত শক্তি ব্যয়ের হারই ক্ষমতা। অতএব ক্ষমতার মাত্রা শক্তি/কাল $= ML^2T^{-2}/T = ML^2T^{-3}$ ।

কম্পাংক (Frequency)—কম্পন বা দোলন সংখ্যা ও অতিক্রান্ত সময়ের অনুপাতই কম্পাংক। অতএব উহার মাত্রা সংখ্যা/কাল $= T^{-1}$ কারণ সংখ্যার কোন মাত্রা নাই ।

পরবর্তী আলোচনায় নূতন নূতন রাশির সঙ্গে আমাদের পরিচয় ঘটিবে। দরকার হইলে সেই সেই স্থানে আমরা উহার মাত্রা বাহির করিব ।

1-4.2. মৌলিক রাশি পরিবর্তনে মাত্রার রূপ পরিবর্তন। উপরে দেখা গেল যৌগিক রাশিগুলির মাত্রা মৌলিক রাশিগুলির মাত্রার সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। সাধারণতঃ দৈর্ঘ্য, ভর ও কালকে মৌলিক রাশি ধরা হয়। ইহা সুবিধার, কিন্তু বাধ্যতামূলক নয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় ইঞ্জিনীয়ারিং-এ দৈর্ঘ্য, বল ও কালকে মৌলিক রাশি ধরা হয়। ইহাদের মাত্রা যথাক্রমে L, F ও T হইলে ভরের মাত্রা হইবে বল/ত্বরণ $= F/LT^{-2}$, অর্থাৎ $M = FL^{-1}T^2$ ।

চাপের মাত্রা FL^{-2}, ভরবেগের মাত্রা ভর×বেগ$=FL^{-1}T^2 \times LT^{-1}=FT=$ বল×কাল, ইত্যাদি ।

1-5. মাত্রার সমতার তত্ত্ব (Principle of homogeneity of dimensions)। মৌলিক রাশি স্থির থাকিলে একই স্কেলার বা একই ভেক্টর রাশির দুই প্রকার মাত্রা হইতে পারে না ।

রাশি এক প্রকারের হইলেই উহাদের যোগ বা বিয়োগ সম্ভব । কোন রাশি ঐ জাতীয় রাশিরই সমান হইতে পারে, অন্য প্রকার রাশির নহে । দৈর্ঘ্য বেগের বা আয়তনের সমান হইতে পারে না ; কেবল দৈর্ঘ্যের সহিতই উহার সমীকরণ সম্ভব । এই কারণে কোন সমীকরণের দুই পাশে যে সকল পদ (Terms) থাকিবে, উহাদের প্রত্যেকটি একই প্রকারের রাশি হইবে (উহাদের 'জাতি' একই হইতে হইবে) অতএব সমীকরণের প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হইতে হইবে । ইহাকে **মাত্রার সমতার তত্ত্ব** (*Principle of homogeneity of dimensions*) বলে ।

উদাহরণস্বরূপ আমরা বলবিজ্ঞানের সুপরিচিত $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সমীকরণটি লইতে পারি । সমীকরণের বাঁ দিকের s দূরত্ব বুঝায় ; উহার মাত্রা L। সমীকরণ সত্য হইতে হইলে ডান দিকের ut এবং $\frac{1}{2}ft^2$ পদ দুইটির মাত্রাও L হইতে হইবে । u বেগ এবং t কাল । ut-র মাত্রা $LT^{-1} \times T=L$। $\frac{1}{2}ft^2$ পদের $\frac{1}{2}$ সংখ্যা মাত্র এবং উহা মাত্রাবিহীন । f-এর মাত্রা LT^{-2} এবং t^2-এর মাত্রা T^2 । অতএব সম্পূর্ণ পদটির মাত্রা L। মাত্রার সমতার তত্ত্বের সাহায্যে এইভাবে সমীকরণের সত্যতা যাচাই করা যায় ।

মাত্রাঘটিত সমীকরণ। কোন ভৌত রাশি একাধিক রাশির উপর নির্ভর করিলে ঐ ভৌত রাশি কোন সমীকরণ দিয়া অন্যান্য রাশিগুলির সহিত যুক্ত থাকিবে । এই সমীকরণের দুই পাশের রাশিগুলির মান না লিখিয়া কেবল মাত্রা লিখিলে যে সমীকরণ পাওয়া যায় তাহাকে রাশিগুলির **মাত্রীয় সমীকরণ** (*Dimensional equation*) বলে । মাত্রার সমতার তত্ত্ব অনুসারে সমীকরণের উভয় পাশের মাত্রাগুলি সমান হইতে হইবে । এই উপায়ে এক রাশির সঙ্গে অন্যান্য রাশিগুলির সম্পর্ক বাহির করা যায় । মাত্রার সমতার তত্ত্বের এই প্রকার প্রয়োগকে **মাত্রীয় বিশ্লেষণ** (*Dimensional analysis*) বলে । পদার্থবিদ্যা এবং ইঞ্জিনীয়ারিং-এর বিভিন্ন ক্ষেত্রে ইহার সুষ্ঠু প্রয়োগ আছে । আলোচ্য রাশি অন্যান্য কোন্ কোন্ রাশির উপর নির্ভর করে তাহা এরূপ বিশ্লেষণে পাওয়া যায় না । হয় পরীক্ষার সাহায্যে নহিলে সম্ভাবনা বিচারে এগুলি ঠিক করা হয় । আলোচ্য রাশি অন্য যে সকল রাশি

দিয়া নিয়ন্ত্রিত হয়, সেগুলি জানা থাকিলে মাত্রীয় বিশ্লেষণে নির্ভরের প্রকৃতি জানা যায়, কিন্তু অনুপাত বুঝাইবার সংখ্যাটি ঐ বিশ্লেষণে পাওয়া যায় না। উহাও পরীক্ষার সাহায্যে বা সম্ভাব্য ক্ষেত্রে গাণিতিক উপায়ে পাওয়া যায়। নিচে কয়েকটি সহজ উদাহরণ দেওয়া হইল।

(1) **সরল দোলকের দোলনকাল** (*Periodic time of a simple pendulum*)—ধরা যাক সরল দোলকের দোলন কাল t, উহার (*i*) দৈর্ঘ্য l, (*ii*) দোলকপিণ্ডের ভর m এবং (*iii*) অভিকর্ষজ ত্বরণ g-র উপর নির্ভর করে। উহাদের সম্পর্ক নিম্নোক্ত সমীকরণ দিয়া প্রকাশ করা যাইতে পারে :

$$t = k\, l^x m^y g^z$$

এখানে k একটি স্থির মানের সংখ্যা (numerical constant) ; ইহা $t/l^x m^y g^z$ অনুপাত বুঝায়। উভয়দিকের রাশিগুলির মাত্রা লিখিয়া মাত্রার সমতার তত্ত্ব অনুসারে যে মাত্রীয় সমীকরণ পাওয়া যাইবে তাহা হইল

$$T = L^x M^y (LT^{-2})^z$$

ইহা সত্য হইলে উভয় পাশে M, L ও T-র ঘাতাংক (power) গুলি সমান হইবে। দুই পাশে L-এর ঘাতাংক হইতে পাওয়া যায় $x + z = 0$;

M হইতে পাওয়া যায় $y = 0$;

এবং T হইতে পাওয়া যায় $-2z = 1$;

এই তিনটি সমীকরণ সমাধান করিয়া পাই $z = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ এবং $y = 0$। অতএব

$$t = k\, l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} = k\sqrt{l/g}.$$

এরূপ বিশ্লেষণে k-র মান পাওয়া যায় না। গাণিতিক আলোচনায় পাওয়া যায় $k = 2\pi$।

$y = 0$ হওয়ায় বোঝা যায় দোলনকাল দোলনপিণ্ডের ভরের উপর নির্ভর করে না।

(২) **টানা দেওয়া তারের কম্পাংক** (*Frequency of a string under tension*)। টানা দেওয়া তারের কম্পাংক f তারের ভর m, দৈর্ঘ্য l এবং টান F-এর উপর নির্ভর করে বলিয়া ধরা যাক। উহাদের সম্পর্ক ধরা হইল

$$f = k\, l^x m^y F^z.$$

k সংখ্যামাত্র এবং F বল। অতএব ইহার মাত্রীয় সমীকরণ হইল

$$T^{-1} = L^x M^y (MLT^{-2})^z.$$

উভয় দিকে L, M, ও T-র ঘাতাংক সমান হইতে হইলে

L হইতে পাই $\quad x+z=0$

M হইতে পাই $\quad y+z=0$

এবং T হইতে পাই $\quad -2z=-1$

অতএব $z=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$ এবং $y=-\frac{1}{2}$ । ইহা হইতে পাওয়া গেল

$$f=k\,l^{-\frac{1}{2}}m^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}=k\sqrt{F/ml}.$$

μ দ্বারা একক দৈর্ঘ্যের তারের ভর বুঝাইলে $m=\mu l$ । অতএব

$$f=k\sqrt{F/\mu l^2}=\frac{k}{l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

গাণিতিক আলোচনায় দেখা যায় $k=1, 2, 3$ ইত্যাদি যে কোন পূর্ণসংখ্যা হইতে পারে।

প্রথম হইতেই আমরা m-এর বদলে μ লইতে পারিতাম। তখন সমীকরণ হইত $f=kl^x\mu^yF^z$ । μ-র মাত্রা ML^{-1} । মাত্রীয় সমীকরণ হইতে এই x, y, z-এর মান বাহির করিলে পাওয়া যাইবে $x=-1$, $y=-\frac{1}{2}$ এবং $z=\frac{1}{2}$, অর্থাৎ $t=kl^{-1}\sqrt{F/\mu}$ । আগেও ইহাই পাওয়া গিয়াছে।

(৩) **গ্যাসে শব্দের বেগ।** গ্যাসে শব্দের বেগ v উহার চাপ P ও ঘনত্ব ρ-র উপর নির্ভর করে। সম্পর্ক ধরা যাক

$$v=kP^x\rho^y.$$

ইহার মাত্রীয় সমীকরণ

$$LT^{-1}=(ML^{-1}T^{-2})^x(ML^{-3})^y=M^{x+y}L^{-x-3y}\,T^{-2x}.$$

অতএব $x+y=0$, $-x-3y=1$ এবং $-2x=-1$ । সমাধানে পাই $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$ ।

$$\therefore\quad v=k\sqrt{P/\rho}.$$

(4) **গোল বুদ্বুদের ভিতরে চাপের আধিক্য** (***Excess pressure inside a spherical bubble***)। সাবানজল বা কোন তরলের বুদ্বুদে ভিতরের বায়ুর চাপ বাহিরের বায়ুর চাপের চেয়ে একটু বেশী থাকে। চাপের আধিক্য p তরলের পৃষ্ঠটান (surface tension) γ এবং বুদ্বুদের ব্যাসার্ধ r-এর উপর নির্ভর করে বলিয়া ধরিলে লেখা যায়

$$p=k\gamma^xr^y.$$

γ-কে তরলপৃষ্ঠের প্রতি বর্গক্ষেত্রের স্থিতিশক্তি বলিয়া ধরা যায়। অতএব

γ-র মাত্রা=শক্তি/ক্ষেত্রফল$=ML^2T^{-2}/L^2=MT^{-2}$। সুতরাং উপরের সম্পর্কের মাত্রীয় সমীকরণ

$$ML^{-1}T^{-2}=(MT^{-2})^x L^y=M^x L^y T^{-2x}.$$

দেখা যায় $x=1$ এবং $y=-1$, অর্থাৎ $p=k\gamma/r$। গাণিতিক আলোচনায় পাওয়া যায় $k=4$।

এই প্রকার উদাহরণের সংখ্যা আরো বাড়ান যাইতে পারে। সকল ক্ষেত্রে বিশ্লেষণের ধরন একই। কিন্তু নির্ণেয় রাশি তিনটির বেশী অন্য রাশির উপর নির্ভর করিলে উপরের উপায়ে নির্দিষ্ট কোন ফল পাওয়া যায় না। কারণ, আলোচিত উপায়ে আমরা M, L ও T-র জন্য মাত্র তিনটি সমীকরণ পাইতে পারি। তিনটি সমীকরণের সাহায্যে তিনের বেশী অজানা রাশির মান বাহির করা যায় না। তিনের বেশী অজানা রাশি থাকিলে কি প্রকার বিশ্লেষণ সম্ভব তাহা নিচের অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হইয়াছে।

1-6. মাত্রীয় বিশ্লেষণের Π-সূত্র (The Π-theorem of dimensional analysis)। কোন রাশি তিনটির বেশী অন্য রাশির উপর নির্ভর করিলে মাত্রীয় বিশ্লেষণ কিভাবে করা যাইতে পারে দেখা যাক। একটি উদাহরণের সাহায্যে ইহা ভাল বোঝা যাইবে।

মনে কর জলে ডুবান একটি গোলক জলের ভিতর দিয়া সুষমবেগে টানিয়া লওয়া হইতেছে। উহার গতিতে জল বাধা দেয়। ধরা যাক বাধার বল F জলের ঘনত্ব ρ, জলের সান্দ্রতা (viscosity) η, গোলকের বেগ v ও উহার ব্যাস r-এর উপর নির্ভর করে। এক্ষেত্রে লেখা যায়

$$F=k\rho^x\eta^y v^z r^w. \qquad (1\text{-}6.1)$$

একাদশ পরিচ্ছেদে দেখান হইয়াছে সান্দ্রতা η-র মাত্রা $ML^{-1}T^{-1}$। উভয় দিকের মাত্রা সমান হইতে হইবে বলিয়া পাই

$$MLT^{-2}=(ML^{-3})^x\,(ML^{-1}\,T^{-1})^y\,(LT^{-1})^z\,L^w.$$

অতএব $1=x+y$

$$1=-3x-y+z+w$$

$$-2=-y-z$$

তিনটি সমীকরণে চারটি অজানা রাশির মান বাহির করা যায় না। তিনটি সমীকরণেই y আছে। $y=n$ ধরিয়া লইলে পাই

$$x=1-n,\ y=n,\ z=2-n \text{ এবং } w=2-n$$

অতএব $F=k\,\rho^{1-n}\,\eta^n v^{2-n} r^{2-n}=k\,\rho\,v^2 r^2\left(\dfrac{\eta}{\rho vr}\right)^n$

মাত্রা পরীক্ষা করিলে দেখা যাইবে $\eta/\rho vr$ মাত্রাবিহীন রাশি। কাজেই উপরের সমীকরণের ডানদিক k এবং n-এর বিভিন্ন মানবিশিষ্ট কয়েকটি পদের সমষ্টি হইলেও মাত্রার দিক দিয়া সমীকরণ শুদ্ধই থাকিবে। ইহাতে বোঝা যায় F বল $\eta/\rho vr$ রাশিটির কোন অজানা অপেক্ষক (function)। অতএব লেখা যায়

$$F = \rho v^2 r^2 f\left(\frac{\eta}{\rho vr}\right)$$

অথবা $$\frac{F}{\rho v^2 r^2} = f\left(\frac{\eta}{\rho vr}\right) = \phi\left(\frac{\rho vr}{\eta}\right) \tag{1-6.2}$$

বা $$\frac{F}{\rho v^2 r^2} \times \phi^{-1}\left(\frac{\rho vr}{\eta}\right) = 1 \tag{1-6.3}$$

দেখা যাইবে $F/\rho v^2 r^2$-ও মাত্রাবিহীন রাশি। $\rho vr/\eta$ পদার্থবিজ্ঞানের একটি পরিচিত রাশি ; উহাকে 'রেনল্ডস সংখ্যা' (Reynolds number) বলে। (পরিচিত বলিয়াই আমরা এক্ষেত্রে উহার অবতারণা করিয়াছি ; নহিলে আমাদের আলোচনা উহার বিপরীত রাশি লইয়াও চলিতে পারিত। $y = -n$ ধরিলে আমরা প্রথম হইতেই রেনল্ডস সংখ্যাটি পাইতাম।)

$F/\rho v^2 r^2$ রাশিটিকে বাধার গুণাংক (Force coefficient) বলে। ইহা মাত্রাবিহীন। উপরের আলোচনায় পাওয়া গেল আলোচ্য ক্ষেত্রে বাধার গুণাংক রেনল্ডস সংখ্যার উপর নির্ভর করে।

মাত্রীয় বিশ্লেষণের π-সূত্রে বলা হয় যে যদি m সংখ্যক ভৌত রাশি পরস্পরের সম্পর্কিত হয় এবং উহা প্রকাশ করার জন্য n সংখ্যক মৌলিক রাশি থাকে, তবে ঐ পারস্পরিক সম্পর্ক $m-n$ সংখ্যক মাত্রাবিহীন রাশির গুণফল রূপে প্রকাশ করা যাইবে। m সংখ্যক রাশি হইতে যে $m-n$ সংখ্যক মাত্রাবিহীন রাশি পাওয়া যায় তাহার প্রত্যেকটিকে π-রাশি বলা হয়। এইজন্য এই সূত্রের নাম π-সূত্র।

উপরের উদাহরণে F, ρ, η, v ও r এই পাঁচটি রাশির পারস্পরিক সম্পর্ক আলোচনা করা হইয়াছে। উহাদের প্রকাশ করার জন্য M, L ও T এই তিনটি মৌলিক রাশি ব্যবহার করা হইয়াছে। অতএব π-সূত্র হইতে পাই, এই সম্পর্ক $5-3=2$টি মাত্রাবিহীন রাশির গুণফলরূপে প্রকাশ করা যাইবে। 1-6.3 সমীকরণে আমরা তাহাই পাইয়াছি। 1-5 অনুচ্ছেদের (1) নং উদাহরণে t, l, m, g এই চারটি রাশির সম্পর্ক বাহির করা হইতেছে। মৌলিক রাশির সংখ্যা তিন। অতএব ইহাদের সম্পর্ক একটি মাত্রাবিহীন রাশি

দিয়া প্রকাশ করা যাইবে। স্পষ্টই দেখা যায় এই সম্পর্ক $t\sqrt{g/l}$ = স্থির রাশিরূপে লেখা যায়। $t\sqrt{g/l}$ একটি মাত্রাবিহীন রাশি।

কখনও এরূপ হইতে পারে যে m সংখ্যক ভৌত রাশি ও n সংখ্যক মৌলিক রাশি হইতে $m-n$-এর বেশী মাত্রাবিহীন রাশি পাওয়া যায়। সেরূপ ক্ষেত্রে বুঝিতে হইবে যে n অপেক্ষা কম সংখ্যক মৌলিক রাশির সাহায্যে ঐ রাশিগুলির পারস্পরিক সম্পর্ক আলোচনা করা যায়। এই কারণে π-সূত্রে সবচেয়ে কম যে কয়টি মৌলিক রাশির প্রয়োজন তাহাই নিতে হইবে।

তরল বা গ্যাসের ভিতর দিয়া কঠিন বস্তুর গতির আলোচনায় ও তাপ পরিচলনে π-সূত্রের ব্যাপক প্রয়োগ আছে।

1-7. একক পরিবর্তন (Change of unit)। রাশির মাত্রা উহার একক নিরপেক্ষ ধর্ম প্রকাশ করে, একথা আগেই বলা হইয়াছে। মৌলিক রাশিগুলির একক পরিবর্তন করিলে কোন আলোচ্য রাশির নূতন মান কত হইবে, তাহা রাশির মাত্রার সাহায্যে পাওয়া যায়। নিচে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

(1) এক পাউণ্ডাল বলকে ডাইন্ (dyne)-এ প্রকাশ করা।

বলের মাত্রা MLT^{-2}, অর্থাৎ বলের একক পাইতে ভর ও দৈর্ঘ্যের একককে 1 ঘাতাংকে (power) এবং কালের একককে -2 ঘাতাংকে লইতে হইবে। পাউণ্ডালে ভরের একক পাউণ্ড (lb), দৈর্ঘ্যের একক ফুট (ft) ও কালের একক সেকেণ্ড (s)। ডাইন্ সিজিএস পদ্ধতিতে বলের একক, এবং এই পদ্ধতিতে ভরের একক গ্রাম (g), দৈর্ঘ্যের সেণ্টিমিটার (cm) এবং কালের সেকেণ্ড (s)। অতএব

$$1 \text{ পাউণ্ডাল} = 1 \text{ lb ft s}^{-2}$$

এবং $$1 \text{ ডাইন্} = 1 \text{ g cm s}^{-2}$$

এক পাউণ্ডাল বল x ডাইন্-এর সমান হইলে

$$1 \text{ lb ft s}^{-2} = x \text{ g cm s}^{-2}$$

$$\therefore\ x = 1\,\frac{\text{lb}}{\text{g}}\cdot\frac{\text{ft}}{\text{cm}} = 453{\cdot}6\times 30{\cdot}48 = 1{\cdot}382\times 10^4$$

অর্থাৎ এক পাউণ্ডালে $1{\cdot}382\times 10^4$ ডাইন্।

(2) কোন ত্বরণ প্রতি বর্গ সেকেণ্ডে দশ মিটার হইলে প্রতি বর্গ ঘণ্টায় উহা কত মাইল?

ত্বরণের মাত্রা LT^{-2}। অতএব লেখা যায়

$$10 \text{ m s}^{-2} = x \text{ mi hr}^{-2}$$

$$\therefore\ x = 10\,\frac{\text{m}}{\text{mi}}\cdot\left(\frac{\text{hr}}{\text{s}}\right)^2 = 10\times\frac{39{\cdot}37}{1760\times 36}\times(3600)^2$$

$$= 8{\cdot}054\times 10^4\text{।}$$

1·8. সিজিএস ও এমকেএস পদ্ধতির এককের তালিকা। নিচে বিভিন্ন গতীয় রাশি (dynamical quantities), উহাদের মাত্রা ও দুই পদ্ধতিতে উহাদের একক ও এককের আন্তর্জাতিক চিহ্নগুলি দেওয়া হইল।

রাশি	মাত্রা	সিজিএস		এমকেএস	
		একক	চিহ্ন	একক	চিহ্ন
মৌলিক					
দৈর্ঘ্য	L	সেণ্টিমিটার	cm	মিটার	m
ভর	M	গ্রাম	g	কিলোগ্রাম	kg
কাল	T	সেকেণ্ড	s	সেকেণ্ড	s
যৌগিক					
ক্ষেত্রফল	L^2	—	cm^2	—	m^2
আয়তন	L^3	—	cm^3	—	m^3
ঘনত্ব	ML^{-3}	—	g/cm^3	—	kg/m^3
বেগ	LT^{-1}	—	cm/s	—	m/s
ত্বরণ	LT^{-2}	গ্যালিলিও	cm/s^2	—	m/s^2
ভরবেগ	MLT^{-1}	—	g cm/s	—	kg m/s
বল	MLT^{-2}	ডাইন	dyn	নিউটন	N
চাপ	$ML^{-1}T^{-2}$	—	dyn/cm^2	প্যাস্কাল	N/m^2
কার্য ও শক্তি	ML^2T^{-2}	আর্গ	dyn cm	জুল	J(=Nm)
ক্ষমতা	ML^2T^{-3}	—	erg/s	ওয়াট	W(=J/s)

1·9. মৌলিক এককের সংখ্যা সম্বন্ধে অনিশ্চয়তা (Arbitrariness in the number of fundamental units)।

বিভিন্ন ভৌত রাশির মাপজোখে কয়টি মৌলিক এককের দরকার তাহা আগে আলোচনা করা হইয়াছে। মনে রাখা প্রয়োজন যে এই সংখ্যা কোন ভৌত নিয়ম দিয়া নির্দিষ্ট নয়। ইহা অনেকখানি নির্ভর করে মাপজোখে আমরা কি ধরনের প্রথা গ্রহণ করিব বলিয়া ঠিক করিয়াছি তাহার উপর। ইচ্ছা করিলে আয়তনকে আমরা একটি মৌলিক একক বলিয়া লইতে পারিতাম ও উহার জন্য একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ ঠিক করিয়া দিতে পারিতাম। মনে করা যাক ঐ এককের নাম 'কিউবিক' (cb)। একটি এক সেণ্টিমিটার বাহু-বিশিষ্ট ঘনকের আয়তন ঐ এককের সঙ্গে তুলনা করিয়া দেখা গেল উহার আয়তন a_0 কিউবিক (অর্থাৎ $1\ cm^3 = a_0 cb$)। l_1, l_2, l_3 cm দৈর্ঘ্য, প্রস্থ

ও বেধবিশিষ্ট একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন এই প্রথা অনুসারে হইবে $V = l_1 \times l_2 \times l_3 \times a_0$ কিউবিক। লক্ষ্য করা যায় যে a_0 রাশির মাত্রা cm^3/cb। a_0 একটি নিত্য সংখ্যা (universal constant); উহার মান, আয়তনের একক নির্বাচনের উপর নির্ভর করিবে।

আয়তন মাপিবার এই প্রথা গ্রহণ করিলে মৌলিক এককের সংখ্যা বাড়িবে। কিন্তু ইহাতে কোথাও কোন ত্রুটি ঘটিবে না। আমরা দৈর্ঘ্যের একক ব্যবহার করিয়া আয়তন মাপিবার যে পদ্ধতি আগে বর্ণনা করিয়াছি তাহার অর্থ হইল a_0 রাশিকে মাত্রাবিহীন মনে করা ও উহার মান 1 লওয়া। দেখা যাইতেছে কোন নিত্য সংখ্যাকে মাত্রাবিহীন ধরিয়া আমরা মৌলিক মাত্রকের সংখ্যা কমাইতে পারি। ইহাতে ভৌত নিয়মের দিক হইতে কোন ত্রুটি ঘটে না। বৈদ্যুত ও চৌম্বক রাশি মাপিবার e.s.u. (electrostatic unit) পদ্ধতিতে শূন্য দেশের (vacuum) ডাইইলেকট্রিক কনস্ট্যাণ্ট ϵ_0-কে মাত্রাবিহীন ধরা হয়। ফলে MKSA পদ্ধতি অপেক্ষা এখানে মাত্রকের সংখ্যা একটি কম হয়। e.m.u. (electromagnetic unit) পদ্ধতিতে শূন্য দেশের ম্যাগনেটিক পারমিয়েবিলিটি μ_0-কে মাত্রাবিহীন ধরা হয়। আধুনিক তত্ত্বীয় পদার্থবিদ্যা আলোচনায় শূন্য দেশে আলোকের গতি c-কে মাত্রাবিহীন ধরার প্রথা অনেক লেখায় নেওয়া হয়। এই প্রথায় সময়ের মাত্রা দৈর্ঘ্যের সহিত এক। এক সেণ্টিমিটার সময় বলিতে বুঝিতে হইবে শূন্যদেশে আলোক এক সেণ্টিমিটার যাইতে যে সময় লইবে তাহাই। অপরিচয়ের জন্য এই প্রথা বিচিত্র মনে হইতে পারে, কিন্তু পদার্থবিদ্যার দিক হইতে ইহাতে কোন ত্রুটি ঘটে না।

প্রশ্ন

1. SI পদ্ধতির মৌলিক এককগুলির নাম কর। উহাদের বর্তমানে গৃহীত সংজ্ঞা অনুরূপ রাশির আগের সংজ্ঞা হইতে একটু পৃথক করা হইয়াছে কেন? একটি উদাহরণ দিয়া উত্তর বুঝাইবার চেষ্টা কর।

2. সুসঙ্গত (coherent) বা নিরপেক্ষ (absolute) একক বলিতে কি বুঝায়? উদাহরণ দাও। জুল, ওয়াট, ভোল্ট কোন্ পদ্ধতির সুসঙ্গত একক, এবং কোন্ পদ্ধতির নয়?

3. এককের চিহ্ন লেখা ও তাহাদের গুণ ভাগ সংক্রান্ত আন্তর্জাতিক সুপারিশ উদাহরণ দিয়া দেখাও।

4. কোন পরিমেয় রাশির মাত্রা (dimensions) বলিতে কি বুঝায়? নিচের রাশিগুলির সংজ্ঞা হইতে উহাদের মাত্রা বাহির কর: (ক) মহাকর্ষীয় নিত্যসংখ্যা (gravitational constant), (খ) ইয়ং-এর স্থাপিতাংক (Young's modulus), (গ) পৃষ্ঠটান (surface tension), (ঘ) সান্দ্রতার গুণাংক (coefficient of viscosity)। এমকেএস একক ব্যবহার করিয়া ইহাদের একক কিভাবে লিখিবে?

5. মাত্রার সমতা সম্বন্ধীয় তত্ত্বটি বুঝাইয়া বল। সিজিএস পদ্ধতিতে কৌণিক ভরবেগ (angular momentum) আর্গ/সেকেণ্ড কিংবা আর্গ × সেকেণ্ড এককে প্রকাশিত হইবে বাহির কর।

মাত্রীয় সমীকরণ (dimensional equation) কাহাকে বলে, উদাহরণের সাহায্যে বুঝাইয়া দাও। ইহার প্রয়োগেরও একটি উদাহরণ দাও।

6. মাত্রীয় বিশ্লেষণ (dimensional analysis) কি প্রকারের তাহা একটি উদাহরণের সাহায্যে বুঝাও।

অভিকর্ষজ ত্বরণের মান প্রতি বর্গ সেকেণ্ডে 32 ft। দৈর্ঘ্যের একক এক মাইল এবং কালের একক এক মিনিট হইলে এই ত্বরণের মান কত হইবে?

[উত্তর : $21{\cdot}8\ \text{mi/min}^2$]

7. কোন তরলের ঘনত্ব d ও পৃষ্ঠটান γ। পৃষ্ঠটানের ক্রিয়ায় r ব্যাসার্ধের এক ফোঁটা তরল দুলিতে থাকিলে দেখাও যে উহার দোলনকাল $t \propto (r^3 d/\gamma)^{\frac{1}{2}}$।

8. প্রবহমান নদী সবচেয়ে ভারী যে পাথর ঠেলিয়া লইয়া যাইতে পারে তাহার ভর m কেবল যদি নদীর বেগ v, জলের ঘনত্ব ρ এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ g-র উপর নির্ভর করে, তাহা হইলে দেখাও যে $m \propto v^6$।

9. তোমাকে বলা হইল যে l দৈর্ঘ্যের ও r ব্যাসার্ধের সরু নল দিয়া P চাপে η সান্দ্রতা গুণাংকের তরল প্রবাহিত হইলে প্রতি সেকেণ্ডে নির্গত তরলের আয়তন V (ক) P-র সমানুপাতিক, (খ) η ও l-এর ব্যস্তানুপাতিক ও (গ) r^4-এর আনুপাতিক হইবে। এইগুলির সত্যতা মাত্রীয় সমীকরণের সাহায্যে প্রমাণ কর। (η-র মাত্রা $ML^{-1}T^{-1}$)

10. সুরশলাকার (tuning fork) কম্পনকাল (t) উহার শলাকার (prong) দৈর্ঘ্য l এবং উহা যে পদার্থে প্রস্তুত তাহার ঘনত্ব ρ ও ইয়ং-এর

স্থাপিতাংকের (E) উপর নির্ভর করিলে, দেখাও যে $t \propto l(\rho/E)^{\frac{1}{2}}$। (স্থাপিতাংক = বল/ক্ষেত্রফল।)

11. 1 ft = 30·48 cm, 1 lb = 453·6 g, g = 32 ft/s^2 ধরিয়া হর্স-পাওয়ারের মান এমকেএস এককে বাহির কর।

[উত্তর : 7·4 × 10^2 ওয়াট]

12. কোন বল 15 kg ভরের উপর 1 min ক্রিয়া করায় ভরের বেগ 4·6 km/s হয়। বলের মাত্রা বিচার করিয়া উহার মান ডাইন্-এ প্রকাশ কর।

[উত্তর : 11·5 × 10^7]

13. যে বল 1 cwt ভরের উপর এক মিনিট ক্রিয়া করিয়া উহাকে ঘণ্টায় এক মাইল বেগ দেয়, ডাইন্-এ তাহার মান কত? দেওয়া আছে 1 cwt (hundred weight) = 112 lb, 1 ft = 30·48 cm, 1 lb = 453·6 g।

[উত্তর : 3·78 × 10^4]

14. (ক) দৈর্ঘ্য, বেগ ও বলের মাত্রককে মৌলিক ধরিলে, ভর ও কালের মাত্রকের ঘাত কত হইবে?

(খ) বল, বেগ ও ভরবেগ মৌলিক রাশি ধরিলে ভর, দৈর্ঘ্য ও কালের ঘাত কত হইবে?

15. দৈর্ঘ্য, বেগ ও বলের মাত্রককে দ্বিগুণ করিয়া দিলে, ভর এবং কালের মাত্রকের পরিবর্তন হইবে না, কিন্তু শক্তির মাত্রক চারগুণ হইয়া যাইবে, ইহা প্রমাণ কর।

16. মাত্রা সংক্রান্ত π-সূত্রের বক্তব্য বুঝাইয়া বল।

17. f সুষম ত্বরণ সম্পন্ন কোন বস্তুর প্রাথমিক বেগ u এবং t সেকেণ্ড সময়ে উহা s দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে $s/ft^2 = \phi\,(u/ft^2)$। ইহা হইতে দেখাও যে s-এর বাস্তবানুগ মান হইবে $s = a\,ut + b\,ft^2$; a ও b দুইটি স্থির রাশি।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

ভেক্টর

(Vectors)

2-1. সূচনা। এই পরিচ্ছেদে আমরা ভেক্টর সংক্রান্ত মূল সূত্রগুলি কিছু আলোচনা করিব। প্রয়োগের উদ্দেশ্যে সূত্রগুলি বুঝানই আমাদের লক্ষ্য। স্থানাভাবে সূত্রের প্রমাণ দেওয়া হইবে না।

ভেক্টর আলোচনাকে সাধারণতঃ দুই অংশে ভাগ করা হয়—(1) ভেক্টর বীজগণিত (Vector algebra) ও (2) ভেক্টর কলন (Vector calculus)। বীজগণিত অংশে ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও গুণনের আলোচনা হয়; ইহা 2-4 হইতে 2-7 পর্যন্ত অনুচ্ছেদে আলোচিত হইয়াছে। কলন অংশে ভেক্টরের অবকলন (differentiation) ও সমাকলন (integration) আলোচনা হয়। 2-8 হইতে পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলিতে ইহা করা হইয়াছে।

যে সকল রাশির মান ও সংশ্লিষ্ট একটা দিক্ (direction) থাকে ও যাহাদের যোগ (addition) সামান্তরিক সূত্র (parallelogram law) অনুসারে হয়, তাহাদের ভেক্টর বা সদিশ (=যাহার দিক্ আছে) রাশি বলে। যে সকল রাশির মান আছে কিন্তু সংশ্লিষ্ট কোন দিক্ নাই, তাহারা স্কেলার (scalar) বা অদিশ (=দিক্‌হীন) রাশি। স্কেলার রাশি একটি মাত্র সংখ্যার সাহায্যে বুঝান যায়; উপযুক্ত এককে (unit) এই সংখ্যা রাশির মান প্রকাশ করে। কোন ভর 10 kg বলিলেই উহার বর্ণনা সম্পূর্ণ হয়। kg এককে 10 সংখ্যাটি রাশির মান। কিন্তু ত্রিমাত্রিক দেশে (three dimensional space-এ) ভেক্টরের সম্পূর্ণ বর্ণনায় 'তিনটি' সংখ্যার দরকার হয়; উহাদের একটি মানের জন্য ও দুটি দিকের জন্য। গোলীয় নির্দেশতন্ত্রে θ, ϕ কোণ দুটির সাহায্যে দিক্ বুঝান যায়। ইহা অপেক্ষা কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহারে সুবিধা বেশী। এই নির্দেশতন্ত্রে তিন অক্ষে রাশিটির উপাংশ তিনটি বলিলেই রাশির বর্ণনা সম্পূর্ণ হয়।

চিত্র আঁকিতে সরল রেখাংশ (line segment) দিয়া ভেক্টর বুঝান যায়। রেখার দৈর্ঘ্য উপযুক্ত এককে রাশির মান প্রকাশ করে, এবং রেখার দিক্ ভেক্টরের দিকের সমান্তরালে নেওয়া হয়। কোন আদিবিন্দু O হইতে

কোন প্রান্তবিন্দু A পর্যন্ত টানা OA রেখা দ্বারা কোন ভেক্টর বুঝাইতে $\overline{OA}$ বা $\overrightarrow{OA}$ লেখা হয়। ভেক্টরের অভিমুখ O হইতে A-এর দিকে। $\overline{AO}$ লিখিলে $\overline{OA}$-র বিপরীতমুখী সমমান ভেক্টর বুঝায়।

বীজগণিতের প্রতীক (symbol) ব্যবহার করিয়া কোন ভেক্টর বুঝাইতে চাহিলে আমরা উহা মোটা হরফে ছাপিব। 'r' প্রতীক দিয়া $\overline{OA}$ ভেক্টর বুঝাইতে চাহিলে লেখা হইবে $\mathbf{r}$। এই $\mathbf{r}$ ও $\overline{OA}$ অভিন্ন তাহা বুঝাইবার জন্য সংকেতে লেখা হয় $\mathbf{r} \equiv \overline{OA}$। $\equiv$ চিহ্নটি 'অভিন্নতা' (identity) বুঝায়। $\mathbf{r}$-এর কেবল মান বুঝাইতে লেখা হয় $|\mathbf{r}|$ বা r (ছাপার বাঁকা ছাঁদের হরফ বা italics)। হাতে লেখার সময় ভেক্টর বুঝাইতে $\bar{r}$ এবং উহার কেবল মান বুঝাইতে r লেখা চলে। $-\mathbf{r}$ বলিতে $\overline{AO}$ ভেক্টর বা $\overline{OA}$-র সমান ও বিপরীত ভেক্টর বুঝায়।

2-2. গতিবিজ্ঞানের কয়েকটি মৌলিক ভেক্টর। ভেক্টরের সাহায্যে গতিবিজ্ঞান আলোচনায় মৌলিক কয়েকটি ভেক্টর সম্বন্ধে গোড়ার কথাগুলি স্পষ্টভাবে জানা ও মনে রাখা দরকার। ইহাতে অনেক অসুবিধার হাত হইতে রক্ষা পাওয়া যায়। নিচে এ সংক্রান্ত অবশ্য জ্ঞাতব্য কথাগুলি বলা হইল।

(i) সরণ ভেক্টর (Displacement vector)। কোন কণা A হইতে B বিন্দুতে গেলে উহার সরণ ভেক্টর $\mathbf{r}_{AB} \equiv \overline{AB}$। B হইতে উহা C-তে গেলে সরণ ভেক্টর $\mathbf{r}_{BC} \equiv \overline{BC}$। আদিবিন্দু A হইলে মোট সরণ $\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BC} = \mathbf{r}_{AC} = \overline{AC}$। $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ সামান্তরিক সূত্র অনুসারে যোগ হইয়া $\overline{AC}$-তে পরিণত হয়। পর পর যে কোন সংখ্যক সরণের যোগ এইভাবেই হইবে।

কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে x, y, z অক্ষে AB রেখাংশের উপাংশ যথাক্রমে x_{AB}, y_{AB}, z_{AB} হইলে লেখা যায়

$$\mathbf{r}_{AB} \equiv [\, x_{AB}, y_{AB}, z_{AB} \,] \tag{2-2.1}$$

এরূপ লেখায় উপাংশ তিনটির সাহায্যে ভেক্টর বুঝান হয়।

$\mathbf{r}_{AB}$-এর মান

$$|\,\mathbf{r}_{AB}\,| \equiv r_{AB} = (x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2-2.2}$$

যে কোন ভেক্টর $\mathbf{A}$ সম্বন্ধে উপরের কথাগুলি খাটে।

$$\mathbf{A}\equiv[A_x, A_y, A_z] \text{ এবং } |\mathbf{A}| \equiv A=(A_x^2+A_y^2+A_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2\text{-}2.3)$$

A-র দিক্ কিভাবে বুঝান যায় ? ধরা যাক A-র দিকের সহিত x, y, z অক্ষের কোণ যথাক্রমে α, β, γ এবং

$$\cos\alpha=\lambda, \cos\beta=\mu \text{ ও } \cos\lambda=\nu.$$

λ, μ, ν-কে A-র দিক্-কোসাইন (Direction cosines) বলে। এক্ষেত্রে

$$\lambda=\cos\alpha=\frac{A_x}{A}, \quad \mu=\cos\beta=\frac{A_y}{A}, \quad \text{এবং} \quad \nu=\cos\gamma=\frac{A_z}{A} \quad (2\text{-}2.4)$$

$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$ বলিয়া λ, μ, ν-র যে কোন দুটি রাশি জানিলেই A-র দিক্ জানা হয়।

(ii) স্থান ভেক্টর (Position vector)। গৃহীত নির্দেশতন্ত্রের মূল বিন্দু O হইলে যে কোন P বিন্দুর অবস্থান $\overline{OP}\equiv\mathbf{r}$ ভেক্টর দ্বারা বুঝান যায়। $\mathbf{r}$ ($\equiv\overline{OP}$)-কে P বিন্দুর স্থান-ভেক্টর বলে। P-র নির্দেশাংক (বা স্থানাংক) (coordinates) x, y, z হইলে

$$\mathbf{r}\equiv[x, y, z], \; r^2=x^2+y^2+z^2,$$
$$\lambda=\frac{x}{r}, \quad \mu=\frac{y}{r}, \quad \nu=\frac{z}{r} \quad (2\text{-}2.5)$$

(iii) বেগ, ত্বরণ ও বল। ইহারা সকলেই ভেক্টর রাশি। 2-2.3 ও 2-2.4 সমীকরণ ইহাদের সবগুলির ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। সামন্তরিক সূত্র অনুসারে ইহাদের যোগ হয়।

(iv) অত্যণু ঘূর্ণন (Infinitesimal rotation)। কোন অক্ষে অতি অল্প পরিমাণ ঘূর্ণন হইলে ঘূর্ণনের অনন্ত ক্ষুদ্র কোণকে ভেক্টর রাশি মনে করা যায়। ইহার দিক্ ঘূর্ণাক্ষ বরাবর ধরা হয়। ডান হাতের বুড়া আঙ্গুল সোজা রাখিয়া অন্য আঙ্গুলগুলি মুঠা করিলে মুঠা করা আঙ্গুল যদি ঘূর্ণনের অভিমুখ বুঝায়, তাহা হইলে বুড়া আঙ্গুলের গোড়া হইতে মাথার দিক্ অত্যণু ঘূর্ণনের দিক্ বুঝাইবে। ইহাকে **দক্ষিণ-হস্তীয় বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ সূত্র (Right-hand thumb rule)** বলে। দুইটি অত্যণু ঘূর্ণনের যোগফল যোগের সামান্তরিক সূত্র মানিয়া চলে। ঘূর্ণন খুব স্বল্পমান না হইলে সামান্তরিক সূত্র খাটে না। অতএব পরিমিত ঘূর্ণনকে (finite rotation) ভেক্টর মনে করা যায় না।

(v) কৌণিক বেগ। সময়ের সহিত ঘূর্ণন কোণ পরিবর্তনের হারই কৌণিক বেগ। δt অবসরে ঘূর্ণন কোণ $\delta\theta$ বদলাইলে, তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ (instantaneous angular velocity)

$$\omega = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

অত্যণু ঘূর্ণনকে ভেক্টর ধরা যায় বলিয়া কৌণিক বেগ ω-কেও ভেক্টর ধরা যায়। অত্যণু ঘূর্ণনের মত ইহার অভিমুখও ঘূর্ণাক্ষ বরাবর নেওয়া হয়, এবং দিক্ উপরে বলা দক্ষিণ-হস্তীয় বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ সূত্রের সাহায্যে পাওয়া যায়।

(vi) তলভেক্টর (Area vector)। একই আবর্তে (দক্ষিণাবর্তে বা বামাবর্তে) কোন রেখা টানিয়া স্বল্পাংশ একটু তল চিহ্নিত করিলে, এই তলকে ভেক্টর মনে করা যায়। ইহা $d\mathbf{S}$ বা $d\mathbf{A}$ রূপে লেখা চলে। তলের ক্ষেত্রফল ভেক্টরের মান। তলভেক্টরের অভিমুখ তলের লম্ব বরাবর নেওয়া হয়। তলের লম্ব তাহার দুই দিকে হইতে পারে। প্রচলিত রীতি অনুযায়ী ইহার কোন্‌টি নেওয়া হইবে তাহা দক্ষিণ-হস্তীয় বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ সূত্র দিয়া ঠিক করা হয়। মুঠা করা আঙ্গুলগুলি তলের সীমারেখা টানার অভিমুখ বুঝাইলে বুড়া আঙ্গুল ভেক্টরের দিক্ বুঝাইবে। ভেক্টরের মান কেবল তলের ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে বলিয়া উহা তলের আকার নিরপেক্ষ। তল যে কোন আকারের হইতে পারে; সুবিধার জন্য সাধারণতঃ উহা চৌকা বা গোল ধরা হয়।

কোন তলভেক্টরের x উপাংশ বলিতে x-অক্ষের অভিলম্ব তলে (অর্থাৎ y-z তলে) উহার প্রক্ষেপ (projection) বুঝায়। $d\mathbf{S}$ তলভেক্টর হইলে উহার x উপাংশ $dS_x\,(=dydz)$ লেখা যায়। অন্য উপাংশ দুটি সম্বন্ধে অনুরূপ সংজ্ঞা প্রযোজ্য।

তলভেক্টর ভেক্টর সংক্রান্ত সকল সূত্রই মানিয়া চলে। ত্রিমাত্রিক দেশে (three dimensional space-এ) বদ্ধতলের ক্ষেত্রে তলের বহির্মুখী লম্বের দিক্‌কেই তলভেক্টরের দিক্ বলিয়া ধরা প্রচলিত রীতি। কোন স্থান সম্পূর্ণ ঘেরিয়া যে বদ্ধতল থাকে, তলভেক্টরের সংজ্ঞা ও উপরোক্ত রীতি অনুসারে বদ্ধতলে তলভেক্টরের পূর্ণ সমাকলের মান শূন্য হয়। সংকেতে লেখা হয়

$$\oint d\mathbf{S} = 0.$$

2-3. ত্রিমাত্রিক সমকোণী নির্দেশতন্ত্র ও ছদ্ম ভেক্টর (Trirectangular coordinate system and pseudo-vectors)। ভেক্টর

আলোচনায় কল্পিত নির্দেশতন্ত্র কার্টেজীয়, অর্থাৎ ত্রিমাত্রিক ও সমকোণী, নেওয়াই সবচেয়ে সুবিধার। গোলীয় (spherical), বেলনীয় (cylindrical) বা অন্য প্রকার নির্দেশতন্ত্র বিশেষ বিশেষ প্রশ্ন আলোচনায় সুবিধার হইতে পারে ; কিন্তু আমাদের তাহা দরকার হইবে না।

নির্দেশতন্ত্রের অক্ষের দিক্‌বিন্যাস ইচ্ছামত নেওয়া যায়। দিক্‌বিন্যাস বদলাইলে উপাংশগুলির মান বদলায়, কিন্তু ভেক্টরের মান স্থির থাকে। এইরূপ দুই নির্দেশতন্ত্রে A-র উপাংশ যথাক্রমে A_x, A_y, A_z এবং $A_{x'}, A_{y'}, A_{z'}$ হইলে

$$A^2 = A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2 = A_{x'}{}^2 + A_{y'}{}^2 + A_{z'}{}^2$$

হইবে। বস্তুতঃ, উপরের সম্পর্ক ঠিক রাখিতে হইলে দুই প্রস্ত উপাংশের মধ্যে যে সম্পর্ক থাকিতে হইবে তাহার সাহায্যে ভেক্টরের যথার্থ সংজ্ঞা নিরূপণ হয় (2-12 অনুচ্ছেদ দেখ)।

কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র দক্ষিণ-হস্তীয় বা বাম-হস্তীয় হইতে পারে। ডান হাতের প্রথম তিনটি আঙ্গুল সমকোণে মেলিয়া বুড়া-আঙ্গুলে x-অক্ষ, দ্বিতীয়ে (তর্জনীতে) y-অক্ষ ও তৃতীয়ে (মধ্যমায়) z-অক্ষ লইলে দক্ষিণ-হস্তীয় তন্ত্র গঠিত হয়। বাঁ হাতে অনুরূপ অক্ষ লইলে বামহস্তীয় তন্ত্র গঠিত হয়। কোন ভেক্টরের দিক্‌চিহ্ন নির্দেশতন্ত্রের উপর নির্ভর করে না। দক্ষিণ বা বাম হস্তীয় তন্ত্রে দিক্‌চিহ্ন একই থাকে। অর্থাৎ ভেক্টরের দিক্‌চিহ্নের তন্ত্র নিরপেক্ষ বাস্তবতা আছে।

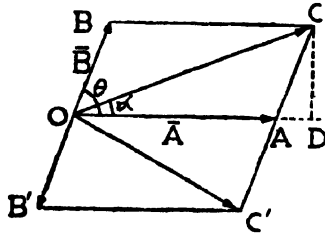
কিন্তু অত্যণু ঘূর্ণন, কৌণিক বেগ ও তলভেক্টরের দিক্ চিহ্ন নির্দেশ করা হয় স্বৈচ্ছিক (arbitrary) কোন প্রথা অনুসারে। সেই কারণে উহাদের দিক্ চিহ্নের তন্ত্র নিরপেক্ষ বাস্তবতা নাই। যে কৌণিক বেগ বামহস্তীয় প্রথায় উপরের দিকে হইবে তাহাই দক্ষিণ হস্তীয় প্রথায় নীচের দিকে। যথার্থ ভেক্টরের বেলা এ প্রকার কোন পরিবর্তন হয় না। এই কারণে উপরোক্ত তিনটি ভেক্টরের ন্যায় কোন ভেক্টরকে **'ছদ্ম ভেক্টর' (Pseudo-vector)** বা **অক্ষীয় ভেক্টর (Axial vector)** বলা হয়। কোন অক্ষ বা তল সাপেক্ষে ইহাদের পজিটিভ দিক্ ঠিক করা হয়। পজিটিভ দিকের সংজ্ঞার জন্য দক্ষিণ হস্তীয় তন্ত্রে দক্ষিণ বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ সূত্র, এবং বাম হস্তীয় তন্ত্রে বাম বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ সূত্র প্রয়োগ করা হয়। এই নিয়ম মানিয়া চলিলে ভেক্টর ব্যবহারে সর্বত্র দক্ষিণ বা সর্বত্র বাম হস্তীয় অক্ষ নেওয়া যায়। কিন্তু দুটিকে মিশাইয়া ফেলিলে গোলমাল হইবে। আমরা সর্বত্র দক্ষিণ হস্তীয়

তন্ত্র ও দক্ষিণ বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ সূত্র ব্যবহার করিব। বর্তমানে বাম অপেক্ষা দক্ষিণ হস্তীয় তন্ত্রের প্রচলন বেশী। কোন কোন পুস্তকে বামহস্তীয় তন্ত্রের ব্যবহার এখনও দেখা যায়।

2-4. **ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ।** A ও B দুইটি ভেক্টর। উহাদের যোগ করিতে হইলে একই O বিন্দু হইতে উপযুক্ত রেখাংশ OA এবং OB (2.1 চিত্র) দ্বারা ভেক্টর দুটির মান ও দিক্ নির্দেশ করিয়া $OACB$ সামান্তরিক পূর্ণ করিতে হইবে। ইহার কর্ণ OC A এবং B-র যোগফলের মান ও দিক্ নির্দেশ করিবে। $\mathbf{A} \equiv \overline{OA}$ এবং $\mathbf{B} \equiv \overline{OB}$ হইলে

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}\equiv\mathbf{C}.$$

$\angle AOB=\theta$ হইলে $|\mathbf{C}|^2=A^2+B^2+2AB\cos\theta$

$\angle AOC=\alpha$ হইলে $\tan\alpha=\dfrac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$

2.1 চিত্র

বিকল্পে, প্রথমে $\overline{OA}\equiv\mathbf{A}$ আঁকিয়া উহার প্রান্তবিন্দু A হইতে $\overline{AC}\equiv\mathbf{B}$ টানিতে হইবে। প্রথম ভেক্টরের আদিবিন্দু ও শেষ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু যোগ করিলে এই রেখা উভয় ভেক্টরের যোগফল বা লব্ধির (resultant) মান ও দিক্ নির্দেশ করিবে। যে কোন সংখ্যক ভেক্টর এইভাবে যোগ করা যায়।

A হইতে B বিয়োগ করিতে হইলে, B উল্টাইয়া দিয়া A-র সহিত যোগ করিতে হইবে। 2.1 চিত্রে ইহাও দেখান হইয়াছে।

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{OB'}=\overline{OC'}=\overline{BA}.$$

অনুরূপে $\mathbf{B}-\mathbf{A}=\overline{AB}.$

2-5. ঐকিক ভেক্টর (Unit Vectors)। ধরা যাক $\overline{OA} \equiv \mathbf{A}$ কোন ভেক্টর। O বিন্দু হইতে OA অভিমুখে A-র একক মান বুঝাইয়া OA_1 রেখাংশ টানা হইল। $\overline{OA}_1 \equiv \mathbf{A}_1$ রাশিটিকে A-র অভিমুখে ঐকিক ভেক্টর বলে। $\mathbf{A}_1$ ব্যবহার করিলে লেখা যায়

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\,\mathbf{A}_1 = A\mathbf{A}_1. \tag{2-5.1}$$

O বিন্দুকে মূলবিন্দু লইয়া সমকোণী অক্ষ OX, OY, OZ ফেলিয়া ঐ তিন অক্ষে যথাক্রমে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ঐকিক ভেক্টর নেওয়া গেল। তাহা হইলে ভেক্টরীয় যোগের নিয়ম অনুসারে লেখা যায়

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}.$$

ঐকিক ভেক্টর $\mathbf{A}_1$-কেও অনুরূপে প্রকাশ করা যায়, কারণ

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k}.$$

A-র দিক্ কোসাইনগুলি λ, μ, ν হইলে, 2-2.4 সমীকরণ অনুসারে

$$\mathbf{A}_1 = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k} = \lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k} \equiv [\lambda, \mu, \nu] \tag{2-5.2}$$

একই নির্দেশতন্ত্রে B A-জাতীয় আর একটি ভেক্টর হইলে

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}) + (B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\,\mathbf{k})$$
$$= (A_x + B_x)\,\mathbf{i} + (A_y + B_y)\,\mathbf{j} + (A_z + B_z)\,\mathbf{k}, \tag{2-5.3}$$

এবং $$\mathbf{A}-\mathbf{B} = (A_x - B_x)\,\mathbf{i} + (A_y - B_y)\,\mathbf{j} + (A_z - B_z)\,\mathbf{k}. \tag{2-5.4}$$

2-6. ভেক্টরের গুণন (Multiplication of vectors)। স্কেলার রাশি দিয়া কোন ভেক্টরকে গুণ করিলে, গুণফল একই দিকে আর একটি ভেক্টরে পরিণত হয়। বেগ ও ভরবেগে এরূপ সম্পর্ক। n স্কেলার রাশি এবং A ভেক্টর হইলে $n\mathbf{A}$ A-অভিমুখে nA মানের ভেক্টর বুঝাইবে। উপাংশে লিখিলে

$$n\mathbf{A} \equiv [nA_x,\ nA_y,\ nA_z]$$

ভেক্টরকে ভেক্টর দিয়া গুণ করিলে 3×3=9টি সংশ্লিষ্ট রাশি পাওয়া যায়। এই নয়টির তিনটিকে লইয়া নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ একটি স্কেলার রাশি গঠন করা যায়। অন্য ছয়টিকে জোড়ায় জোড়ায় তিনটি রাশিতে পরিণত করা যায়। এই রাশি তিনটি কোন ভেক্টরের তিন উপাংশের মত আচরণ করে। প্রথমোক্ত স্কেলার রাশিটিকে আলোচ্য দুই ভেক্টরের স্কেলার

গুণফল (scalar product), এবং শেষোক্ত ভেক্টর রাশিটিকে ভেক্টর দুটির ভেক্টর গুণফল (vector product) বলে। স্কেলার গুণফলকে 'ডট' (dot) গুণফল ও ভেক্টর গুণফলকে 'ক্রস' (cross) গুণফলও বলা হয়, কারণ স্কেলার গুণন বুঝাইতে ডট (●) চিহ্ন ও ভেক্টর গুণন বুঝাইতে ক্রস (×) চিহ্ন ব্যবহৃত হয়।

2-6.1. দুই ভেক্টরের স্কেলার গুণন (Scalar product of two vectors)। মনে কর A ও B ভেক্টর দুটি যথাক্রমে $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ রেখাংশ দিয়া বর্ণিত হইল, এবং উহাদের মধ্যবর্তী $\angle AOB = \theta$। θ কোণের মান 0 হইতে π-এর মধ্যে ধরা হয়। A ও B-এর স্কেলার গুণফল বলিতে $AB \cos \theta$ রাশিটি বুঝায়। সংকেতে লেখা হয়

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = A.B \cos \theta \tag{2-6.1}$$

স্কেলার গুণফল দুই ভেক্টরের মান ও উহাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের গুণফল। তাছাড়া দেখা যায় $B \cos \theta$ রাশিটি A-র উপর B-র প্রক্ষেপ, এবং $A\cos\theta$ B-র উপর A-র প্রক্ষেপ। অতএব বলা হয়

দুই ভেক্টরের স্কেলার বা ডট গুণফল বলিতে একের মান ও উহার উপর অন্যের প্রক্ষেপের গুণফল বুঝায়।

সহজেই দেখা যায়

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{B}.\mathbf{A}$$

কাজেই ডটের দুপাশের রাশি বদলাবদলি করিয়া লিখিলেও গুণফল একই থাকে। এই কারণে স্কেলার গুণফলকে 'ক্রম বিনিময়' (commutative) বলা হয়। গুণফল যে স্কেলার রাশি তাহা বোঝা যায় কারণ A বা B কোনটির মানই গৃহীত নির্দেশতন্ত্রের উপর নির্ভর করে না।

$$\mathbf{A}.(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}.\mathbf{B}+\mathbf{A}.\mathbf{C}$$

হয় বলিয়া স্কেলার গুণন 'বণ্টনের নিয়ম' (distributive law) মানে বলা হয়।

2-6.1 সসমীকরণ হইতে দেখা যায়

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{AB} \tag{2-6.2}$$

A ও B-র অভিমুখে $\mathbf{A}_1$ ও $\mathbf{B}_1$ যথাক্রমে ঐকিক ভেক্টর হইলে A-র উপর B-র প্রক্ষেপ

$$B \cos \theta = \mathbf{B}.\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1.\mathbf{B}$$

এবং B-র উপর A-র প্রক্ষেপ

$$A \cos\theta = \mathbf{A}.\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1.\mathbf{A}$$

কোন ভেক্টর A-র সহিত উহার নিজেরই স্কেলার গুণন ঘটাইলে, লেখা যায়

$$\mathbf{A}.\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = A.A\cos\theta = A^2 \quad (\text{কারণ } \theta = 0°) \qquad (2\text{-}6.3)$$

নির্দেশতন্ত্রের তিন অক্ষের ঐকিক ভেক্টর i, j, k-র জোড়ায় জোড়ায় স্কেলার গুণফল নিম্নরূপ ঃ

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{i}^2 = 1, \ \ \mathbf{j}^2 = 1, \ \ \mathbf{k}^2 = 1 \\ \mathbf{i}.\mathbf{j} = 0, \ \ \mathbf{i}.\mathbf{k} = 0, \ \ \mathbf{j}.\mathbf{k} = 0 \end{array}\right\} \qquad (2\text{-}6.4)$$

(a) সমান্তরাল ও সমকোণী ভেক্টর।

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = AB$$

হইলে $\cos\theta = 1$ এবং $\theta = 0°$। এক্ষেত্রে A ও B সমান্তরাল।

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = 0$$

হইলে (A বা B = 0 না হইলে) $\cos\theta = 0$ এবং $\theta = \pi/2$। এক্ষেত্রে A ও B সমকোণে অবস্থিত।

(b) স্কেলার গুণফল উপাংশে প্রকাশ। স্কেলার গুণন বণ্টনের নিয়ম মানে বলিয়া এবং 2-6.4 সমীকরণের সাহায্য লইয়া পাই

$$\begin{aligned} \mathbf{A}.\mathbf{B} &= (A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}).\ (B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\,\mathbf{k}) \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{aligned} \qquad (2\text{-}6.5)$$

কার্যের সংজ্ঞা হইল $W = Fs\cos\theta$। বল F ও সরণ s ভেক্টর রাশি। অতএব ভেক্টরের ভাষায় লেখা যায়

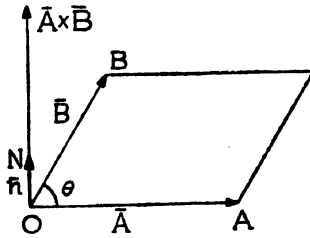
$$W = \mathbf{F}.\mathbf{s} = F_x s_x + F_x s_y + F_z s_z.$$

(c) প্রশ্ন। (1) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ হইলে A ও B-র মধ্যবর্তী কোণ কত? [উত্তর : $\cos\theta = 4/21$]

(2) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ হইলে A-র সহিত নির্দেশতন্ত্রের অক্ষের কোসাইনগুলি কত? [উত্তর : 3/7, −6/7, 2/7]

(3) A ও B-র মধ্যবর্তী কোণ θ ও উহাদের দিক্ কোসাইন যথাক্রমে λ_1, μ_1, ν_1 ও λ_2, μ_2, ν_2 হইলে প্রমাণ কর

$$\cos\theta = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2\ ।$$

2-6.2. দুই ভেক্টরের ভেক্টর গুণন (Vector product of two vectors)। 2.2 চিত্রে $\overline{OA} \equiv \mathbf{A}$ এবং $\overline{OB} \equiv \mathbf{B}$ দুটি ভেক্টর ও উহাদের মধ্যবর্তী কোণ θ $(0 < \theta < \pi)$। AOB তলের অভিলম্বে O বিন্দুতে $\overline{ON} \equiv \mathbf{n}$ ঐকিক ভেক্টর। ডান হাতের বুড়া আঙ্গুল সোজা রাখিয়া অন্য আঙ্গুলগুলি মুঠা করিলে এবং মুঠা করা আঙ্গুলগুলি θ-র মধ্য দিয়া A হইতে B-র দিকে ঘুরিবার অভিমুখ বুঝাইলে, বুড়া আঙ্গুলের মাথা AOB তলের যে দিকে থাকে, ON সেই দিকে টানা হইয়াছে। অন্যভাবে বলা যায়, কোন দক্ষিণ হস্তীয় কর্ক স্ক্রু A হইতে θ-র মধ্য দিয়া B-র দিকে ঘুরাইলে উহার মাথা যে দিকে আগায় ON সেই দিকে টানা।

2.2 চিত্র

অংকন এইভাবে হইয়া থাকিলে A-র সহিত B-র ভেক্টর গুণফল বলিতে $\overline{ON}$ অভিমুখে $AB \sin \theta$ মানের একটি ভেক্টর বুঝায়। সংকেতে লেখা হয়

$$\mathbf{A} \text{ ও } \mathbf{B} \text{ র ভেক্টর গুণফল} \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin \theta)\, \mathbf{n} \qquad (2\text{-}6.6)$$

সহজেই দেখা যায় ভেক্টর গুণফলের মান $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ A ও B বাহু দিয়া গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল। অতএব ভেক্টর গুণফলকে ভেক্টর দুটি দিয়া গঠিত ক্ষেত্রের তলভেক্টর মনে করা যায়। সুতরাং ইহা ছদ্ম বা অক্ষীয় ভেক্টর (2-3 অনুচ্ছেদ)।

$\overline{ON}$-এর অভিমুখ আমরা ইচ্ছামত লইয়াছি ; উহার বিপরীত দিকেও লইতে পারিতাম। দক্ষিণ-হস্তীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করিব বলিয়া আমরা $\overline{ON}$-এর অভিমুখ ঠিক করিতে দক্ষিণ-হস্তীয় বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ সূত্র বা দক্ষিণ-হস্তীয় কর্ক স্ক্রু সূত্র লইয়াছি।

$\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ ভেক্টরের মান $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$-র মানের সমান, কিন্তু, প্রথমটির অভিমুখ দ্বিতীয়টির বিপরীত, কারণ এক্ষেত্রে θ-র মধ্য দিয়া B হইতে A-তে যাইতে হইবে।

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = (BA \sin \theta)\,(-\mathbf{n}) = -(AB \sin \theta)\,\mathbf{n} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{2-6.7}$$

এখানে গুণনের ক্রম স্কেলার গুণনের মত বিনিময় নয়। ভেক্টর দুটি কি ক্রমে নেওয়া হইয়াছে তাহার উপর গুণফলের দিক্ নির্ভর করে। কিন্তু স্কেলার গুণনের মত ভেক্টর গুণন বণ্টনের নিয়ম মানিয়া চলে :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \tag{2-6.8}$$

(a) সমান্তরাল ও সমকোণী ভেক্টর।

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB$$

হইলে $\sin \theta = 1$ এবং $\theta = \pi/2$। এখানে ভেক্টর দুটি সমকোণে অবস্থিত।

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 0$$

হইলে (এবং A বা B 0 না হইলে) $\sin \theta = 0$ এবং $\theta = 0°$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি সমান্তরাল।

নিজের সহিত কোন ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল সর্বদাই শূন্য হইবে কারণ $\theta = 0$।

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0,$$

দক্ষিণ হস্তীয় সমকোণী নির্দেশতন্ত্রের ঐকিক ভেক্টর i, j, k-র জোড়ায় জোড়ায় ভেক্টর গুণফল নিচের মত হইবে :

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0. \\ &\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}\ ;\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}\ ;\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}. \\ &\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}\ ;\ \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}\ ;\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}. \end{aligned}\right\} \tag{2-6.9}$$

দেখা যায় i, j, k-র যে কোন দুইটি এই ক্রম অনুসারে লইলে উহাদের ভেক্টর গুণফল তৃতীয়টির সমান হয়। ক্রম ভাঙ্গিলে একটি বিয়োগ চিহ্ন আসে।

(b) উপাংশে ভেক্টর গুণফল। $\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{B}=B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k}$ হইলে

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\times(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})\\&=A_x\mathbf{i}\times(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})+\text{অনুরূপ দুইটি পদ}\\&=(A_xB_y\mathbf{k}-A_xB_z\mathbf{j})+(-A_yB_x\mathbf{k}+A_yB_z\mathbf{i})+\\&\quad(A_zB_x\mathbf{j}-A_zB_y\mathbf{i})\\&=(A_yB_z-A_zB_y)\mathbf{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\mathbf{j}+\\&\quad(A_xB_y-A_yB_x)\mathbf{k}\end{aligned}\tag{2-6.10}$$

এই সমীকরণটি ডিটারমিনেণ্ট (determinant)-এর আকারে খুব সংক্ষেপে লেখা যায় :

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}\tag{2-6.11}$$

i, j, k-র কথা মনে রাখিয়া ইহা অনেক সময় আরও সংক্ষেপ লেখা হয় :

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\left\|\begin{matrix}A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{matrix}\right\|$$

$$\equiv[A_yB_z-A_zB_y,\ A_zB_x-A_xB_z,\ A_xB_y-A_yB_x]\tag{2.6.12}$$

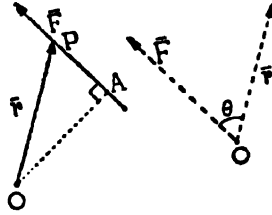
ভেক্টর গুণফলের সংক্ষিপ্ত রূপগুলি মনে রাখা দরকার।

প্রশ্ন। প্রমাণ কর যে (*i*) $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2+(\mathbf{A}.\mathbf{B})^2=|\mathbf{A}|\quad\mathbf{B}|$

(*ii*) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B})=2\mathbf{B}\times\mathbf{A}$.

(c) ভেক্টর গুণন ও ছদ্ম ভেক্টর। মনে রাখা যাইতে পারে যে ভেক্টর গুণনের ফলে যে ভেক্টর পাওয়া যায় তাহা আসলে একটি ছদ্ম ভেক্টর (2.3 দেখ)। $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$ এই সমীকরণ বাম ও দক্ষিণ হস্তীয় উভয় প্রকার তন্ত্রেই প্রযোজ্য। x ও y অক্ষ অপরিবর্তিত রাখিয়া যদি z অক্ষ উল্টামুখ করা যায় তবে দক্ষিণ হস্তীয় নির্দেশতন্ত্র বাম হস্তীয় তন্ত্রে পরিণত হয়। i ও j ভেক্টর দুইটি উভয় তন্ত্রেই এক। কিন্তু উহাদের গুণফল k ভেক্টর দক্ষিণ হস্তীয় তন্ত্রে উপরের দিকে ও বাম হস্তীয় তন্ত্রে নীচের দিকে। অর্থাৎ ভেক্টর গুণনে পাওয়া ভেক্টরের দিক্‌চিহ্ন নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ নয়।

2-6.3. গতিবিজ্ঞানের কয়েকটি ভেক্টর গুণফল। গতিবিজ্ঞান আলোচনায় কয়েকটি রাশি ভেক্টর গুণফল রূপে প্রকাশ করা যায়। প্রাথমিক গতিবিজ্ঞানে ইহাদের যে সংজ্ঞা দেওয়া হয় তাহা হইতে কিভাবে ইহাদের ভেক্টর গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়, তাহা এখানে সংক্ষেপে বলা হইল।

(i) **বলের ভ্রামক।** 2.3 চিত্রে O বিন্দু সাপেক্ষে বল F-এর ভ্রামক $OA \times F$। OA হইল O হইতে F-এর ক্রিয়ারেখার উপর টানা লম্ব। O বিন্দু এবং F-এর ক্রিয়ারেখা দ্বারা নির্ধারিত তলের অভিলম্বে ভ্রামকের অক্ষ। ভ্রামকের উপর দিক হইতে তাকাইলে ঘুরাইবার প্রয়াস বামাবর্তে। এরূপ ভ্রামককে পজিটিভ ধরা হয়।

2.3 চিত্র

উপরের ফল ভেক্টরে প্রকাশ করিতে F-এর ক্রিয়ারেখায় যে কোন P বিন্দু নেওয়া গেল। O-কে মূলবিন্দু এবং P-র স্থান ভেক্টর $\overline{OP} \equiv \mathbf{r}$ ধরা যাক। O বিন্দুতে $\mathbf{F}$ ও $\mathbf{r}$ বুঝাইয়া রেখাংশ টানিলে $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ রাশিটির মান হইবে $rF \sin\theta = OA \times F$। ভেক্টর গুণফলের দিক্ সংক্রান্ত আমাদের গৃহীত (দক্ষিণ হস্ত) নিয়ম অনুসারে $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$-এর পজিটিভ দিক্ হইবে $\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$ তলের অভিলম্বে O হইতে পাঠকের দিকে। ইহাই ভ্রামকের অক্ষ।

$OA = a$, এবং ভ্রামকের অক্ষে $\mathbf{n}$ ঐকিক ভেক্টর হইলে

ভ্রামক $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (rF \sin\theta)\,\mathbf{n} = (aF)\,\mathbf{n}$ (2-6.13)

$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$-এর বদলে $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ লিখিলে ভ্রামকের দিক্ $-\mathbf{n}$ হইয়া যাইবে।

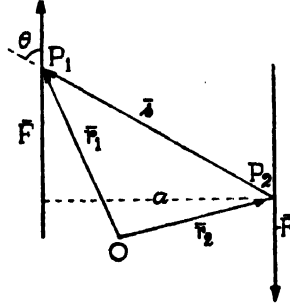
(ii) **দ্বন্দ্বের ভ্রামক।** 2.4 চিত্রে F, $-F$ বল দুটি লইয়া দ্বন্দ্ব গঠিত। P_1 ও P_2 যথাক্রমে উহাদের ক্রিয়ারেখার উপর যে কোন দুইটি বিন্দু। যে কোন মূলবিন্দু O সাপেক্ষে P_1 ও P_2-র স্থানভেক্টর $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$। $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \overline{P_2P_1} = \mathbf{s}$ ধরা যাক। $\mathbf{s}$ ভেক্টরটি মূলবিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না।

বল দুইটির মধ্যে লম্ব দূরত্ব a হইলে, এবং $\mathbf{s}$ ও $\mathbf{F}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ হইলে $a=s\sin\theta$। O সাপেক্ষে বল দুইটির (অর্থাৎ দ্বন্দ্বের) ভ্রামক (বা টর্ক)

$$\mathbf{T}=\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}+\mathbf{r}_2\times(-\mathbf{F})=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\times\mathbf{F}=\mathbf{s}\times\mathbf{F} \tag{2-6.14}$$

ভ্রামকের মান স্থির তাহা সহজেই দেখা যায়, কারণ

$$|\mathbf{s}\times\mathbf{F}|=sF\sin\theta=aF.$$

ভ্রামকের অক্ষ $\mathbf{s}$ ও $\mathbf{F}$, অর্থাৎ $\mathbf{F}$, $-\mathbf{F}$, দ্বারা নির্ধারিত তলের অভিলম্বে। চিত্রে উহার পজিটিভ দিক্ কাগজের তল হইতে নিচের দিকে।

2.4 চিত্র

(iii) **কৌণিক ভরবেগ।** সচল কণার ভরবেগ mv হইলে এবং কোন স্থির বিন্দু O হইতে v-র লম্ব দূরত্ব a হইলে, O সাপেক্ষে কণার কৌণিক ভরবেগ mva। 2.3 চিত্রে F-এর বদলে mv ধরিয়া একই রকম আলোচনায় দেখা যাইবে।

কৌণিক ভরবেগ $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}=(mrv\sin\theta)\mathbf{n}=(mva)\,\mathbf{n}$ (2-6.15)

$\mathbf{L}$-এর দিক্ বলের ভ্রামকের মতই ঠিক করা হয়।

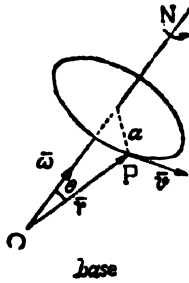
(iv) **ঘূর্ণন্ত কণার রৈখিক ও কৌণিক বেগ।** কোন কণা ON অক্ষে (2.5 চিত্র) ω কৌণিক বেগে ঘুরিতেছে। অক্ষ হইতে উহার দূরত্ব a হইলে কণার রৈখিক বেগ $v=a\omega$। ω ও v-র অভিমুখ চিত্রে দেখান হইয়াছে।

অক্ষের উপর যে কোন O বিন্দুকে মূলবিন্দু নেওয়া যাক। আলোচ্য মুহূর্তে কণা P বিন্দুতে থাকিলে $\overline{OP} \equiv \mathbf{r}$ উহার স্থান ভেক্টর। $\angle NOP = \theta$ হইলে

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \tag{2-6.16}$$

সমীকরণ P বিন্দুতে (অর্থাৎ কণার যে কোন অবস্থানে) v এবং ω-র সম্পর্ক সর্বাংশে (মান ও দিকে) প্রকাশ করে, কারণ

$$|\mathbf{v}| = |\omega \times \mathbf{r}| = \omega r \sin\theta = \omega a$$

এবং $\mathbf{v}$-র দিক্ হইবে ω ও $\mathbf{r}$ দ্বারা নির্ধারিত তলের অভিলম্বে দক্ষিণ হস্তীয় সূত্র অনুসারে।

2.5 চিত্র

2-7. তিনটি ভেক্টরের গুণফল (Triple product of vectors)।

তিনটি ভেক্টরের বিভিন্ন প্রকার গুণফল পাইবার প্রয়াসে উহাদের যতভাবে সাজান যাক, তাহাদের মাত্র তিনটি সজ্জার অর্থ হয়, অন্যগুলির হয় না। ভেক্টর তিনটি **A, B, C** দিয়া প্রকাশ করিলে সার্থক সজ্জা তিনটি হয়

$$(\mathbf{A}.\mathbf{B})\,\mathbf{C},\ \mathbf{A}.(\mathbf{B}\times\mathbf{C}),\ \mathbf{A}\times\mathbf{B}\times\mathbf{C}.$$

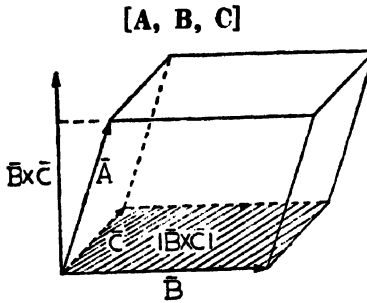
অন্যগুলির উদাহরণ স্বরূপ বলা যায় **A.B.C**-র মত সজ্জা অর্থহীন। (কেন ?)

2-7.1. (**A.B**) **C**-র অর্থ খুব সহজ। **A.B** স্কেলার রাশি। এখানে উহা দিয়া **C**-কে গুণ করা হইয়াছে। লক্ষ্য কর (**B.C**) **A** বা (**A.C**) **B** এবং (**A.B**) **C** এক নয়; ইহারা বিভিন্ন ভেক্টর।

এ প্রকার গুণনের আলাদা কোন নাম নাই, এবং ইহার দরকার খুব কম। অন্য দুইটি গুণন অনেক বেশী দরকারী।

2-7.2. স্কেলার ত্রিধা গুণন A.(B × C) (Scalar triple product)। দুইটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের সহিত তৃতীয় একটি ভেক্টরের স্কেলার গুণনকে স্কেলার ত্রিধা গুণন বলে। এরূপ গুণনে একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায়, কারণ **B × C** ভেক্টর রাশি, এবং ইহার সহিত **A**-র স্কেলার গুণনে গুণফল স্কেলার রাশি হয়।

স্কেলার ত্রিধা গুণন বুঝাইতে নিচের সংকেতটিও ব্যবহার করা হয়। ইহাকে 'Box product'-ও বলে। সংকেতটি হইল

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$$

2.6 চিত্র

ইহার অর্থ **A. (B × C)** বা **B. (C × A)** বা **C. (A × B)**। এ তিনটি রাশি যে সমান তাহা সহজেই বোঝা যায়। **A, B, C** নির্দেশক রেখাংশ দিয়া একটি সমান্তর-ষট্‌ফলক (parallelopiped) গঠন করিলে উহার *BC* তলের ক্ষেত্রফল | **B × C** | এবং আয়তন **A. (B × C)**। **B. (C × A)** বা **C. (A × B)** একই আয়তন প্রকাশ করে।

উপরের গুণফলের সমতা হইতে দেখা যায় স্কেলার ত্রিধা গুণনে ভেক্টর তিনটির ক্রম ঠিক রাখিয়া যে কোন দুইটির মধ্যে ক্রস (cross) চিহ্ন বসান যায়, কারণ **(A × B) .C = A. (B × C)**। ইহা হইতে বলা হয়।

'স্কেলার ত্রিধা গুণনে ডট ও ক্রস বিনিময়'।

লেখার সময় ব্রাকেট চিহ্ন না দিলেও চলে কারণ **A.B × C**-কে **A** ও **B**-র স্কেলার গুণফলের সহিত **C**-র ভেক্টর গুণফল মনে করার কোন অর্থ হয় না।

গুণনে ভেক্টর তিনটির ক্রম ভাঙ্গিলে বিয়োগ চিহ্ন আসে :

$$\mathbf{A.B \times C = -A.C \times B}$$

$$\text{বা} \qquad [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}] = -[\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B}]$$

মনে রাখা ভাল

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}] = \mathbf{A.B \times C = A \times B.C = B.C \times A} \qquad (2\text{-}7.1)$$

স্কেলার ত্রিধা গুণনের গুণফল উপাংশে সহজেই পাওয়া যায়। ইহা ডিটারমিনেন্ট আকারে লেখা খুব সহজ

$$[\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}] = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}7.2)$$

প্রশ্ন। প্রমাণ কর যে

$$[\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}] = -[\mathbf{i},\ \mathbf{k},\ \mathbf{j}] = 1$$

উদাহরণ। ভ্রামক, কৌণিক ভরবেগ ও ঘুরন্ত কণার বেগ ভেক্টর গুণফল রূপে লেখা যায়, ইহা আমরা আগেই দেখিয়াছি। কোন অক্ষে ইহাদের উপাংশ স্কেলার ত্রিধা গুণনের সাহায্যে পাওয়া যায়। ঐ অক্ষে ঐকিক ভেক্টর $\mathbf{a}_1$ হইলে, এই উপাংশ হইবে

ভ্রামকের ক্ষেত্রে $[\mathbf{a}_1,\ \mathbf{r},\ \mathbf{F}] = \mathbf{a}_1.\mathbf{r}\times\mathbf{F}$;

কৌণিক ভরবেগের ক্ষেত্রে $[\mathbf{a}_1,\ \mathbf{r},\ m\mathbf{v}] = \mathbf{a}_1.\mathbf{r}\times m\mathbf{v}$;

ঘুরন্ত কণার বেগের ক্ষেত্রে $[\mathbf{a}_1,\ \omega,\ \mathbf{r}] = \mathbf{a}_1.\omega\times\mathbf{r}$ ।

স্কেলার ত্রিধা গুণনের যে কোন সূত্রই এখানে প্রযোজ্য, অর্থাৎ $\mathbf{a}_1.\mathbf{r}\times\mathbf{F} = \mathbf{a}_1\times\mathbf{r}.\mathbf{F}$ ইত্যাদি।

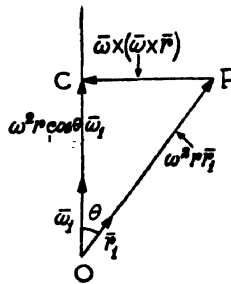
2-7.3. **ভেক্টর ত্রিধা গুণন** $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ **(Vector triple product)**। দুইটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের সহিত অন্য একটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণনকে ভেক্টর ত্রিধা গুণন বলে। গুণফল ভেক্টর রাশি হয়। ভেক্টর ত্রিধা গুণন $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ রূপে লিখিলে গুণফল $\mathbf{B}$ ও $\mathbf{C}$ ভেক্টরের তলে থাকে। $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ ভেক্টর $\mathbf{A}$ ও $\mathbf{B}$-র তলে থাকে। সুতরাং ব্রাকেট কোন্ দুইটি ভেক্টরকে ঘেরিয়া আছে তাহার উপর গুণফল নির্ভর করে। ক্রসের দুই পাশের ভেক্টর বদলাবদলি করিলে, ভেক্টর গুণনে ক্রম বিনিময় নয় বলিয়া, দুই গুণফল বিপরীতমুখী হয়।

ভেক্টরগুলি উপাংশে লইয়া দুইবার ভেক্টর গুণনের নিয়ম প্রয়োগ করিয়া গুণফলগুলি সাজাইলে পাওয়া যায়

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}.\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}.\mathbf{B})\,\mathbf{C} \qquad (2\text{-}7.3)$$

= দ্বিতীয় ভেক্টর (B) গুণন অন্য দুটির স্কেলার গুণফল বিয়োগ ব্রাকেটের অন্য ভেক্টর (C) গুণন বাকী দুটির স্কেলার গুণফল। এই ফল মনে রাখা দরকার। সহজেই দেখা যায়

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = -\mathbf{A}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{C}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}.$$

প্রয়োগ। ভেক্টর ত্রিধা গুণনের সাহায্যে ঘূর্ণনের আলোচনা সহজ হয়। 5-4 অনুচ্ছেদে দেখা যাইবে অভিকেন্দ্র ত্বরণ $\omega\times(\omega\times\mathbf{r})$; 6-1 ও 6-8 অনুচ্ছেদে দেখিব ঘুরন্ত কণার কৌণিক ভরবেগ $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times m(\omega\times\mathbf{r})$। $\omega\times\mathbf{r}$ ভেক্টরটি ω, $\mathbf{r}$ তলের অভিলম্বে; উহা ω এবং $\mathbf{r}$ উভয়ের লম্ব। অতএব ω ও $\mathbf{r}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ হইলে $|\omega\times\mathbf{r}|=\omega r\sin\theta$, এবং $|\omega\times(\omega\times\mathbf{r})|=\omega^2 r\sin\theta$। ইহা ω, $\mathbf{r}$ তলে ω-র অভিলম্বে। অনুরূপে $|\mathbf{r}\times(\omega\times\mathbf{r})|=\omega r^2\sin\theta$ এবং ইহা ω, r তলে $\mathbf{r}$-এর অভিলম্বে।

2.7 চিত্র

2-7.3 সমীকরণ অনুসারে লেখা যায়

$$\omega\times(\omega\times\mathbf{r})=(\omega.\mathbf{r})\omega-(\omega.\omega)\,\mathbf{r}=(\omega^2 r\cos\theta)\,\omega_1-(\omega^2 r)\,\mathbf{r}_1$$

এখানে ω_1 ও $\mathbf{r}_1$ ω ও $\mathbf{r}$-এর অভিমুখে ঐকিক ভেক্টর। 2.7 চিত্র হইতে দেখা যায় $(\omega^2 r\cos\theta)\,\omega_1-(\omega^2 r)\,\mathbf{r}_1=PC$। ইহা ω-র অক্ষ, অর্থাৎ ঘূর্ণাক্ষের অভিলম্বে এবং ইহার মান $\omega^2 r\sin\theta=\omega^2 PC$।

প্রশ্ন। প্রমাণ কর যে $(\omega\times\mathbf{r})^2=\omega.\{\mathbf{r}\times(\omega\times\mathbf{r})\}$

[সংকেত : $\omega\times\mathbf{r}=\mathbf{A}$ ধর। তাহা হইলে নির্ণেয় রাশি $(\omega\times r).A$। এই স্কেলার ত্রিধা গুণনে ক্রম ঠিক রাখিয়া ডট ও ক্রস বিনিময় করিলে পাইব $\omega.\mathbf{r}\times\mathbf{A}$।]

2-8. ভেক্টরের অবকলন (Differentiation of vectors)। কোন ভেক্টর (A) একটি মাত্র স্কেলার চররাশি u-র ফলন (function) হইলে, u সাপেক্ষে A-র অবকল গুণাংক (differential coefficient) স্কেলার অবকলন গণিতের নিয়ম অনুসারেই নির্ণীত হয়। u বাড়িয়া $u+\delta u$

হইলে A (u) যদি A $(u+\delta u)$ হয়, তাহা হইলে u সাপেক্ষ A-র অবকল গুণাংক

$$\frac{d\mathbf{A}}{du}=\lim_{\delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}(u+\delta u)-\mathbf{A}(u)}{\delta u}=\lim_{\delta u\to 0}\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta u} \qquad (2\text{-}8.1)$$

চররাশিটি কাল (t) এবং ভেক্টরটি কণার স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$ হইলে $d\mathbf{r}/dt$, $d^2\mathbf{r}/dt^2$ যথাক্রমে ভেক্টর বেগ ও ভেক্টর ত্বরণ। ইহাদের কথা 3-4 হইতে 3-7 অনুচ্ছেদে আলোচিত হইয়াছে।

2-8.1 সমীকরণে দেওয়া সংজ্ঞার সাহায্যে নিচের ফলগুলি পাওয়া যায় ঃ

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\frac{d\mathbf{A}}{du}+\frac{d\mathbf{B}}{du} \qquad (2\text{-}8.2a)$$

$$\frac{d}{du}(v\mathbf{A})=\frac{dv}{du}\,\mathbf{A}+v\,\frac{d\mathbf{A}}{du} \quad (v \text{ স্কেলার রাশি}) \qquad (2\text{-}8.2b)$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}.\mathbf{B})=\frac{d\mathbf{A}}{du}.\mathbf{B}+\mathbf{A}.\frac{d\mathbf{B}}{du} \qquad (2\text{-}8.2c)$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} \qquad (2\text{-}8.2d)$$

$$\frac{d}{du}\mathbf{A}.(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\frac{d\mathbf{A}}{du}.(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+\mathbf{A}.\frac{d}{du}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \qquad (2\text{-}8.2e)$$

$$=\frac{d\mathbf{A}}{du}.(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+\mathbf{A}.\left(\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}\right)+\mathbf{A}.\left(\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du}\right) \qquad (2\text{-}8.2f)$$

$$\frac{d}{du}\left\{\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\right\}=\frac{d\mathbf{A}}{du}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+\mathbf{A}\times\frac{d}{du}(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

$$=\frac{d\mathbf{A}}{du}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+\mathbf{A}\times\left(\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}\right)+\mathbf{A}\times\left(\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du}\right) \qquad (2\text{-}8.2g)$$

শেষ সমীকরণ তিনটিতে ভেক্টরের ক্রম যেন না বদলায়

প্রশ্ন। (1) $\mathbf{r}(t)$ স্থির মানের ভেক্টর হইলে দেখাও যে $d\mathbf{r}/dt$ $\mathbf{r}$-এর সমকোণে থাকিবে। (বৃত্তপথে আবর্তন মনে কর।)

[সংকেত : $\frac{d}{dt}\mathbf{r}^2 = \frac{d}{dt}\mathbf{r}.\mathbf{r} = 2\mathbf{r}.\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ কারণ r^2 স্থির মান স্কেলার ।]

(2) কোণ কণা বৃত্তপথে সুষম কৌণিক বেগে ঘুরিতেছে। প্রমাণ কর যে

(ক) কণার বেগ $\mathbf{v}$ উহার স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$-এর সমকোণে ;

(খ) কণার ত্বরণ $\mathbf{a}$ বৃত্তের কেন্দ্রাভিমুখী ও r-এর সমানুপাতিক ;

(গ) $\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ ভেক্টরটি স্থির মান।

[সংকেত : $\mathbf{r} = r(\mathbf{i}\cos\omega t + \mathbf{j}\sin\omega t)$ লও। (ক) $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ও $\mathbf{r}.\mathbf{v}$ বাহির কর। শেষের রাশি $=0$। (খ) $d^2\mathbf{r}/dt^2 = d\mathbf{v}/dt$ বাহির কর ; ইহার মান $-\omega^2\mathbf{r}$। (গ) $\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ বাহির কর। দেখা যাইবে ইহা $\omega\mathbf{k}$-র সমান।]

2-8.1 ভেক্টরের অবকল (Differentials of vectors)। স্কেলার অবকলন গণিতে কোন ফলনের অবকল (Differential of a function) যেভাবে নির্ণীত হয়, ভেক্টরের ক্ষেত্রেও তাহা খাটে।

$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ হইলে

$$d\mathbf{A} = dA_x\mathbf{i} + dA_y\mathbf{j} + dA_z\mathbf{k} \tag{2-8.2a}$$

$$d(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = d\mathbf{A}.\mathbf{B} + \mathbf{A}.d\mathbf{B} \tag{2-8.2b}$$

$$d(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = d\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times d\mathbf{B} \tag{2-8.2c}$$

2-8.2. ক্ষেত্রীয় ভেক্টর ও ক্ষেত্রীয় স্কেলার (Field vectors and field scalars)। কোন অঞ্চলে কোন ভেক্টর আলোচ্য বিন্দুর স্থানাংকের ফলন (function) হইলে উহাকে ক্ষেত্রীয় ভেক্টর বলে। বৈদ্যুত, চৌম্বক, মহাকর্ষীয় প্রভৃতি বলক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে আলোচ্য বলের তীব্রতা (intensity) সাধারণতঃ ঐ বিন্দুর স্থানাংকের উপর নির্ভর করে। তীব্রতা ক্ষেত্রীয় ভেক্টর। সমস্ত অঞ্চলে স্থানাংকের স্কেলার ফলনও থাকিতে পারে। উপরোক্ত ক্ষেত্রগুলিতে স্থিতিশক্তি বা বিভব এইরূপ স্কেলার। ইহাদের ক্ষেত্রীয় স্কেলার বলে।

ক্ষেত্রীয় ভেক্টর আলোচ্য বিন্দুর স্থান ভেক্টর $\mathbf{r} \equiv [x, y, z]$-এর উপর নির্ভর করে বলিয়া, এবং x, y, z স্বতন্ত্র (independent) চররাশি হওয়ায় ক্ষেত্রীয় ভেক্টর তিনটি স্কেলার চররাশির ফলন। এরূপ অবস্থায় x, y, z সাপেক্ষে ক্ষেত্রীয় ভেক্টরের আংশিক অবকল গুণাংক (partial derivatives) স্কেলার অবকলন গণিতের মতই গণনা করা হয়।

$\mathbf{A}(x, y, z)$ কোন ক্ষেত্রীয় ভেক্টর হইলে, উহার আংশিক অবকল গুণাংক হইবে

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\mathbf{A}(x+\delta x, y, z)-\mathbf{A}(x, y, z)}{\delta x}, \text{ ইত্যাদি} \qquad (2\text{-}8.3)$$

উচ্চতর আংশিক অবকল গুণাংক ($\partial^2\mathbf{A}/\partial x^2$, ইত্যাদি) স্কেলার গণিতের মতই নির্ণীত হয়।

A-র অবকল (differential) হইবে

$$d\mathbf{A}=\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}dx+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}dy+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}dz \qquad (2\text{-}8.4)$$

নিচের সম্পর্কগুলিও স্কেলারের মত :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}.\mathbf{B})&=\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}.\mathbf{B}+\mathbf{A}.\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})&=\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}8.5)$$

2-9. ভেক্টর অবকলীয় সংকারক 'ডেল' (▽) (The vector differential operator ▽)। $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ সংকারক (operator) গুলি স্কেলার ; স্কেলার রাশির উপর ক্রিয়া করিয়া ইহারা স্কেলারই দেয়, এবং ভেক্টরের উপর ক্রিয়া করিয়া দেয় ভেক্টর। ইহাদের লইয়া একটি ভেক্টর সংকারক গঠিত হইত পারে। উহা হইল

$$\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

এই সংকারকে সংক্ষেপে ▽ চিহ্ন (উচ্চারণ 'ডেল') দিয়া প্রকাশ করা হয়।

$$\nabla\equiv\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (2\text{-}9.1)$$

ডেল কোন ক্ষেত্রীয়স্কেলার ϕ-এর উপর ক্রিয়া করিলে, **i, j, k** থাকার জন্য আংশিক অবকলগুলি ($\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi/\partial z$) কোন ভেক্টরের তিনটি উপাংশ বুঝাইবে। এই ভেক্টরকে ϕ-এর 'গ্রেডিয়েন্ট' (gradient) বলা হয়, এবং সংকেতে উহাকে লেখা হয় grad ϕ বা $\nabla\phi$।

▽ সংকারকটি ভেক্টর রাশির মত আচরণ করে। ক্ষেত্রীয় ভেক্টরের সহিত ইহার স্কেলার ও ভেক্টর গুণনের মত ক্রিয়া হইতে পারে। এগুলি 2-9.2 ও 2-9.3 অনুচ্ছেদে আলোচিত হইয়াছে।

ডেল উপরে বর্ণিত উপায়ে ইচ্ছামত গঠন করা হইয়াছিল ইহা মনে করা ভুল হইবে। উহা নিজ হইতে কিভাবে আসে তাহা নিচে বলা হইল।

2-9.1. ক্ষেত্রীয় স্কেলারের গ্রেডিয়েন্ট (Gradient of a field scalar)। ধরা যাক ϕ কোন ক্ষেত্রীয় স্কেলার, অর্থাৎ উহার মান স্থান ভেক্টর $\mathbf{r} \equiv [x, y, z]$-এর উপর নির্ভর করে। $\mathbf{r}$ এবং $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ স্থানাংকের দুইটি নিকটস্থ বিন্দুতে উহার মান যথাক্রমে $\phi(\mathbf{r})$ ও $\phi(\mathbf{r}+d\mathbf{r})$। $d\mathbf{r}$-এর উপাংশ তিনটি dx, dy, dz হইলে

$$d\phi = \phi(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \qquad (2\text{-}9.2)$$

2-6.5 সমীকরণে আমরা দেখিয়াছি $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$। ইহার সহিত উপরের সমীকরণ তুলনা করিলে, dx, dy, dz একটি ভেক্টরের ($d\mathbf{r}$-এর) উপাংশ বলিয়া $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi\,\partial z$-কে আর একটি ভেক্টরের উপাংশ মনে করা যাইতে পারে। এরূপ করিলে সে ভেক্টরটি হইবে

$$\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

এই ভেক্টরের নাম দেওয়া হইয়াছে ϕ-এর গ্রেডিয়েন্ট বা grad ϕ। অতএব

$$\begin{aligned}\text{grad}\ \phi &\equiv \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\\ &\equiv \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi\\ &\equiv \nabla\phi \end{aligned} \qquad (2\text{-}9\ 3)$$

উপরের অভিন্নতার (identity) তৃতীয় রূপের $\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \equiv \nabla$-কে একটি গাণিতিক সংকারক (mathematical operator) বলিয়া মনে করা যায়। ϕ-এর উপর ক্রিয়া করিয়া উহা দ্বিতীয়রূপে বর্ণিত ভেক্টরটি অর্থাৎ grad ϕ, দেয়। অতএব লেখা যায়

$$d\phi = \text{grad}\ \phi . d\mathbf{r} \equiv \nabla\phi . d\mathbf{r}. \qquad (2\text{-}9.4)$$

ক্ষেত্রের যে সকল বিন্দুতে ϕ-র মান একই তাহারা একটি নির্দিষ্ট তল ব্যাপিয়া থাকে। (বৈদ্যুত, চৌম্বক বা মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে সমবিভব তল এইরূপ তল।) এইরূপ তলে $d\mathbf{r}$ দূরত্বে কাছাকাছি দুইটি বিন্দু লইলে $d\phi = \nabla\phi . d\mathbf{r} = 0$ হইবে। ইহা দ্বারা বুঝায় grad ϕ ভেক্টরটি স্থির-মান ϕ তলের অভিলম্বে। ক্ষেত্রের যে কোন বিন্দুতে grad ϕ-এর

অভিমুখ ইহা হইতেই পাওয়া যায়। আলোচ্য বিন্দু দিয়া যে স্থিরমান ϕ তল গিয়াছে, grad ϕ-এর অভিমুখ ঐ বিন্দুতে তলের অভিলম্বে। তলের লম্ব তলের দুই পাশে টানা যায়। আমাদের grad ϕ-এর অভিমুখ ইহার কোন্ পাশে থাকিবে? সাধারণতঃ ϕ-এর মান যে পাশে কমে, grad ϕ-এর দিক্ সেই দিকে ধরা হয়। এই রেখায় $\mathbf{n}$ ঐকিক ভেক্টর হইলে

$$\text{grad } \phi = \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \mathbf{n} \qquad (2\text{-}9.5)$$

ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে grad ϕ বলিতে ঐ বিন্দুতে দূরত্বের সহিত ϕ কমিবার সর্বোচ্চ হারের মান ও দিক্ বুঝায়।

প্রশ্ন। (1) কোন বলক্ষেত্রে কোন কণাকে বদ্ধপথে ঘুরাইয়া পুনরায় আদি বিন্দুতে আনিলে বল F দ্বারা কৃত কার্যের মোট মান যদি শূন্য হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে $\mathbf{F}$-কে কোন ক্ষেত্রীয় স্কেলার রাশির গ্রেডিয়েণ্ট বলিয়া মনে করা যায়। এইরূপ বলের উদাহরণ দাও।

[সংকেত : 2-10.1 অনুচ্ছেদ দেখ]

(2) $\mathbf{r}$ স্থান ভেক্টর হইলে প্রমাণ কর grad $r = \mathbf{r}/r$।

(3) স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$-এর দিকে $\mathbf{r}_1$ ঐকিক ভেক্টর হইলে দেখাও যে

$$\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr}\mathbf{r}_1 \text{।}$$

$$\left[\text{সংকেত : } \frac{\partial}{\partial x} f(r) = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} ; \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{r} \right]$$

2-9.2. ক্ষেত্রীয় ভেক্টরের ডাইভারজেন্স্ (Divergence of a field vector)। $\mathbf{A}(x, y, z)$ কোন ক্ষেত্রীয় ভেক্টর হইলে উহার উপর ∇-এর 'ডট' গুণনের মত ক্রিয়াতে যে স্কেলার রাশি পাওয়া যায়, তাহাকে $\mathbf{A}$-র 'ডাইভারজেন্স্' বলে। ইহাকে div $\mathbf{A} \equiv \nabla.\mathbf{A}$ লেখা হয়।

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla.\mathbf{A} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right).(\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (2\text{-}9.6)$$

[$\frac{\partial}{\partial x}$ ও A_x-এ গুণন হয় না ; এরূপ গুণন অর্থহীন। $\frac{\partial}{\partial x}$ -এর পরে A_x থাকার অর্থ ধরিতে হইবে $\partial/\partial x$ A_x-এর উপর ক্রিয়া করিবে, অর্থাৎ $\partial A_x/\partial x$ দিবে।]

ডট গুণনে ডটের দুই পাশের ভেক্টর বদলাবদলি করা যায়। কিন্তু ∇ আসল ভেক্টর রাশি নয় এবং সংকারক বলিয়া $\nabla . \mathbf{A}$ ও $\mathbf{A}. \nabla$ এক নয়। $\mathbf{A}. \nabla$-ও একটি সংকারক। ∇-এর ডান দিকের রাশির উপর ∇ ক্রিয়া করিয়া যে ভেক্টর দিবে $\mathbf{A}. \nabla$ হইল সেই ভেক্টর ও A-র স্কেলার গুণফল।

2-9.6 সমীকরণে দেওয়া ডাইভারজেনসের সংজ্ঞা গাণিতিক। উহার সুষ্ঠু একটি জ্যামিতিক সংজ্ঞা 2-11.2 অনুচ্ছেদে বলা হইয়াছে। পদার্থ-বিদ্যা আলোচনায় জ্যামিতিক সংজ্ঞাটিকে মৌলিক ধরায় সুবিধা বেশী।

প্রশ্ন। (1) $\mathbf{r}$ স্থান ভেক্টর হইলে প্রমাণ কর যে $\text{div } \mathbf{r} = 3$।

(2) প্রমাণ কর $\text{div }(\mathbf{r}/r^3) = 0$।

2-9.3. ক্ষেত্রীয় ভেক্টরের কার্ল (Curl of a field vector)। $\mathbf{A}(x, y, z)$ কোন ক্ষেত্রীয় ভেক্টর হইলে, উহার উপর ∇-এর 'ক্রস' গুণনের মত ক্রিয়াতে যে ভেক্টর রাশির সৃষ্টি হয়, তাহাকে A-র 'কার্ল' বলে। ইহাকে $\text{curl } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$ লেখা হয়। ভেক্টর গুণনের 2-6.10 সমীকরণের সাহায্যে লেখা যায়

$$\text{curl } A \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \quad (2\text{-}9.7)$$

কার্লের জ্যামিতিক সংজ্ঞা 2-11.4 অনুচ্ছেদে আলোচিত হইয়াছে।

প্রশ্ন। (1) $\mathbf{r}$ স্থান ভেক্টর হইলে প্রমাণ কর $\text{curl } \mathbf{r} = 0$।

(2) $\mathbf{r}$ স্থান ভেক্টর হইলে যে কোন কেন্দ্রগ বল (central force) $f(r)\,\mathbf{r}$ রূপে লেখা যায়। প্রমাণ কর যে

$$\text{curl} f(r)\,\mathbf{r} = 0 \text{।}$$

[সংকেত : $\text{curl } f(r)\,\mathbf{r} = \nabla \times \{f(r)\,x\,\mathbf{i} + f(r)\,y\,\mathbf{j} + f(r)\,z\,\mathbf{k}\}$

$$\begin{matrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{matrix}$$

(2-6.11 সমীকরণ দেখ)

$$= \left(z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = f'\frac{x}{r}\left(\frac{df}{dr} = f'\right.$ লেখা হইয়াছে $\left.\right)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'\frac{y}{r},\ \frac{\partial f}{\partial z} = f'\frac{z}{r}]$$

∇ সংকারকটি বণ্টনের নিয়ম (dissributive law) মানিয়া চলে ;

$$\nabla\ (\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$$
$$\nabla\ .\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla.\mathbf{A} + \nabla.\mathbf{B}$$
$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}.$$

2-9.4. লাপ্লাসিয়ান সংকারক ∇^2 (The Laplacian operator ∇^2)। $\nabla.\nabla \equiv \nabla^2$ বলিলে কি বুঝাইবে ? উপাংশে ভাঙ্গিয়া লিখিলে দেখা যাইবে

$$\nabla^2 \equiv \nabla.\nabla = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

$\partial/\partial x$-এর উপর $\partial/\partial x$ ক্রিয়া করিলে উহা $\partial^2/\partial x^2$ সংকারকে পরিণত হয়। ∇^2 একটি স্কেলার সংকারক ; উহাকে লাপ্লাসিয়ান সংকারক বা সংক্ষেপে 'লাপ্লাসিয়ান' বলা হয়। তরঙ্গগতি ও অন্যান্য নানা ক্ষেত্রে ইহার বহুল প্রয়োগ হয়। স্কেলারের উপর ক্রিয়া করিয়া ইহা স্কেলার রাশিই দেয়, এবং ভেক্টরের উপর ক্রিয়া করিয়া দেয় ভেক্টর।

2-9.5. ভেক্টরের কার্লের কার্ল। A কোন ভেক্টর হইলে উহার কার্ল $\nabla \times \mathbf{A}$, এবং এই কার্লের কার্ল $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$।

$$\text{curl curl } \mathbf{A} \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

ভেক্টর ত্রিধা গুণনের 2-7.3 সূত্র এখানে প্রয়োগ করিলে লেখা যায়

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla.\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\nabla.\nabla)$$

$\nabla.\mathbf{A} \equiv \text{div } \mathbf{A}$; অতএব উপরের ডান দিকের প্রথম পদটি grad div **A**। দ্বিতীয় পদ যেভাবে লেখা আছে, তাহাতে উহা সংকারক হয় কারণ $\nabla.\nabla = \nabla^2$। ∇^2 আগে লিখিয়া পরে **A** লিখিলে ইহার অর্থ হয়, কারণ $\nabla^2\mathbf{A}$ **A**-র লাপ্লাসিয়ান। এইভাবে লেখা যায়

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} \qquad (2\text{-}9.8)$$

উপরের যুক্তিটি খুব জোরাল মনে না হইতে পারে, কিন্তু $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$-কে উপাংশে ভাঙ্গিয়া ভেক্টর গুণনের নিয়ম অনুসারে সরল করিলে এই ফলই পাওয়া যায়। ত্রিধা গুণনের সূত্রের সাহায্যে ফলটি সহজে লেখা যায়।

প্রশ্ন। (1) প্রমাণ কর যে curl grad $\phi = 0$।

[সংকেত : নির্ণেয় রাশি $\nabla \times \text{grad}\ \phi$। ∇ ও grad ϕ-কে উপাংশে ভাঙ্গিয়া ক্রস গুণনের 2-6.10 সূত্র অনুসারে গুণ কর। গুণফলে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$-র গুণকগুলি প্রত্যেকটি শূন্য হইবে।]

(2) দেখাও যে div curl $\mathbf{A} = 0$।

[সংকেত : div curl $\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(\text{curl}\ \mathbf{A})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\text{curl}\ \mathbf{A})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\text{curl}\ \mathbf{A})_z$। ইহাতে curl $\mathbf{A}$-র x, y, z উপাংশগুলি বসাইয়া সরল কর।]

(3) $\mathbf{r}$ স্থান ভেক্টর হইলে প্রমাণ কর

(ক) $\nabla^2 (1/r) = 0$;

(খ) div $(\mathbf{r}/r^3) = 0$;

(গ) curl $(\mathbf{r}/r^3) = 0$;

(4) ω স্থানাংকের উপর নির্ভর না করিলে এবং $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ হইলে দেখাও $\omega = \frac{1}{2}$ curl $\mathbf{v}$।

[সংকেত : $\omega \times \mathbf{r}$ ভাঙ্গিয়া v_x, v_y, v_z বাহির কর। curl $\mathbf{v}$ ভাঙ্গিয়া তাহাতে v_x, v_y, v_z-এর এই মানগুলি বসাও।]

2-10. **ভেক্টরের সমাকলন (Integration of vectors)**। ভেক্টরের সাধারণ সমাকলন স্কেলার রাশির মতই হয়। $\mathbf{A}(u) = \mathbf{i}A_x(u) + \mathbf{j}A_y(u) + \mathbf{k}A_z(u)$ ভেক্টরটি একটি মাত্র স্কেলার চররাশি u-র ফলন হইলে

$$\int \mathbf{A}(u)\,du = \mathbf{i}\int A_x(u)du + \mathbf{j}\int A_y(u)du + \mathbf{k}\int A_z(u)\,du \qquad (2\text{-}10.1)$$

হইবে। ইহাকে $\mathbf{A}(u)$-র 'অনিশ্চিত সমাকল' (Indefinite integral) বলে। যদি এমন কোন ভেক্টর $\mathbf{B}(u)$ থাকে u সাপেক্ষে যাহার অবকল

গুণাংক $\mathbf{A}(u)$-র সমান, অর্থাৎ যদি $\mathbf{A}(u)=d\mathbf{B}(u)/du$ হয়, তাহা হইলে

$$\int \mathbf{A}(u)\,du=\mathbf{B}(u)+\mathbf{C}$$

হইবে। এখানে $\mathbf{C}$ u-নিরপেক্ষ স্বৈচ্ছিক কোন ভেক্টর। এরূপ ক্ষেত্রে $u=a$ হইতে $u=b$ সীমার মধ্যে $\mathbf{A}(u)$-র 'নিশ্চিত সমাকল' (Definite integral) হইবে

$$\int_a^b \mathbf{A}(u)\,du=\int_a^b \frac{d\mathbf{B}(u)}{du}\,du \quad \mathbf{B}(u)+\mathbf{C} \quad =\mathbf{B}(b)-\mathbf{B}(a).$$

2-10.1. ভেক্টরের রেখা সমাকল (Line integral of a vector)। মনে কর $\mathbf{A}$ কোন ক্ষেত্রীয় ভেক্টর, s ঐ ক্ষেত্রে কোন বক্ররেখা, P ঐ রেখায় স্বৈচ্ছিক কোন আদি বিন্দু এবং P' স্বৈচ্ছিক প্রান্তবিন্দু। এরূপ হইলে

$$\int_P^{P'} \mathbf{A}.d\mathbf{s}$$

রূপী নিশ্চিত সমাকলকে s বক্রে P হইতে P' পর্যন্ত A-র রেখা সমাকল বলে। $d\mathbf{s}$ বলিতে s বক্রের কোন বিন্দুতে s-এর স্পর্শক অভিমুখী অনন্ত ক্ষুদ্র একটি ভেক্টর বুঝায়। $\mathbf{A}.d\mathbf{s}$ হইল $\mathbf{A}$ ও $d\mathbf{s}$-এর স্কেলার গুণফল। $\mathbf{A}$ ও $d\mathbf{s}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ হইলে $d\mathbf{s}$-এর অভিমুখে $\mathbf{A}$-র প্রক্ষেপ $A\cos\theta$ এবং $\mathbf{A}.d\mathbf{s}=A\,ds\cos\theta$। $d\mathbf{s}$-এর উপাংশ $dx,\ dy,\ dz$ হইলে $\mathbf{A}\,d\mathbf{s}=A_x dx+A_y dy+A_z dz$। অতএব লেখা যায়

$$\int_P^{P'} \mathbf{A}\,d\mathbf{s}=\int_P^{P'} A\cos\theta\,ds=\int_P^{P'}(A_x\,dx+A_y\,dy+A_z\,dz) \tag{2.10.2}$$

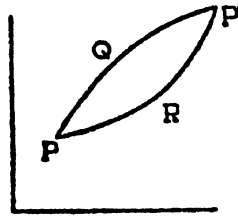
স্পষ্টতঃ দেখা যায়, ভেক্টরের রেখা সমাকল স্কেলার রাশি। বল $\mathbf{F}$ দ্বারা কৃত কার্য $\mathbf{F}.d\mathbf{s}$। s-এর উপরস্থ কোন বিন্দুর স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$ হইলে $d\mathbf{s}=d\mathbf{r}$-ও বটে। অতএব P ও P' বিন্দুর মধ্যে $\mathbf{F}$ দ্বারা কৃত কার্য

$$W=\int_P^{P'}\mathbf{F}.d\mathbf{s}=\int_P^{P'}\mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

F-এর মান r-এর ফলনরূপে জানা থাকিলে দ্বিতীয় রূপটি কাজের পক্ষে সুবিধার।

বদ্ধ রেখা সমাকল (Closed line integral)। কখন কখন কোন বদ্ধরেখায় রেখা সমাকল লইতে হয়। ইহার অর্থ আদি বিন্দু P-কে স্থির রাখিয়া P' বিন্দুকে বদ্ধ বক্রে চলিতে দিয়া একেবারে P-তে ফিরাইয়া আনা। বদ্ধ রেখা-সমাকল বুঝাইতে $\oint$ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। বদ্ধ রেখা-সমাকল $\oint$ $\mathbf{A}.d\mathbf{s}$-কে প্রদত্ত বদ্ধরেখায় $\mathbf{A}$-র 'পরিসঞ্চরণ' বা circulation-ও বলে।

সংরক্ষী বলক্ষেত্রে যে কোন বদ্ধ বক্রে বলের রেখা-সমাকলের মান শূন্য, অর্থাৎ $\oint \mathbf{F}.\mathbf{dr}=0$। এই সম্পর্ক সংরক্ষী বলের সংজ্ঞা হিসাবে নেওয়া যায় (3-12 অনুচ্ছেদ দেখ)।

বদ্ধ রেখা-সমাকল ও গ্রেডিয়েন্ট। কোন ভেক্টর $\mathbf{A}$-র বদ্ধ রেখা-সমাকলের মান শূন্য হইলে উহাকে কোন ক্ষেত্রীয় স্কেলার ϕ-এর গ্রেডিয়েন্ট বলিয়া মনে করা যায়। ইহা প্রমাণ করিতে ক্ষেত্রের দুইটি বিন্দু

2.8 চিত্র

P, P'-কে (2.8 চিত্র) যে কোন দুইটি রেখা PQP' ও PRP' দিয়া যোগ কর। তাহা হইলে $PQP'RP$ বদ্ধ বক্রে $\mathbf{A}$-র রেখা সমাকল শূন্য বলিয়া

$$0=\oint \mathbf{A}.d\mathbf{r}=\int_{PQP'} \mathbf{A}.d\mathbf{r}+\int_{P'RP} \mathbf{A}.d\mathbf{r}=\int_{PQP'} \mathbf{A}.d\mathbf{r}-\int_{PRP'} \mathbf{A}.d\mathbf{r}$$

$$\text{বা} \quad \int_{PQP'} \mathbf{A}.d\mathbf{r}=\int_{PRP'} \mathbf{A}.d\mathbf{r}$$

ইহার অর্থ P হইতে P' পর্যন্ত $\mathbf{A}$-র রেখা-সমাকল পথের উপর নির্ভর করে না। এ অবস্থায় রেখা-সমাকলের মান কেবলমাত্র আদি বিন্দু P ও প্রান্তবিন্দু P'-এর অবস্থান (অর্থাৎ উহাদের স্থানাংক) দিয়াই নির্ণীত হইবে।

অতএব লেখা যায়

$$\int_{P}^{P'} \mathbf{A}.d\mathbf{r} = \phi_{P'} - \phi_{P}$$

ϕ অবশ্যই ক্ষেত্রীয় কোন স্কেলার রাশি।

P ও P' বিন্দু দুইটি খুব কাছাকাছি নিলে 2-9.4 সমীকরণ অনুসারে লেখা যায়

$$\mathbf{A}.d\mathbf{r} = d\,\phi = \text{grad}\,\phi.d\mathbf{r}$$

বা $(\mathbf{A} - \text{grad}\,\phi).d\mathbf{r} = 0.$

যে কোন দিক্ সম্বন্ধেই ইহা সত্য বলিয়া $\mathbf{A} - \text{grad}\,\phi = 0$ হইতে হইবে,

অতএব $\mathbf{A} = \text{grad}\,\phi.$

2-10.2. পৃষ্ঠ বা তল সমাকল : ভেক্টরের ফ্লাক্স্ (Surface integrals : Flux of a vector)। কোন ক্ষেত্রীয় ভেক্টর A-র ক্ষেত্রে ইচ্ছামত কোন সীমাবদ্ধ পৃষ্ঠ S নেওয়া হইল। S-এর আকার যে কোন রকম হইতে পারে। S-কে অসংখ্য অনন্ত ক্ষুদ্র dS অংশে ভাগ করিলে ইহার যে কোন dS-কে 2-2 অনুচ্ছেদের (6) অংশে বর্ণিত উপায়ে ভেক্টর বলিয়া মনে করা যায়। A ও $d\mathbf{S}$-ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ θ হইলে $\mathbf{A}.d\mathbf{S} = A\cos\theta\, dS$ রাশিটিকে dS তল ভেদ করিয়া A-র 'ফ্লাক্স্' (Flux) বলে। সম্পূর্ণ S তলের উপর নেওয়া নিম্নলিখিত নিশ্চিত সমাকলটিকে 'S-তল ভেদ করিয়া A-র ফ্লাক্স্' বলে :

$$\text{ফ্লাক্স্} = \int_S \mathbf{A}.d\mathbf{S} \tag{2-10.3}$$

এ জাতীয় সমাকলকে 'পৃষ্ঠ-সমাকল' বা 'তল সমাকল' (surface integral) বলে। ইহা একাধিক উপায়ে লেখা যায়। $d\mathbf{S}$ অভিমুখে $\mathbf{n}$ ঐকিক ভেক্টর, $\mathbf{n}$ ও A-র মধ্যবর্তী কোণ θ এবং $\mathbf{n}$-এর অভিমুখে A-র অভিক্ষেপ $A\cos\theta = A_n$ হইলে লেখা যায়

$$\int_S \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A}.\mathbf{n}dS = \int_S A\cos\theta\, dS = \int_S A_n dS \tag{2-10.4}$$

কোন কোন ক্ষেত্রে আলোচ্য S পৃষ্ঠ কোন আয়তনকে সম্পূর্ণ ঘেরিয়া রাখে। এরূপ পৃষ্ঠকে 'বদ্ধপৃষ্ঠ' (closed surface) বলে। বদ্ধপৃষ্ঠে

dS-এর বহির্মুখী লম্বকে সাধারণতঃ পজিটিভ ধরা হয় : উহাই $d\mathbf{S}$-এর দিক্‌। (কোথাও কোথাও ইহার বিপরীত বিধি দেখা যায় ; কাজেই $d\mathbf{S}$-কে কোন্‌ দিকে পজিটিভ ধরা হইয়াছে তাহা লক্ষ্য করা দরকার ।)

কার্টেজীয় উপাংশে লিখিলে

$$\int_S \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \int_S (A_x dS_x + A_y dS_y + A_z dS_z)$$

$$= \iint_S (A_x dydz + A_y dzdx + A_z dxdy) \quad (2\text{-}10.5)$$

(কোন অক্ষে $d\mathbf{S}$-এর উপাংশ বলিতে ঐ অক্ষের লম্বতলে $d\mathbf{S}$-এর প্রক্ষেপ বুঝায় । অতএব $dS_x = dydz$, ইত্যাদি ।)

2-10.5 সমীকরণ হইতে দেখা যায় পৃষ্ঠ-সমাকল আসলে দ্বি-সমাকল (double integral)। সমাকলনের সীমাগুলি নির্দেশতন্ত্রের yz, zx ও xy তলে S-এর প্রক্ষেপ দিয়া নির্ধারিত হয় ।

ফ্লাক্‌স্‌ নামক রাশিটি পদার্থবিদ্যার অনেক ক্ষেত্রেই বিশেষ মূল্যবান। কোন তল ভেদ করিয়া কোন ভেক্টরের ফ্লাক্‌স্‌ বলিতে $\int_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}$ রাশিটি বুঝায় । প্রবহমান তরলের ক্ষেত্রে S তল ভেদ করিয়া উহার বেগ ভেক্টর $\mathbf{v}$-র ফ্লাক্‌স্‌, ঐ তল অতিক্রম করিয়া প্রতি সেকেণ্ডে যে আয়তন তরল যায় তাহার সমান। চৌম্বক ও বৈদ্যুত ক্ষেত্রে কোন তল ভেদ করিয়া ক্ষেত্রীয় তীব্রতার ফ্লাক্‌স্‌ ঐ তল অতিক্রম করিয়া মোট যে বলরেখাগুলি যায় তাহার সমান। কিন্তু অনেক ক্ষেত্রেই ভেক্টরের ফ্লাক্‌স্‌কে সহজ কোন কল্পনের (concept) সহিত মিলাইয়া নেওয়া যায় না। কাজেই এরূপ চেষ্টা না করিয়া ফ্লাক্‌স্‌কে 2-10.3 সমীকরণে দেওয়া অর্থে ভাবাই ভাল।

2-10.3. আয়তন সমাকল (Volume integral)। মনে কর ϕ কোন ক্ষেত্রীয় স্কেলার, $\mathbf{A}$ ক্ষেত্রীয় ভেক্টর এবং $dV = dxdydz$ ঐ ক্ষেত্রে অনন্ত ক্ষুদ্র কোন আয়তন। ক্ষেত্রের কোন নির্দিষ্ট আয়তন V ব্যাপিয়া

$$\int_V \phi dv \quad \text{বা} \quad \int_V \mathbf{A} dv$$

-রূপী নিশ্চিত সমাকল দুটিকে যথাক্রমে ϕ ও $\mathbf{A}$-র আয়তন সমাকল বলে। প্রথমটি স্কেলার ও দ্বিতীয়টি ভেক্টর। আয়তন সমাকলগুলি ত্রি-সমাকল (triple integral)। অর্থ বুঝিবার অসুবিধা না থাকিলে তিনবার সমাকলন চিহ্ন দেওয়া হয় না।

2-11. ডাইভারজেন্‌স্‌ সূত্র ও স্টোক্‌স্‌ সূত্র (Divergence theorem and Stokes' theorem)। বিশেষ্‌ অবস্থায় আয়তন সমাকলকে পৃষ্ঠ সমাকলে, বা পৃষ্ঠ সমাকলকে আয়তন সমাকলে পরিণত করা যায়। যে অবস্থায় ইহা সম্ভব তাহাকে ডাইভারজেন্‌স্‌ সূত্র বলে।

আবার, অবস্থা বিশেষে পৃষ্ঠ সমাকলকে রেখা সমাকলে, বা রেখা সমাকলকে পৃষ্ঠ সমাকলে পরিণত করা যায়। ইহা স্টোক্‌স্‌ সূত্রের অন্তর্গত। ভেক্টরীয় বিশ্লেষণে (Vector analysis) সূত্র দুটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ।

সূত্র দুটির প্রয়োগ বুঝিতে পাঠকের অসুবিধা না হয়, আমরা এরূপ কিছু আলোচনা করিব, কিন্তু উহাদের প্রমাণ দেখাইব না।

2-11.1. ডাইভারজেন্‌স্‌ সূত্র। এ সূত্রে বলে 'কোন ক্ষেত্রীয় ভেক্টর A-র নিজ ক্ষেত্রে স্বৈচ্ছিক কোন আয়তন V ব্যাপিয়া উহার ডাইভারজেন্‌সের আয়তন সমাকল লইলে উহা, ঐ আয়তনের বদ্ধ পৃষ্ঠ S-এ A-র পৃষ্ঠ সমাকলের (অর্থাৎ বদ্ধ পৃষ্ঠ S ভেদ করিয়া A-র ফ্লাক্‌সের) সমান হইবে।'

সূত্রটি সংকেতে নানাভাবে লেখা যায়। নিচে দুইটি রূপ দেওয়া হইল ঃ

$$\int_V (\nabla.\mathbf{A})\, dv = \int_S \mathbf{A}.d\mathbf{S} \qquad (2\text{-}11.1a)$$

বা $$\iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

$$= \iint_S (A_x\, dS_x + A_y\, dS_y + A_z\, dS_z)$$

$$= \iint_S (A_x\, dydz + A_y\, dzdx + A_z\, dxdy) \qquad (2\text{-}11.1b)$$

কেহ কেহ সমীকরণের ভেক্টর রূপটিকে ডাইভারজেন্‌স্‌ সূত্র ও কার্টেজীয় রূপটিকে গাউসের সূত্র (Gauss' theorem) বলেন। আয়তন সমাকল V ব্যাপিয়া ও পৃষ্ঠ সমাকল V-কে ঘেরা বদ্ধপৃষ্ঠ S ব্যাপিয়া লইতে হইবে। পৃষ্ঠ সমাকলের মান বাহির করিতে dS হইতে V-র বাহিরের দিকে টানা লম্বের দিক্‌কে পজিটিভ ধরা হয়। (ইহার বিপরীত করিলে একদিকে বিয়োগ চিহ্ন আসিবে।)

2-11.2. ভেক্টরের ডাইভারজেনসের জ্যামিতিক সংজ্ঞা। ইতিপূর্বে 2-9.2 অনুচ্ছেদে আমরা ভেক্টর সংকারক ডেল্-এর সাহায্যে ডাইভারজেনসের সংজ্ঞা দিয়াছি। সদ্য বর্ণিত ডাইভারজেন্স্ সূত্রের সাহায্যে ডাইভারজেনসের সুষ্ঠু একটি জ্যামিতিক সংজ্ঞা দেওয়া যায়। বলা যায়

'কোন অঞ্চলে কোন ক্ষেত্রীয় ভেক্টর A থাকিলে, এবং ঐ অঞ্চলের কোন বিন্দু P-কে ঘেরিয়া ক্ষুদ্র আয়তন V-র বদ্ধপৃষ্ঠ S হইলে

$$\lim_{V\to 0,\ S\to 0} \frac{\int_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{V}$$

রাশিটিকে P বিন্দুতে A-র ডাইভারজেন্স্ বলে।'

2-10.2 অনুচ্ছেদের সংজ্ঞা অনুসারে $\int_S \mathbf{A}.dS$ রাশিটি বদ্ধপৃষ্ঠ S ভেদ করিয়া A-র ফ্লাক্স্। অতএব ভাষায় বলা যায়

'ভেক্টর ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে ঐ ভেক্টরের ডাইভারজেন্স্ বলিতে ঐ বিন্দু ঘেরিয়া অনন্ত ক্ষুদ্র পৃষ্ঠে ভেক্টরের ফ্লাক্স্ এবং ঐ পৃষ্ঠে ঘেরা আয়তনের সীমান্ত অনুপাত (limiting ratio) বুঝায়।'

সংক্ষেপে বলা যায় ডাইভারজেন্স্ হইল প্রতি একক আয়তনে ফ্লাক্সের সীমান্ত মান। আয়তন কমিয়া শূন্য সীমায় যাইতে থাকিলে মোট ফ্লাক্স্ ও আয়তনের অনুপাতের যে মান হয় তাহাই সীমান্ত মান। এইভাবে সীমান্ত মান লইলে দেখা যায়

সীমান্ত ফ্লাক্স্ $dF = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dxdydz.$

(7.9 চিত্রে f-এর বদলে A ধরিয়া ঐ স্থানের আলোচনা দেখ।)

অতএব dF ও dV-র সীমান্ত অনুপাত

$$= \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \nabla.\mathbf{A} \qquad (2\text{-}11.2)$$

এই অনুচ্ছেদের গোড়ায় দেওয়া ডাইভারজেনসের সংজ্ঞাকেই মূল সংজ্ঞা ধরা হয়। উহা হইতেই div $\mathbf{A} = \nabla.\mathbf{A}$ রূপী গাণিতিক সংজ্ঞাটি আসে।

মনে কর A ভেক্টরের ক্ষেত্রে কোন P বিন্দু ঘেরিয়া স্বল্পাংশ আয়তন V নেওয়া গেল। এই আয়তনের পৃষ্ঠ S। তাহা হইলে

$$\int \frac{\mathbf{A}.d\mathbf{S}}{V}$$

রাশিটি S ভেদ করিয়া প্রতি একক আয়তনে A-র ফ্লাক্স্। P-তে div A পজিটিভ হইলে ফ্লাক্স্ বহির্মুখী, নিগেটিভ হইলে অন্তর্মুখী। ফ্লাক্স্ P হইতে নির্গত হইলে P-কে 'উদ্গম' (Source) বলা হয়, এবং ফ্লাক্স্ P-মুখী হইলে (div A নিগেটিভ) P-কে বলা হয় 'অভিগম' (Sink)। ক্ষেত্রে উদ্গম বা অভিগম না থাকিলে div $\mathbf{A}=0$ হইবে। এরূপ হইলে A-কে 'সলিনয়ডাল' (solenoidal) ভেক্টর বলে।

2-11.3 স্টোক্স্ সূত্র। 'A ভেক্টরের ক্ষেত্রে কোন বদ্ধরেখা C নিলে এবং ঐ C রেখা দিয়া সীমাবদ্ধ যে কোন আকারের একটি পৃষ্ঠ S কল্পনা করিলে, S ভেদ করিয়া curl A-র ফ্লাক্স্ C বদ্ধবক্রে A-র বদ্ধরেখা সমাকলের সমান হইবে।' ইহাই স্টোক্স্ সূত্র।

$$\int_S \text{curl } \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}.d\mathbf{s} \qquad (2\text{-}11.3)$$

সমীকরণের বাঁ দিক পৃষ্ঠ সমাকল বা দ্বি-সমাকল (double integral) ও ডান দিক রেখা সমাকল। C বক্র যে আবর্তে বর্ণিত হইয়াছে dS-এর সীমা-রেখাও সেই আবর্তে নিয়া dS ভেক্টরের পজিটিভ দিক ঠিক করিতে হইবে (2-2(6) অনুচ্ছেদ দেখ)। C বক্র বা S পৃষ্ঠ সমতল হইতে হইবে এমন কোন কথা নাই ; উহাদের যে কোনভাবে নেওয়া যায়। কিন্তু C বক্র অবশ্যই S পৃষ্ঠের সীমারেখা হইতে হইবে।

dS অভিমুখে n ঐকিক ভেক্টর, curl A ও n-এর মধ্যবর্তী কোণ θ এবং n-এর উপর curl A-এর প্রক্ষেপ $(\text{curl } \mathbf{A})_n$ হইলে লেখা যায়

$$\oint_C \mathbf{A}.d\mathbf{s} = \int_S \text{curl } \mathbf{A}\, d\mathbf{S} = \int_S \text{curl } \mathbf{A}.\mathbf{n}dS = \int_S (\text{curl } \mathbf{A})_n dS \qquad (2\text{-}11.4)$$

2-11.4. ভেক্টরের কার্ল। স্টোক্স্ সূত্রের সাহায্যে কোন ভেক্টরের কার্লের জ্যামিতিক সংজ্ঞা দেওয়া যায়। উপরের শেষ সমীকরণ হইতে লেখা যায়

$$(\text{curl } \mathbf{A})_n = \lim_{C\to 0,\, S\to 0} \frac{\oint_C \mathbf{A}.d\mathbf{s}}{S}$$

'A ভেক্টরের ক্ষেত্রে কোন বিন্দু P-কে নিজতলে রাখিয়া ক্ষুদ্রাংশে সমতল পৃষ্ঠ S কল্পনা করিলে, S-এর সীমারেখা C বদ্ধ বক্রে A-র রেখা সমাকলের

সহিত S-এর সীমান্ত অনুপাত P বিন্দুতে S-এর পজিটিভ লম্বের অভিমুখে curl A-র উপাংশের সমান হইবে।' স্বল্পাংশ পৃষ্ঠ S-এর দিক্-বিন্যাস বদলাইয়া রেখা সমাকলের মান চরম করিলে P বিন্দুতে curl A S-এর এই অবস্থানের পজিটিভ লম্বাভিমুখী হইবে এবং উহার মান রেখা-সমাকলের সহিত S-এর অনুপাতের সীমান্ত মানের সমান হইবে। সীমান্ত অনুপাত পাইতে S-কে ক্রমশঃ ছোট করিতে হইবে। দেখা যায়, কোন দিকে কার্লের উপাংশ বলিতে ঐ দিকের অভিলম্বে প্রতি একক ক্ষেত্রে (per unit area) বদ্ধরেখা সমাকলের সীমান্ত মান বুঝায়। তলের লম্ব যেদিকে লইলে এই সীমান্ত মান চরম হয়, curl A সেই দিকে।

কোন বিন্দুতে কোন ভেক্টরের কার্ল দ্বারা ঐ বিন্দুর চারদিকে ভেক্টরটি কতটা ঘোরে তাহা বুঝায়। বিদ্যুৎধারাবাহী কোন পরিবাহীর কাছে মুক্ত চৌম্বক মেরু থাকিলে উহা পরিবাহীর চারদিকে ঘুরিবে। H চৌম্বক বলক্ষেত্রের তীব্রতা হইলে $\mathbf{H}.d\mathbf{s}$ রেখা সমাকলের মান শূন্য হইবে না। অতএব curl H-ও শূন্যমান হইবে না। স্থির বৈদ্যুত ক্ষেত্রে $\oint \mathbf{E}.d\mathbf{s}=0$; অতএব curl $\mathbf{E}=0$।

কোন ভেক্টরের বদ্ধরেখা সমাকলের মান সর্বথা শূন্য হইলে উহার কার্ল$=0$ হইবে। সংরক্ষী বলক্ষেত্রে $\oint \mathbf{F}.d\mathbf{r}=0$ হওয়ায়, কার্লের উপরে আলোচিত সংজ্ঞা অনুসারে curl $\mathbf{F}=0$ হইবে। এই সম্পর্কও সংরক্ষী বলের সংজ্ঞা হিসাবে ধরা যায়।

* **2-12. ভেক্টর ও টেনসর।** ভেক্টর আলোচনা করিতে আমরা ত্রিমাত্রিক সমকোণী অক্ষ যেভাবে ইচ্ছা লইয়াছি। আমাদের আলোচ্য ভেক্টরগুলি সবই ভৌত রাশি ; উহাদের মান ও দিক্ স্থির এবং অক্ষ পরিবর্তনে উহাদের মান বা দিক্ বদলায় না, কিন্তু উপাংশগুলির পরিবর্তন হয়। একই ভেক্টর A-কে পরস্পর আনত (inclined) দুটি নির্দেশতন্ত্র $OXYZ$ এবং $OX'Y'Z'$-এ উপাংশে প্রকাশ করিলে, প্রথমতন্ত্রে $\mathbf{A}=\mathbf{i}A_1+\mathbf{j}A_2+\mathbf{k}A_3$ এবং দ্বিতীয় তন্ত্রে $\mathbf{A}=\mathbf{i}'A'_1+\mathbf{j}'A'_2+\mathbf{k}'A'_3$ হইবে। 1, 2, 3 দিয়া যথাক্রমে x, y, z অক্ষ বুঝান হইতেছে। ভেক্টরের মান স্থির বলিয়া পাইব

$$A^2=A_1^2+A_2^2+A_3^2=A'^2_1+A'^2_2+A'^2_3$$

এই সম্পর্ক থাকিতে হইলে A_i এবং A'_i $(i=1, 2, 3)$ উপাংশগুলির মধ্যে সম্পর্ক কি হইবে? সহজেই বোঝা যায় এক সমকোণী নির্দেশতন্ত্র সাপেক্ষে দ্বিতীয় একটি সমকোণী তন্ত্র ঘুরান (rotated) থাকিলে দুই

তন্ত্রে x_i ও x' রাশিগুলির মধ্যে যে সম্পর্ক হয় A_i ও A'_i গুলিতেও সেই সম্পর্ক। কোঅর্ডিনেট জিওমেট্রির বইতে এই সম্পর্ক স্থাপনা দেখান হয়। মনে কর a_{ij} দ্বারা দ্বিতীয় নির্দেশতন্ত্রের i অক্ষের সহিত প্রথম তন্ত্রের j অক্ষের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইন বুঝায় (অর্থাৎ a_{23} বলিতে $\cos Y'OZ$ বুঝায়, ইত্যাদি)। এই প্রকার সংকেত ব্যবহার করিয়া A_i হইতে A'_i পাওয়া বা A'_i হইতে A_i পাওয়ার সম্পর্ক নিচের মত লেখা যায় :

	A_1	A_2	A_3
A'_1	a_{11}	a_{12}	
A'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
A'_3	a_{31}	a_{32}	

নয়টি দিক্-কোসাইন a_{ij}-র তিন পংক্তি (row) এবং তিন স্তম্ভের (column) এইরূপ সজ্জাকে 'রূপান্তর মেইট্রিক্স্' (Transformation matrix) বলে। চিহ্নিত (′) নির্দেশতন্ত্রের উপাংশগুলি পাইতে ঐ পংক্তির গুণাংকগুলি, এবং অচিহ্নিত নির্দেশতন্ত্রের উপাংশগুলি পাইতে ঐ স্তম্ভের গুণাংকগুলি ব্যবহার করিতে হইবে, অর্থাৎ

$$A'_1 = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 \qquad A_1 = a_{11}A'_1 + a_{21}A'_2 + a_{31}A'_3$$

$$A'_2 = a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3 \quad \text{ও} \quad A_2 = a_{12}A'_1 + a_{22}A'_2 + a_{32}A'_3$$

$$A'_3 = a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3 \qquad A_3 = a_{13}A'_1 + a_{23}A'_2 + a_{33}A'_3$$

বা সংক্ষেপে $\quad A'_i = \sum_j a_{ij}A_j$ এবং $A_i = \sum_j a_{ji}A'_j \qquad$ (2-12.1)

a_{ij} রাশি নয়টি নিঃসম্পর্কিত নয় ; উহাদের মধ্যে নিচের সম্পর্কগুলি আছে :

$$\left.\begin{array}{l} \sum_j a_{ij}^2 = \sum_j a_{ji}^2 = 1 \quad (i=1, 2, 3) \\ \sum_i a_{ij}\, a_{ik} = \sum_i a_{ji}\, a_{ki} = 0 \quad (j \neq k) \end{array}\right\} \qquad (2\text{-}12.2)$$

এগুলি হইতে ছয়টি স্বতন্ত্র (independent) সমীকরণ পাওয়া যায়। কাজেই নয়টি a_{ij} রাশির কেবল তিনটি স্বতন্ত্র।

ভেক্টরের সংজ্ঞা। 2-12.1 সমীকরণ দিয়া ভেক্টরের যথার্থ সংজ্ঞা সূচিত হয়। বলা যায় 'যে $[A_1, A_2, A_3]$ সংখ্যা ত্রিতয় (triplet) নির্দেশতন্ত্র

ঘুরাইলে 2-12.1 সমীকরণ অনুযায়ী রূপান্তরিত হয় তাহাকে ভেক্টর বলে।' ইহা ত্রিমাত্রিক ভেক্টরের সংজ্ঞা। ভেক্টর উচ্চতর মাত্রারও হইতে পারে; তাহার সংজ্ঞাও অনুরূপ। কিন্তু এরূপ ভেক্টর এখানে আলোচ্য নয়।

নির্দেশতন্ত্রের পরিবর্তনে যে রাশির পরিবর্তন হয় না তাহাই স্কেলার।

দ্বিতীয় জাতির টেনসর (Tensor of rank two)। মনে কর $\mathbf{A}=[A_1, A_2, A_3]$ ও $\mathbf{B}=[B_1, B_2, B_3]$ বিভিন্ন প্রকৃতির দুটি সম্পর্কিত ভেক্টর, এবং T_{ij}-রূপী ($i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$) নয়টি উপাংশবিশিষ্ট এমন একটি T রাশি আছে যাহার সাহায্যে ভেক্টর দুটির সম্পর্ক নিচের মত প্রকাশ করা যায়:

$$A_1 = T_{11} B_1 + T_{12} B_2 + T_{13} B_3$$
$$A_2 = T_{21} B_1 + T_{22} B_2 + T_{23} B_3$$
$$A_3 = T_{31} B_1 + T_{32} B_2 + T_{33} B_3$$

বা মেইট্রিক্স্ সংকেতে

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

এরূপ হইলে $T_{11}, T_{12}, \ldots T_{33}$ রাশিগুলিকে একটি দ্বিতীয় জাতির টেনসরের উপাংশ (components) বলা হয়।

$$\mathbf{A}=T\mathbf{B}$$

রূপেও লেখা হয়। T উল্লিখিত টেনসর।

A ও B ভৌত (physical) ভেক্টর হইলে এরূপ টেনসরও একটি ভৌত রাশি এবং উহা পদার্থের কোন ভৌত ধর্মই প্রকাশ করে। ইহার কয়েকটি উদাহরণ আমরা এই বইতেই পাইব। 6-8 অনুচ্ছেদে দেখা যাইবে L কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর ও ω কৌণিক বেগ ভেক্টর হইলে দুয়ের মধ্যে সম্পর্ক $\mathbf{L}=I\omega$। I রাশিটি টেনসর ও উহাকে জাড্য টেনসর (Inertia tensor) বলে। যে টেনসরের $T_{ij}=T_{ji}$ তাহাকে প্রতিসম টেনসর (Symmetrical tensor) বলে। $I_{ij}=I_{ji}$ বলিয়া জাড্য টেনসর প্রতিসম। প্রতিসম টেনসরের তিনটি উপাংশ অন্য তিনটির সমান বলিয়া ইহার আসলে ছয়টি স্বতন্ত্র উপাংশ। সকল প্রতিসম টেনসরকে ইলিপ্‌সয়্‌ডের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ড্ (6-4 অনুচ্ছেদ) আলোচনায় ইহা বোঝা যাইবে।

9-13 অনুচ্ছেদে আমাদের পীড়ন (stress) ও তাঁত (strain) টেনসরের সঙ্গে পরিচয় ঘটিবে। উহারাও প্রতিসম টেনসর এবং ইলিপ্‌সয়্‌ডের সাহায্যে উহাদের ধর্ম আলোচনা করা যায়।

একটি ভেক্টর ও দ্বিতীয় জাতির একটি টেনসর সম্পর্কিত থাকিতে পারে। পাইজোইলেক্‌ট্রিক (Piezoelectric) বা চাপ-বৈদ্যুত ক্রিয়ায় ইহার উদাহরণ মেলে। কোয়ার্টজের ((quartz) মত অনেক কেলাসে এক অক্ষে চাপ দিলে সেই বা অন্য অক্ষের লম্বতলে বৈদ্যুত আধান জমে। ফলে কেলাসে বৈদ্যুত ধ্রুবণ (electrical polarization) হয়। ধ্রুবণ **p** ভেক্টর রাশি। পীড়ন σ দ্বিতীয় জাতির টেনসর। দুয়ের সম্পর্ক $\mathbf{p} = d\,\sigma$ রূপে লেখা যায়। d-র উপাংশগুলিকে পাইজোইলেকট্রিক গুণাংক (modulus) বলে। উহাদের প্রত্যেকটি **p**-র একটি অক্ষ ও σ-র দুটি অক্ষের সঙ্গে জড়িত। d রাশিটি তৃতীয় জাতির টেনসর।

উচ্চতর জাতির টেনসরও হয়। পীড়ন ও তাঁত টেনসর উভয়েই দ্বিতীয় জাতির। স্থিতিস্থাপক গুণাংক s দিয়া উহারা সম্পর্কিত। s টেনসর চারটি অক্ষের সঙ্গে জড়িত ; উহার দুটি পীড়নের ও দুটি তাঁতের। s টেনসর চতুর্থ জাতির।

টেনসর, ভেক্টর ও স্কেলার। উপরের উদাহরণগুলি হইতে দেখা যায় দ্বিতীয় জাতির টেনসরের প্রত্যেক উপাংশ দুইটি অক্ষের সঙ্গে জড়িত। উহার প্রথম অক্ষ প্রথম ভেক্টরের ও দ্বিতীয় অক্ষ দ্বিতীয় ভেক্টরের। তৃতীয় জাতির টেনসরের প্রত্যেক উপাংশ তিনটি অক্ষের সঙ্গে এবং চতুর্থ জাতির টেনসরের প্রত্যেক উপাংশ চারটি অক্ষের সঙ্গে জড়িত। ভেক্টরের প্রত্যেক উপাংশ কেবল একটি অক্ষের সঙ্গে জড়িত, এবং স্কেলার রাশি কোন অক্ষের সঙ্গেই জড়িত নয়। অতএব বিভিন্ন জাতির টেনসরের সঙ্গে সাদৃশ্য তুলনা করিয়া ভেক্টরকে প্রথম জাতির টেনসর এবং স্কেলারকে শূন্য জাতির টেনসর মনে করা যায়।

প্রশ্ন

1. (*a*) $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ হইলে
$|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$, $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$ এবং $|\mathbf{A}-\mathbf{B}|$-র মান কত?
[উঃ 7 ; 3 ; $\sqrt{50}$; $\sqrt{66}$]

(*b*) ভেক্টর দুটির দিক্‌-কোসাইন, এবং উহাদের মধ্যবর্তী কোণ কত?
[উঃ প্রায় 101°1′]

2. $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ এবং $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটির স্কেলার ও ভেক্টর গুণফল বাহির কর। উহাদের মধ্যে কোণ কত? [উঃ 0 ; $-17\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$; 90°]

3. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 11\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{A} - \mathbf{B} = -5\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ হইলে **A** এবং **B**-র মান কত? **A** এবং **A + B**-এর মধ্যে কোণ কত?

4. দক্ষিণ হস্তীয় সমকোণী ত্রি-অক্ষীয় নির্দেশ তন্ত্রের (*i*) প্রত্যেক ঐকিক ভেক্টরকে, (*ii*) যে কোন দুইটি ঐকিক ভেক্টরকে এবং (*iii*) কেবল একটি ঐকিক ভেক্টরকে -1 দিয়া গুণ করিয়া কি প্রকার নির্দেশ তন্ত্র পাওয়া যায়?

5. সমকোণী ত্রি-অক্ষীয় নির্দেশ তন্ত্রের প্রত্যেক অক্ষের সঙ্গে একই কোণে অবস্থিত ঐকিক ভেক্টরের দিক্ কোসাইন বাহির কর। ঘনকে ঐ ঐকিক ভেক্টর কোন রেখায়?

6. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ হইলে প্রমাণ কর **A** ও **B** সমকোণে।

7. $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{F}_2 = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dyn মানের দুইটি স্থিরবল একসঙ্গে একই কণার উপর ক্রিয়া করে এবং উহাকে *P* বিন্দু হইতে *Q* বিন্দুতে সরায়। *P*-র স্থানাংক 20, 15, 0 (cm) এবং *Q*-র স্থানাংক 0, 0, 7 (cm) হইলে কণাটির উপর কত কার্য করা হইয়াছে? [উঃ -48 erg]

8. $\mathbf{F} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ dyn বল $7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (cm) বিন্দুতে ক্রিয়া করিলে মূল বিন্দু সাপেক্ষে বলের ভ্রামক dyn-cm এককে কত? ইহার উপাংশগুলি কত?

9. $\mathbf{r} = \mathbf{i}\, a \cos \omega t + \mathbf{j} a \sin \omega t$ সমীকরণ কি প্রকার গতি বুঝায়? এখানে *a* এবং *ω*-কে স্থির ধরিবে। $d\mathbf{r}/dt$ এবং $d^2\mathbf{r}/dt^2$-র মান বাহির কর।

10. (*a*) মূলবিন্দু *O* হইতে কোন সমতলে টানা লম্ব **N**। $\mathbf{r} = \overline{OP}$ ঐ সমতলের যে কোন বিন্দু *P*-র স্থান ভেক্টর। $\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} = N^2$ কি বুঝায়?
[উঃ ইহা ঐ তলের সমীকরণ]

(*b*) কোন তলের অভিলম্বের দিক্ কোসাইন *l, m, n* হইলে, এবং মূল বিন্দু হইতে তলের অবম দূরত্ব *K* হইলে প্রমাণ কর যে তলের সমীকরণ $lx + my + nz = K$।

11. $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ হইলে *xy* তলে ইহার অভিক্ষেপ কত? [উঃ $\sqrt{10}$]

12. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ কি না বুঝাইয়া বল।

13. a, b, c ভেক্টর তিনটি সমকোণী না হইতেও পারে। $v = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$। যদি $\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{v}$, $\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{v}$ এবং $\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{v}$ হয় তাহা হইলে দেখাও যে

(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}' = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}' = 1$

(ii) $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = 0$

(iii) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 1/[\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}']$

[টীকা—a, b, c ও a′, b′, c′-এর অনুরূপ ভেক্টর জোড়াকে (a, a′ ইত্যাদিকে) বিলোম-ভেক্টর (reciprocal vectors) বলে। কেলাসতত্ত্ব (crystallography) ও অন্যান্য ক্ষেত্রে ইহাদের প্রয়োগ আছে। a-র মাত্রা দৈর্ঘ্য (L) হইলে a′-এর মাত্রা কি ?]

14. A ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $A = 5$। ইহা z-অক্ষের সঙ্গে 30° কোণে অবস্থিত এবং xy তলে ইহার অভিক্ষেপ x-অক্ষের সঙ্গে 45° কোণ করে। আর একটি ভেক্টর B-র z-অক্ষে অভিক্ষেপ $= +4$। xy তলে B-র অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য 6 এবং ইহা x-অক্ষের সঙ্গে $+120°$ কোণ করে।

A + B কত বাহির কর। (ইহার দৈর্ঘ্য, কার্টেজীয় উপাংশ এবং কার্টেজীয় অক্ষগুলির সঙ্গে ইহার কোণ কত কত বল। [উঃ দৈর্ঘ্য = 10·9 ; উপাংশ −1·23 ; +6·97, +8·33 ; কোণ 96·5°, 50·4° ও 40·3°]

15. বল $\mathbf{F} = [5, 10, 15]$ kg (1, 0, 3) বিন্দু হইতে (3, −1, −6) বিন্দুতে সরায় কত কার্য হয় ? (স্থানাংক cm এককে) [উঃ −135 kg. cm ; কার্য বলের বিরুদ্ধে হইয়াছে।]

16. 1 cm বাহু বিশিষ্ট ঘনকের এক কোনাকে মূলবিন্দু ধরিয়া ঐ বিন্দু হইতে দুইটি তল-কর্ণ (face diagonal) টান। উহাদের স্কেলার গুণফল ও ভেক্টর গুণফল বাহির কর। দুই কর্ণের মধ্যবর্তী কোণ কত ? [উঃ 1 ; $\sqrt{3}$; 60°]

17. (*a*) উপরের প্রশ্নে (i) দুই দেহ-কর্ণের (body বা space diagonal) (b) তলকর্ণ ও দেহকর্ণের মধ্যে কোণ কত কত হইবে ?

(ii) ত্রি-সমকোণী অক্ষের সঙ্গে একই কোণে আনত ভেক্টর যে কোন অক্ষের সঙ্গে কত কোণ করে ?

18. A একটি স্থির ভেক্টর এবং $\mathbf{A}_1$ উহার অভিমুখে ঐকিক ভেক্টর। P ভেক্টর A-র মূলবিন্দু হইতে টানা স্থান ভেক্টর। প্রমাণ কর যে $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{P} = |\mathbf{A}|$ সমীকরণ A-র প্রান্তবিন্দুতে টানা A-র অভিলম্ব তল নির্দেশ করে।

19. n যে কোন ঐকিক ভেক্টর এবং A যে কোন ভেক্টর। প্রমাণ কর যে

$$\mathbf{A} = \mathbf{n}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n})$$

তাছাড়া, দেখাও যে এই সমীকরণে A-কে n-এর অভিমুখে ও উহার অভিলম্বে দুই উপাংশে ভাগ করা হইয়াছে।

20. $\mathbf{a}(t)$ কাল t-র অপেক্ষক কোন ভেক্টর। দেখাও যে $\mathbf{a}\cdot(d\mathbf{a}/dt)=a(da/dt)$।

[সংকেত : $\frac{d}{dt}\mathbf{a}^2$ ও $\frac{d}{dt}a^2$-এর মান বাহির কর।]

21. প্রমাণ কর যে $\text{grad}\, f(r)=(df/dr)\,\mathbf{r}/r$।

22. $\mathbf{A}=\mathbf{i}f(y)+\mathbf{j}a+\mathbf{k}b$ ভেক্টরের a ও b স্থির রাশি হইলে দেখাও যে curl $\mathbf{A}$ z-অক্ষ অভিমুখে।

23. $\mathbf{A}$ ভেক্টর x-y তলে থাকিলে প্রমাণ কর curl $\mathbf{A}$ z-অক্ষে থাকিবে।

24. প্রমাণ কর যে $\text{div}\,(\mathbf{r}/r^3)=-\nabla^2(1/r)=0$। ($r=0$ নয়।)

25. $\mathbf{r}$ স্থান ভেক্টর হইলে প্রমাণ কর $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{r}=\mathbf{A}$।

26. $\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}$ হইলে দেখাও যে $\omega=\frac{1}{2}\,\text{curl}\,\mathbf{v}$।

[সংকেত : $\omega\times\mathbf{r}$-কে উপাংশে ভাগ করিয়া v_x, v_y, v_z বাহির কর। curl ω-র উপাংশগুলি লিখিয়া তাহাতে v_x, v_y, v_z-এর মান বসাও।]

27. কোন বস্তু স্থির অক্ষে $\bar{\omega}$ কৌণিক বেগে ঘুরিতেছে। $\bar{\omega}=[-50, +80, +100]$, $\mathbf{r}=[4, 5, 6]$ বিন্দুর বেগ $\mathbf{v}$-র x ও y উপাংশ যথাক্রমে 20 ও 30। মূলবিন্দু হইতে অক্ষের অবম দূরত্ব কত? [উঃ 6.3]

28. কোন কণা বক্ররেখায় চলিতেছে। রেখার উপরের ঐচ্ছিক কোন মূলবিন্দু হইতে রেখাস্থ কোন বিন্দুর গতিরেখা বরাবর দূরত্ব s। রেখার কোন বিন্দুতে গতির অভিমুখে বেগের ঐকিক ভেক্টর $\mathbf{t}$। প্রমাণ কর যে $\mathbf{t}\cdot(d\mathbf{t}/ds)=0$। $d\mathbf{t}/ds$ রাশিটি কি বুঝায়?

29. $\mathbf{r}$ স্থান ভেক্টর এবং $\mathbf{A}$ স্থির একটি ভেক্টর হইলে $\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}$-এর গ্রেডিয়েণ্ট কত হইবে হিসাব কর। [উঃ $\mathbf{r}$]

30. $\bar{\omega}$ কৌণিক বেগে গোল একটি চাকতি নিজ তলের কোন স্থির বিন্দুর চারদিকে ঘোরে। চাকতির যেকোন বিন্দুর বেগ ভেক্টর $\mathbf{v}$ হইলে $\mathbf{v}$ এবং $\bar{\omega}$-র সম্পর্ক কি হইবে? [উঃ curl $\mathbf{v}=2\bar{\omega}$]

31. কোন সমতলের বিন্দুগুলি ঐ তলস্থ স্থির কোন বিন্দুর চারদিকে ঐ তলেই ω কৌণিক বেগে ঘোরে। স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$-এর মানের উপর ω নির্ভর করে; $\omega=\omega(r)$। বেগ-ভেক্টর ক্ষেত্র (velocity field) অঘূর্ণ (irrotational) হইতে হইলে ω ও r-এ কি সম্পর্ক হইবে? [উঃ $\omega=k/r^2$; k = স্থিররাশি]

32. $f(x, y, z)$ একটি স্কেলার রাশি। $\mathbf{r}$ স্থান ভেক্টর। $\mathbf{r}\times\text{grad}\, f$-এর কার্টেজীয় উপাংশগুলি লেখ।

33. A যে কোন ভেক্টর হইলে প্রমাণ কর

$$\text{div curl } \mathbf{A}=0$$

34. ϕ কোন স্কেলার রাশি হইলে প্রমাণ কর

$$\text{curl grad } \phi=0$$

35. $\phi(x, y, z)=3x^2y-y^3z^2$ হইলে দেখাও যে $(1, -2, -1)$ বিন্দুতে grad $\phi=-12\mathbf{i}-9\mathbf{j}-16\mathbf{k}$ ।

36. $\mathbf{A}=\mathbf{i}\,x^2z+\mathbf{j}\,2y^3z^2+\mathbf{k}2y^2z$ হইলে দেখাও যে $(1, -1, 1)$ বিন্দুতে div $\mathbf{A}=3$ ।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

কণার গতিবিজ্ঞান

(Dynamics of a Particle)

3-1. বলবিজ্ঞান (Mechanics) ফলিত গণিতের (Applied Mathematics-এর) শাখাবিশেষ। ইহাতে বস্তুর (body-র) গতি, গতির কারণ-স্বরূপ বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বল এবং বস্তু সাম্যে (in equilibrium) থাকিলে উহার উপর ক্রিয়াশীল বলের প্রতিমান (balancing) আলোচনা করা হয়। যে অংশে গতি সংক্রান্ত কেবল জ্যামিতিক আলোচনা হয়, তাহাকে শুদ্ধগতিবিজ্ঞান বা সৃতিবিদ্যা (Kinematics) বলে। গতিবিজ্ঞানের (Dynamics-এর) আলোচ্য হইল বলের ক্রিয়াধীন বস্তুর গতি, বিশেষ করিয়া অসমবেগে গতি। বলগুলি প্রতিমিত থাকিলে উহা স্থিতিবিজ্ঞানের (Statics-এর) আলোচ্য হয়।

আমরা এখানে কেবল গতিবিজ্ঞানের কিছু আলোচনা করিব। এই পরিচ্ছেদের আলোচ্য হইবে বলাধীন একটি কণার আচরণ। ইহার জন্য শুদ্ধগতিবিজ্ঞানের কয়েকটি কথা আগে বলিয়া লইতে হইবে। 3-3 হইতে 3-8 অনুচ্ছেদে ইহা করা হইয়াছে। চতুর্থ পরিচ্ছেদের আলোচ্য হইবে বলাধীন কণাসমষ্টি (system of particles)। ষষ্ঠ পরিচ্ছেদে প্রধানতঃ দৃঢ়বস্তুর (rigid body-র) আবর্তন আলোচনা করা হইবে।

আলোচ্য রাশিগুলি মাপনের যে কোন পদ্ধতির সুসঙ্গত (coherent) বা বিশুদ্ধ এককে (absolute units-এ) প্রকাশিত বলিয়া ধরা হইবে। এই পদ্ধতি সিজিএস, এমকেএস বা এফপিএস হইতে পারে। ইঞ্জিনীয়ারিং-এ স্লাগ (slug) ও পাউণ্ড-বলের (lbf, lb wt বা pound force-এর) প্রচলন আছে। অভি-কর্ষজ ত্বরণ g-এর মান ($32{\cdot}2$ ft/s^2) দিয়া উহাদের গুণ করিলে উহারা এফপিএস পদ্ধতির বিশুদ্ধ মানে পরিণত হয়।

1 স্লাগ = 32·2 পাউণ্ড-ভর (lb বা lbm)

1 পাউণ্ড বল = 32·2 পাউণ্ডাল।

3-2. নিউটনের গতিবিষয়ক সূত্র (Newton's laws of motion)। গতিবিজ্ঞান নিউটনের তিনটি সূত্রের উপর প্রতিষ্ঠিত। ইহাদের নিম্নোক্ত-ভাবে প্রকাশ করা যায় :—

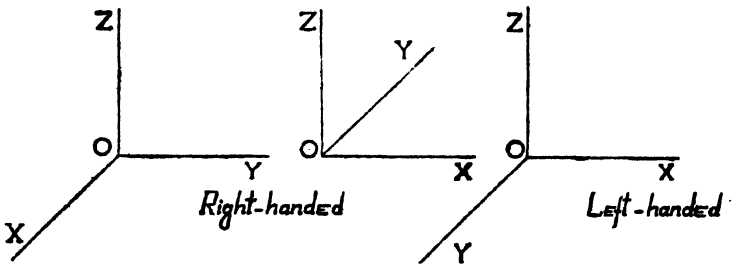
প্রথম সূত্র। কোন বল ক্রিয়া না করিলে স্থির বস্তু স্থির অবস্থায়ই থাকিয়া যায়, এবং উহা সচল থাকিলে সমবেগে সরলরেখায় চলিতে থাকে।

দ্বিতীয় সূত্র। কোন দিকে বস্তুর ভরবেগ পরিবর্তনের হার ঐ দিকে ক্রিয়াশীল মোটবলের সমানুপাতিক।

তৃতীয় সূত্র। প্রত্যেক ক্রিয়ার সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া থাকে।

তিনটি সূত্রের দ্বিতীয়টিই বল ও গতির যোগসূত্র।

সরণ (displacement), বেগ, ত্বরণ, ভরবেগ ও বল ভেক্টর (বা সদিশ) রাশি। উহাদের মান ও দিক্ উভয়ই আছে। ঘূর্ণনের আলোচনায় আরও ভেক্টর রাশির সহিত আমাদের পরিচয় হইবে। ভেক্টর জাতীয় রাশি সংক্রান্ত ভেক্টর বীজগণিত ও ভেক্টর ক্যালকুলাস প্রয়োগ করিলে আলোচনা অনেক সংক্ষিপ্ত হয়। এই কারণে আমরা বলবিজ্ঞান আলোচনায় যথাসম্ভব ভেক্টর-গণিত প্রয়োগ করিব। দ্বিতীয় পরিচ্ছেদে ভেক্টর বীজগণিত ও ভেক্টর ক্যালকুলাসের মূলসূত্রগুলির সহিত পাঠকের পরিচয় ঘটিয়াছে ধরিয়া লওয়া হইবে।

3-3. শুদ্ধগতিবিজ্ঞান (Kinematics)। কণার গতি আলোচনা করিতে শুদ্ধগতিবিজ্ঞানে উহার অবস্থান (position) ও গতিপথ বর্ণনা করা, এবং বিশেষ বিশেষ দিকে উহার বেগ ও ত্বরণের উপাংশ (component) বাহির করা দরকার হয়।

3.1 চিত্র

ত্রিমাত্রিক (three dimensional) দেশে (space) কণার অবস্থান বর্ণনা করিতে আমরা দক্ষিণ-হস্তীয় (right-handed) ত্রিমাত্রিক কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র (Cartesian coordinate system) ব্যবহার করিব। ডান হাতের প্রথম তিনটি আঙ্গুল পরস্পর সমকোণে ছড়াইয়া ধরিলে x, y ও z অক্ষ যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় আঙ্গুল বরাবর থাকিবে (3.1 চিত্রে)। গোলীয় (spherical), বেলনীয় (cylindrical) বা অন্যপ্রকার নির্দেশতন্ত্র

ব্যবহার আমাদের দরকার হইবে না। যে সকল আলোচনায় আলোচ্য ব্যাপারের প্রতিসাম্য (symmetry) ইহাদের কোনটির মত সেই সকল আলোচনায়ই এরূপ বিশেষ নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার সুবিধার। কণার গতি সমতলে হইলে সমকোণী (rectangular) বা ধ্রুবীয় (polar) নির্দেশতন্ত্র (coordinate system) ব্যবহার করা হইবে।

নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু (origin) O হইতে কণার অবস্থান P পর্যন্ত টানা সরলরেখা দ্বারা কণার অবস্থান বুঝান হইবে। এই $\overline{OP}$ রেখাকে কণার স্থান-ভেক্টর (position vector) $\mathbf{r}$ বলা হয়। $\overline{OP}$ এবং $\mathbf{r}$ অভিন্ন। ইহা ভেক্টর রাশি; ইহার মান ও দিক্ উভয়ই আছে। নির্দেশতন্ত্রের মূল-বিন্দু সুবিধামত যে কোন স্থানে নেওয়া যায়, এবং উহার সমকোণীয় অক্ষগুলিও সুবিধামত টানা চলে; তবে উহা দক্ষিণ হস্তীয় হইতে হইবে, কারণ ভেক্টর গণিতে বর্তমানে প্রায় সর্বত্রই দক্ষিণ হস্তীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করা হয়।

কণার গতিপথের প্রত্যেক বিন্দুতে মান স্থির এমন কোন প্রাচল* (parameter) s-এর সাহায্যে ঐ গতিপথ বর্ণনা করা যায়। পথের উপর অবস্থিত ইচ্ছামত লওয়া (স্বৈচ্ছিক=arbitrary) কোন স্থির বিন্দু হইতে পথ বরাবর মাপা দূরত্বকে s ধরা চলে। আবর্তগতিতে (rotational motion-এ) সুবিধামত মাপা কোন কোণ θকে এরূপ প্রাচল বলিয়া ধরা যায়।

স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$ উপরোক্ত প্রাচল s-এর অপেক্ষক বা ফলন (function), অর্থাৎ $\mathbf{r} \equiv$† $\mathbf{r}(s)$। নির্দেশতন্ত্রের বিভিন্ন অক্ষে $\mathbf{r}$-এর উপাংশগুলিও তাহাই। তন্ত্রের তিনটি অক্ষে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ যথাক্রমে ঐকিক ভেক্টর (unit vector) হইলে, এবং আলোচ্য কণার স্থানাংক (coordinates) x, y, z হইলে

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(s) \equiv \mathbf{i}x(s) + \mathbf{j}y(s) + \mathbf{k}z(s) \tag{3-3.1}$$

s সময়ের উপর নির্ভর করিলে $\mathbf{r}$-ও তাহাই করিবে, অর্থাৎ $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t)$ হইবে।

3-4. কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে বেগ ও ত্বরণের উপাংশ (Velocity

* প্রাচল বা প্যারামিটার ভারত সরকারের হিন্দী পরিভাষা। প্যারামিটার বলিতে এমন একটি রাশি বুঝায় যাহার মান আলোচ্য ক্ষেত্রে স্থির, কিন্তু বিভিন্ন ক্ষেত্রে আলাদা।

† $\equiv$ চিহ্ন দ্বারা অভিন্নতা (identity) বুঝায়।

and acceleration in Cartesian coordinates)। এই উপাংশগুলি নিম্নোক্ত উপায়ে সহজেই বাহির করা যায়।

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}x(t)+\mathbf{j}y(t)+\mathbf{k}z(t) \qquad (3\text{-}4.1)$$

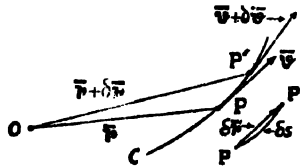
বেগ $$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{i}\frac{dx}{dt}+\mathbf{j}\frac{dy}{dt}+\mathbf{k}\frac{dz}{dt} \qquad (3\text{-}4.2)$$

অর্থাৎ $$v_x=\frac{dx}{dt},\ v_y=\frac{dy}{dt},\ v_z=\frac{dz}{dt} \qquad (3\text{-}4.3)$$

ত্বরণ $$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{i}\frac{d^2x}{dt^2}+\mathbf{j}\frac{d^2y}{dt^2}+\mathbf{k}\frac{d^2z}{dt^2} \qquad (3\text{-}4.4)$$

অর্থাৎ $$a_x=\frac{d^2x}{dt^2},\ a_y=\frac{d^2y}{dt^2},\ a_z=\frac{d^2z}{dt^2} \qquad (3\text{-}4.5)$$

3-5. বেগ-ভেক্টর (Velocity vector)। কণার স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$-কে উপরের মত স্পষ্টতঃ (explicitly) t-র ফলন বলিয়া না ধরিয়া s-এর ফলন হিসাবে ধরিলে বেগ ও ত্বরণের উপাংশ কিভাবে পাওয়া যাইতে পারে দেখা যাক। গতিপথের স্বেচ্ছিক কোন স্থিরবিন্দু হইতে পথ বরাবর পথের যে কোন বিন্দুর দূরত্ব s, এবং $\mathbf{r}\equiv\mathbf{r}(s)$।

3.2 চিত্রে C বক্ররেখা কণার দেশস্থ (in space) গতিপথ বুঝায়। t হইতে $t+\delta t$ অবসরে কণা P হইতে P'-এ গিয়াছে। P ও P' বিন্দু

3.2 চিত্র

দুইটির স্থান-ভেক্টর $\mathbf{r}$ ও $\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$ সুবিধামত কোন মূলবিন্দু O হইতে লওয়া। কণা δt সময়ে $\overline{PP'}\equiv\delta\mathbf{r}$ দূরত্ব সরিয়াছে। $\delta\mathbf{r}$ কণার সরণ-ভেক্টর (displacement vector)। অতএব P বিন্দুতে বেগ

$$\mathbf{v}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}=\frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (3\text{-}5.1)$$

PP' চাপের (arc-এর) দৈর্ঘ্য স্কেলার রাশি δs ধরিলে

$$\delta\mathbf{r}/\delta t=(\delta\mathbf{r}/\delta s)\,(\delta s/\delta t)$$

$\delta t\to 0$ সীমায় গেলে পাই

$$d\mathbf{r}/dt=(d\mathbf{r}/ds)\,(ds/dt) \qquad (3\text{-}5.2)$$

3.2 চিত্র হইতে দেখা যাইবে $\delta\mathbf{r}/\delta s$ = জ্যা (chord) PP'/চাপPP'। P' ক্রমশঃ P-র দিকে আগাইতে থাকিলে সীমান্ত অবস্থায় (in the limit) এই অনুপাতের মান হয় 1, এবং উহার অভিমুখ থাকে গতির দিকে C রেখার P বিন্দুস্থ স্পর্শক (tangent) বরাবর। কাজেই $d\mathbf{r}/ds$ এই স্পর্শকে ঐকিক ভেক্টর। $\mathbf{T}$ দিয়া এরূপ ঐকিক ভেক্টর বুঝাইলে, 3-5.1 ও 3-5.2 সমীকরণ হইতে পাই

$$\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt=(ds/dt)\mathbf{T}=\dot{s}\mathbf{T}=v\mathbf{T} \qquad (3\text{-}5.3)$$

দেখা যায় $\mathbf{v}$-র মান $v=ds/dt=\dot{s}$, এবং উহার দিক্ $\mathbf{T}$। $PP'\rightarrow 0$ সীমায় $d\mathbf{r}=ds\mathbf{T}=d\mathbf{s}$ লেখা যায়, এবং একই কারণে

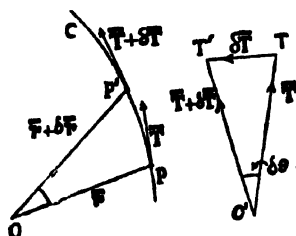
$$\mathbf{v}=(ds/dt)\,\mathbf{T}=d\mathbf{s}/dt=\dot{\mathbf{s}} \qquad (3\text{-}5.4)$$

লেখা চলে। এখানে স্মরণ রাখা প্রয়োজন যে s-কে একটি ভেক্টররূপে গণ্য করা যায় না। কেবলমাত্র $d\mathbf{s}$-কেই ভেক্টররূপে গণ্য করা চলে।

3-6. ত্বরণ ভেক্টর এবং উহার স্পার্শক ও অভিলম্ব উপাংশ (Acceleration vector, and its tangential and normal components)। ত্বরণ ভেক্টর $\mathbf{a}$ বেগভেক্টর $\mathbf{v}$-র সময়ের সহিত পরিবর্তনের হার। অতএব

$$\mathbf{a}=d\mathbf{v}/dt=d(v\mathbf{T})/dt=\dot{v}\mathbf{T}+v\,d\mathbf{T}/dt \qquad (3\text{-}6.1)$$

s-এর উপর $\mathbf{T}$-র দিক্ নির্ভর করে বলিয়া লেখা যায়

$$d\mathbf{T}/dt=(d\mathbf{T}/ds)\,(ds/dt)=v(d\mathbf{T}/ds) \qquad (3\text{-}6.2)$$

3.3 চিত্র

$d\mathbf{T}/ds$-এর মান বাহির করিতে আমরা 3.3 চিত্রের সাহায্য লইব। $\overline{PP'}\rightarrow 0$ সীমায় $\delta\mathbf{T}/\delta s$-এর মান কত হইবে? C বক্রের P বিন্দুতে স্পর্শকের ঐকিক ভেক্টর $\mathbf{T}$ হইলে P' বিন্দুতে স্পর্শকের ঐকিক ভেক্টরকে $\mathbf{T}+\delta\mathbf{T}$ লেখা চলে। 3.3 চিত্রে $\overline{O'T}\equiv\mathbf{T}$ এবং $\overline{O'T'}\equiv\mathbf{T}+\delta\mathbf{T}$। $\overline{O'T}$ ও $\overline{O'T'}$-এর মান সমান, কারণ উহারা উভয়েই ঐকিক ভেক্টর

বলিয়া প্রত্যেকের মান 1। OPP' তলে সুবিধামত কোন স্থির অক্ষ ধরিয়া $\mathbf{T}$ ও এই অক্ষের মধ্যবর্তী কোণকে θ, এবং $\mathbf{T}+\delta\mathbf{T}$ ও অক্ষের মধবর্তী কোণকে $\theta+\delta\theta$ বলিলে $\angle TOT'=\delta\theta$ হইবে। $\delta t\to 0$ হইলে P' P-র দিকে ও T' T-র দিকে আগাইতে থাকে, এবং $\delta\mathbf{T}(\equiv\overline{TT'})$ ক্রমশঃ T-র অভিলম্বে যাইতে থাকে।

$$\text{এখন,}\quad |\delta\mathbf{T}| = TT' = 2\sin(\delta\theta/2)$$

$$\therefore\quad |d\mathbf{T}/ds| = \lim|\delta\mathbf{T}/\delta s| = \lim[\sin(\delta\theta/2)/(\delta s/2)]$$
$$= \lim[\delta\theta/\delta s] = d\theta/ds.$$

$d\theta/ds\equiv k$ রাশিটিকে P বিন্দুতে C বক্রের বক্রতা (curvature) বলে। k-র বিপরীত রাশি (reciprocal) $1/k\equiv\rho$-কে ঐ বিন্দুতে বক্রের বক্রতার ব্যাসার্ধ (radius of curvature) বলে।

C বক্রের P বিন্দুতে টানা স্পর্শকের যে অভিলম্ব PP' তলে থাকে, P বিন্দুর বক্রতার কেন্দ্র (centre of curvature) তাহার উপর অবস্থিত। P হইতে এই কেন্দ্রের দিকে টানা (T-র অভিলম্ব) রেখায় $\mathbf{n}$ ঐকিক ভেক্টর হইলে

$$d\mathbf{T}/ds=(d\theta/ds)\,\mathbf{n}=k\mathbf{n}=(1/\rho)\,\mathbf{n} \tag{3-6.3}$$

3-6.2 সমীকরণে এই মান বসাইয়া পাই $d\mathbf{T}/dt=(v/\rho)\,\mathbf{n}$, এবং 3-6.1 সমীকরণে শেষোক্ত মান বসাইয়া পাই

$$\mathbf{a}=\dot{v}\mathbf{T}+(v^2/\rho)\mathbf{n} \tag{3-6.4}$$

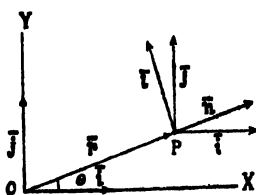
দেখা গেল, গতিপথের কোন বিন্দুতে ত্বরণভেক্টরের ঐ বিন্দুতে গতির দিকে টানা স্পর্শক বরাবর উপাংশ $\dot{v}$ এবং উহার অভিলম্বে বক্রতার কেন্দ্রের দিকে উপাংশ v^2/ρ। ইহাদের প্রথমটিকে স্পার্শিক উপাংশ (a_T) এবং দ্বিতীয়টিকে অভিলম্ব উপাংশ (a_N) বলা হয়। অতএব

$$a_T=\dot{v},\ \text{ও}\ a_N=v^2/\rho \tag{3-6.5}$$

$$\text{এবং}\ a^2=a_T^2+a_N^2=(\dot{v})^2+(v^2/\rho)^2 \tag{3-6.6}$$

3-7. সমতলীয় গতি (Planar motion)। কোন কণা যদি এমনভাবে চলে যে সকল সময়ে উহার অবস্থান বিন্দুগুলি একই সমতলে থাকে তবে ঐ কণার গতিকে সমতলীয় গতি বলা হয়। সমতল কাচের উপর একটি পিঁপড়া যখন চলিয়া বেড়ায় তখন উহার গতি সমতলীয়; কিন্তু যখন আকাশে একটি পাখী উড়িয়া বেড়ায় তাহার গতি সমতলীয় নয়। সূর্যকে কেন্দ্র করিয়া পৃথিবীর আবর্তন সমতলীয়

গতি। আবার পৃথিবীকে কেন্দ্র করিয়া চন্দ্রের গতি সমতলীয়। কিন্তু সূর্য হইতে দেখিলে চন্দ্রের গতি সমতলীয় নয়। গতিবিজ্ঞানে সমতলীয় গতির বিশেষ গুরুত্ব আছে। পরে দেখান হইবে কেন্দ্রগ বলের ক্রিয়ায় কণার গতি সমতলীয় হয়।

3-7.1. সমতলীয় গতিতে বেগ ও ত্বরণের অরীয় ও অনুপ্রস্থ উপাংশ (Radial and transverse components of velocity and acceleration in planar motion)। যে সমতলে কণার গতি তাহার কোন O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া ঐ তলে সমকৌণিক কার্টেজীয় ও

3.4 চিত্র

ধ্রুবীয় (polar) নির্দেশতন্ত্র টানা যাক (3.4 চিত্র)। কণার সাময়িক অবস্থান P বিন্দুতে, এবং $\overline{OP}\equiv\mathbf{r}$ উহার স্থান ভেক্টর। x এবং y অক্ষে $\mathbf{i}$ এবং $\mathbf{j}$ যথাক্রমে ঐকিক ভেক্টর। $\mathbf{r}$ বরাবর এবং তাহার বামাবর্ত (anticlockwise) অভিলম্বে ঐকিক ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{n}$ ও $\mathbf{l}$।

এক্ষেত্রে $\quad \mathbf{n}=\mathbf{i}\cos\theta+\mathbf{j}\sin\theta$

এবং $\quad \mathbf{l}=-\mathbf{i}\sin\theta+\mathbf{j}\cos\theta.$

$\therefore\quad d\mathbf{n}/d\theta=-\mathbf{i}\sin\theta+\mathbf{j}\cos\theta=\mathbf{l}$

এবং $\quad d\mathbf{l}/d\theta=-\mathbf{i}\cos\theta-\mathbf{j}\sin\theta=-\mathbf{n}$

বেগ $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt=d(r\mathbf{n})/dt=(dr/dt)\,\mathbf{n}+r\,(d\mathbf{n}/dt)$

$$=(dr/dt)\,\mathbf{n}+r\,(d\mathbf{n}/d\theta)\,(d\theta/dt)=(dr/dt)\,\mathbf{n}+r\,(d\theta/dt) \quad (3\text{-}7.1)$$

অতএব বেগের অরীয় উপাংশ $\quad v_r=(dr/dt)=\dot{r} \qquad$ (3-7.2a)

এবং অনুপ্রস্থ উপাংশ $\quad v_\theta=r(d\theta/dt)=r\theta. \qquad$ (3-7.2b)

তাছাড়া, $\quad v^2=v_r^2+v^{\ 2}.$

ত্বরণ $\quad \mathbf{a}=\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{dr}{dt}\mathbf{n}+r\dfrac{d\theta}{dt}\mathbf{l}\right\}$

$$=\left(\frac{d^2r}{dt^2}\,\mathbf{n}+\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{n}}{dt}\right)+\left(\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\mathbf{l}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\mathbf{l}+r\,\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)$$

$$=\left(\ddot{r}\,\mathbf{n}+\dot{r}\,\frac{d\mathbf{n}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)+\left(\dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{l}+r\ddot{\theta}\,\mathbf{l}+r\,\dot{\theta}\,\frac{d\mathbf{l}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$=(\ddot{r}\,\mathbf{n}+\dot{r}\,\dot{\theta}\,\mathbf{l})+(\dot{r}\,\dot{\theta}\,\mathbf{l}+r\,\ddot{\theta}\,\mathbf{l}-r\dot{\theta}^2\mathbf{n})$$

$$=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{n}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{l} \qquad (3\text{-}7.3)$$

অতএব ত্বরণের অরীয় উপাংশ $a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ (3-7.4a)

এবং অনুপ্রস্থ উপাংশ $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$

$$=\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\dot{\theta}) \qquad (3\text{-}7.4b)$$

তাছাড়া, $a^2=a_r^2+a_\theta^2$.

θ-র পরিবর্তন না হইলে, অর্থাৎ কণা অরীয় পথে সরলরেখায় চলিলে অরীয় ত্বরণ $a_r=\ddot{r}$ ও অনুপ্রস্থ ত্বরণ $a_\theta=0$। r স্থির থাকিয়া θ-র পরিবর্তন হইলে, কণার অরীয় ত্বরণ

$$a_r=-r\dot{\theta}^2=-\frac{(r\dot{\theta})^2}{r}=-\frac{v_\theta^2}{r}=-\frac{v^2}{r} \qquad (3\text{-}7.5)$$

কারণ, এ ক্ষেত্রে $v_r=0$ হওয়ায় কণার বেগ $v=v_\theta$। এই অরীয় ত্বরণ বক্রতাকেন্দ্র অভিমুখী এবং ইহাকে **অভিকেন্দ্র** (Centripetal) **ত্বরণ** বলে।

অনুপ্রস্থ ত্বরণের $2\dot{r}\dot{\theta}$ অংশকে **কোরিওলি** (Coriolis) **ত্বরণ** বলে। r বা θ যে কোনটির মান স্থির থাকিলে ইহার মান শূন্য হয়। অতএব কণা বৃত্তপথে বা সরলরেখায় চলিলে উহার কোরিওলি ত্বরণ থাকে না।

বেগ ও ত্বরণের কার্টেজীয় ও ধ্রুবীয় উপাংশগুলির মধ্যে সম্পর্ক নিম্নোক্তভাবে পাওয়া যায় :

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta\\ \dot{y}&=\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}7.6)$$

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}&=\ddot{r}\cos\theta-2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta-r\ddot{\theta}\sin\theta-r\dot{\theta}^2\cos\theta\\ \ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2}&=\ddot{r}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta+r\ddot{\theta}\cos\theta-r\dot{\theta}^2\sin\theta\end{aligned}\right\}$$

(3-7.7)

3.4 চিত্রের জ্যামিতি হইতে

$$\left.\begin{aligned}a_r&=\ddot{x}\cos\theta+\ddot{y}\sin\theta\\ \text{এবং } a_\theta&=-\ddot{x}\sin\theta+\ddot{y}\cos\theta\end{aligned}\right\}\quad(3\text{-}7.8)$$

3-7.7 সমীকরণ হইতে $\ddot{x}$ ও $\ddot{y}$-এর মান 3-7.8 সমীকরণ বসাইলে 3-7.4 (a) ও (b) সমীকরণ পাওয়া যায়।

প্রশ্ন। কোন কণা বৃত্তপথে সুষম দ্রুতিতে (speed-এ) চলিতে থাকিলে প্রমাণ কর উহার ত্বরণ সম্পূর্ণ অরীয় এবং ত্বরণের মান=(দ্রুতির বর্গ)/বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

3-8. কৌণিক-বেগ ভেক্টর (Angular velocity vector)। মনে কর কোন সচল কণার সাময়িক বেগ **v**, এবং সুবিধামত কোন মূলবিন্দু O সাপেক্ষে উহার স্থানভেক্টর **r**। স্বল্প δt অবসরে কণার সরণ O বিন্দুতে যে $\delta\phi$ কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে ভেক্টর রাশি বলিয়া ধরা যায় (2-2 অনুচ্ছেদের (4) ও (5) অংশ দেখ)। লেখা যায়

$$\delta\boldsymbol{\phi}=\frac{1}{r^2}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}\;\delta t).$$

$$\text{এবং}\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\boldsymbol{\phi}}{\delta t}=\dot{\boldsymbol{\phi}}=\frac{1}{r^2}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\qquad(3\text{-}8.1)$$

$\dot{\boldsymbol{\phi}}$ রাশিটিকে O বিন্দু সাপেক্ষে সচল কণার কৌণিক-বেগ ভেক্টর বলে।

$\dot{\boldsymbol{\phi}}$ এবং **r**-এর ভেক্টরীয় গুণন (vector multiplication; 2-6.2 অনুচ্ছেদ) ঘটাইলে পাই

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}\times\mathbf{r}=\frac{1}{r^2}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\times\mathbf{r}$$

তিনটি ভেক্টরের ভেক্টরীয় গুণনের সূত্র অনুসারে (2-7.3 অনুচ্ছেদ)

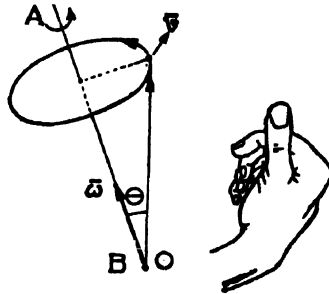
$$(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\times\mathbf{r}=(\mathbf{r}.\mathbf{r})\mathbf{v}-(\mathbf{v}.\mathbf{r})\mathbf{r}=r^2\mathbf{v}-(\mathbf{v}.\mathbf{r})\mathbf{r}$$

$$\therefore\quad\dot{\boldsymbol{\phi}}\times\mathbf{r}=\mathbf{v}-(\mathbf{v}.\mathbf{r})\mathbf{r}/r^2\qquad(3\text{-}8.2)$$

এখানে লক্ষণীয় যে কণার কৌণিক বেগ $\dot{\boldsymbol{\phi}}$, O বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে। বিভিন্ন বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিলে একই সচল কণার **v**

বদলাইবে না, কিন্তু **r** বিভিন্ন হইবে। অতএব বিভিন্ন মূলবিন্দু সাপেক্ষে $\boldsymbol{\phi}$ ও বিভিন্ন হইবে।

3-8.1 সমীকরণে কোন স্থির বিন্দু সাপেক্ষে একটি কণার কৌণিক বেগের সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে। কোন দৃঢ়বস্তু (rigid body) যখন একটি অক্ষে আবর্তিত হয় তখন বস্তুর যে কোন কণা অক্ষের চারদিকে বৃত্তপথে ঘোরে। আবর্তন অক্ষের যে কোন বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিলে যে কোন কণার কৌণিক বেগ 3-8.1 সমীকরণ অনুসারে বাহির করা যাইতে পারে। বিভিন্ন ক্ষেত্রে কৌণিক বেগ বিভিন্ন হইবে আবার একই কণার ক্ষেত্রে বিভিন্ন সময়ে **r** ও **v**-র দিক্ পরিবর্তন হইলে কৌণিক বেগের দিক্ পরিবর্তিত হইবে। কিন্তু যদি কোন কণা হইতে আবর্তন অক্ষের উপর লম্ব টানা যায় এবং লম্ব ও আবর্তন অক্ষের ছেদবিন্দু সাপেক্ষে কণার কৌণিক বেগ দেখা যায়, তবে সব কণার কৌণিক বেগই সমান হইবে। এই বেগকে **দৃঢ় বস্তুটির আবর্তন অক্ষ সাপেক্ষে কৌণিক বেগ ভেক্টর** ω বলা হয়। এখানে মনে রাখিতে হইবে ω ভেক্টরটি মূল বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না।

ω ভেক্টরের দিক্ আবর্তন অক্ষ বরাবর ধরা হয়। ডান হাতের বুড়া আঙ্গুল আবর্তন অক্ষের সমান্তরালে সোজা রাখিয়া অন্যান্য আঙ্গুলগুলি মুঠা করিলে, মুঠা করা আঙ্গুলগুলি যদি বস্তুটির আবর্তনের দিক্ দেখায়,

3.5 চিত্র

তাহা হইলে ω থাকিবে বুড়া আঙ্গুল বরাবর (3.5 চিত্র)। অক্ষের উপর অবস্থিত কোন মূল বিন্দু সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুটির কোন কণার স্থান ভেক্টর যদি **r** হয় তবে কণার বেগ **v**-র মান হইবে $v = \omega r \sin\theta$ এবং উহার দিক্ ω ও **r** যে সমতলে তাহার অভিলম্বে হইবে। অর্থাৎ

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{3-8.3}$$

3-9. গতিবিজ্ঞান (Dynamics)। 3-3 হইতে 3-8 অনুচ্ছেদ পর্যন্ত আমরা গতির জ্যামিতিক আলোচনাই করিয়াছি ; উহাতে গতির কারণ সম্বন্ধে কিছু বলা হয় নাই। গতিবিজ্ঞানের প্রধান কাজ হইল বল দেওয়া থাকিলে গতি নির্ণয় করা, বা উহার বিপরীত অর্থাৎ গতি দেওয়া থাকিলে বল নির্ণয় করা। ইহা করিতে বল ও গতির মধ্যে সম্পর্কের দরকার। নিউটনের গতিবিষয়ক সূত্রে, বিশেষ করিয়া দ্বিতীয় সূত্রে, ইহা পাওয়া যায়।

স্থিরমান m ভরের কণার ভেক্টর বেগ $\mathbf{v}$ হইলে, উহার ভেক্টর ভরবেগ $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$। ভেক্টর বল $\mathbf{F}$ উহার উপর ক্রিয়া করিলে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে সময়ের সহিত ভেক্টর ভরবেগ $\mathbf{p}$-র পরিবর্তনের হার, অর্থাৎ $d\mathbf{p}/dt\ (=\dot{\mathbf{p}})$, $\mathbf{F}$-এর সমানুপাতিক হইবে। ইহা হইতে পাওয়া যায় $\mathbf{F}=k\dot{\mathbf{p}}$; এখানে k একটি স্থিরসংখ্যা। এককের যে কোন পদ্ধতিতে $k=1$ নিলে $\mathbf{F}$-এর বিশুদ্ধ (absolute) একক পাওয়া যায়। এইভাবে লেখা যায়

$$\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt=m\,d\mathbf{v}/dt=m\mathbf{a} \qquad (3\text{-}9.1)$$

এখানে $\mathbf{a}$ কণার ত্বরণ, এবং উহা $\mathbf{F}$-এর অভিমুখী। ইহাই নিউটনীয় গতিবিজ্ঞানের মূলসূত্র।

কণার স্থানাংক (coordinates), এবং কোন কোন ক্ষেত্রে উহার বেগের উপর, $\mathbf{F}$ কিভাবে নির্ভর করে তাহা জানা থাকিলে 3-9.1 সমীকরণ হইতে $\mathbf{a}$-র তিনটি উপাংশের জন্য তিনটি দ্বিতীয়ক্রমের অবকল সমীকরণ (second order differential equation) পাওয়া যায়। উহার যে কোন একটিকে কাল সাপেক্ষে দুইবার সমাকলন (integration) করিলে কণার সরণের একটি উপাংশ পাওয়া যাইবে। দুইবার সমাকলনে দুটি সমাকলন-অচর (constant of integration) আসে। তিনটি সমীকরণে এইরূপ মোট ছয়টি অচর রাশি (constant) আসে। কোন মুহূর্তে কণার $\mathbf{r}$ ও $\mathbf{v}$ জানা থাকিলে উহাদের ছয়টি উপাংশ হইতে অচর রাশি ছয়টির মান বাহির করা যায়। এইভাবে কণার গতিপথ সম্পূর্ণভাবে নির্ণীত হইতে পারে। কণা সরলরেখায় চলিলে মাত্র দুটি অচর রাশি থাকিবে। গতি সমতলে হইলে অচর রাশি থাকিবে চারটি।

m-এর মান স্থির না থাকিলে, বিশেষ করিয়া উহা v-র সহিত বদলাইলে, $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ ধরা চলে না। কণার বেগ আলোর বেগের সহিত তুলনীয় হইলে v-র উপর m-এর নির্ভর অনুভাব্য হয়। ইহা বিশিষ্ট আপেক্ষিকতা-বাদের (Special theory of relativity) আলোচ্য বিষয়। রকেট

(rocket) ইত্যাদিতে জেটের (jet) নিষ্ক্রমণের জন্য m সময়ের সঙ্গে বদলায়। আমরা ইহাদের কোনটিই আলোচনা করিব না।

গতিবিজ্ঞানের তিনটি প্রধান অংশ। উহার একটি কণাবিষয়ক, একটি দৃঢ়বস্তুবিষয়ক ও তৃতীয়টি বিরূপণেয় (deformable) বস্তুবিষয়ক। আমরা প্রথম দুটির মৌলিক তথ্যগুলির কিছু কিছু আলোচনা করিব।

3-10. বলের কাল-সমাকল: ঘাত বল (Time integral of force: Impulsive forces)। কালের কোন প্রদত্ত অবসরে কোন কণার উপর ক্রীয়াশীল বল **F**-এর ঘাত (Impulse) বলিতে কাল সাপেক্ষে ঐ অবসরে বলের নিশ্চিত সমাকল (definite integral) বুঝায়। t_1 হইতে t_2 এই অবসর হইলে, **F** বলের ঘাত

$$\mathbf{I}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt=\int_{t_2}^{t_2}\frac{d\mathbf{p}}{dt}\,dt=\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1=m\mathbf{v}_2-m\mathbf{v}_1 \qquad (2\text{-}10.1)$$

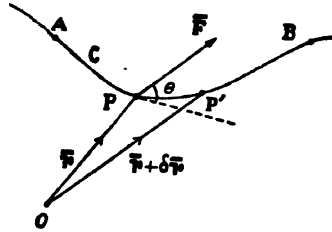
দেখা যায়, প্রদত্ত অবসরে বলের ঘাত ঐ অবসরে কণার ভরবেগের পরিবর্তনের সমান। বলের ঘাত ভেক্টর রাশি।

জোরালো বল অতি অল্পক্ষণ ক্রিয়া করিলেও I-এর মান অনুভাব্য হইতে পারে। এরূপ বলকে ঘাতবল (Impulsive force) বলে। ঘাত বলের অতি অল্পকালীন ক্রিয়ায় কণার অনুভাব্য সরণ হয় না। কিন্তু উহার ভরবেগের পরিবর্তন হয়। স্বল্পস্থায়িতার জন্য ঘাতবল মাপা না যাইতে পারে, কিন্তু ইহা ভরবেগের যে পরিবর্তন ঘটায় তাহা দিয়া বলের ক্রিয়া জানা যায়।

বলের কাল সমাকলের (অর্থাৎ ঘাতের) সাহায্যে ঐ অবসরে বলের গড়মান **F** পাওয়া যায়, কারণ

$$\overline{\mathbf{F}}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt=\frac{m\mathbf{v}_2-m\mathbf{v}_1}{t_2-t_1} \qquad (3\text{-}10.2)$$

3-11. বলের পথ-সমাকল (Path integral of force)। মনে কর কোন কণার উপর ক্রিয়াশীল বল **F** এবং কণাটি C পথে (3.6 চিত্র) A হইতে B বিন্দুতে গেল। P ও P' C-বক্রের উপর খুব কাছাকাছি দুইটি বিন্দু এবং O সুবিধামত লওয়া কোন নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু। উহাদের স্থান-ভেক্টর $\overline{OP}\equiv\mathbf{r}$ এবং $\overline{OP'}\equiv\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$। তাহা হইলে $\overline{PP'}=\delta\mathbf{r}$।

F ও $\delta\mathbf{r}$-এর অদিশ গুণফল (Scalar product) $\mathbf{F}.\ \delta\mathbf{r}$ রাশিটিকে নিজ ক্রিয়াবিন্দু P হইতে P'-এ লইয়া যাইতে বল **F** দ্বারা কৃত কার্য (work) বলে। কার্য অদিশ বা স্কেলার রাশি। বক্রের কোন স্থিরবিন্দু

3.6 চিত্র

হইতে বক্র বরাবর দূরত্বকে s বলিলে PP'-এর হ্রস্বতার জন্য $\overline{PP'} = \delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{s}$, এবং কার্য $\delta W = \mathbf{F}.\delta\mathbf{r} = \mathbf{F}.\delta\mathbf{s}$ লেখা যায়। PP'-এর সহিত **F** θ কোণে থাকিলে $\mathbf{F}.\delta\mathbf{r} = \mathbf{F}.\delta\mathbf{s} = F\ \delta s \cos\theta$। P বিন্দুতে C বক্রের স্পর্শক বরাবর **F** বলের উপাংশ হইল $F \cos\theta$। অতএব কার্য δW হইল এই উপাংশ ও স্বল্প পথ (element of path length) δs-এর গুণফল।

C বক্রে কণাকে A হইতে B-তে লইয়া যাইতে **F** মোট যে পরিমাণ কার্য করে, সংজ্ঞা অনুসারে তাহার মান

$$W = \lim_{\delta\mathbf{r}\to 0} \sum_{A}^{B} \mathbf{F}.\ \delta\mathbf{r} = \int_{A}^{B} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

$$= \int_{A}^{B} \mathbf{F}.d\mathbf{s} = \int_{A}^{B} F \cos\theta\ ds \qquad (3\text{-}11.1)$$

F স্থিরমান হইতে হইবে এরূপ মনে করার কোন কারণ নাই। উহা কণার স্থানাংকের উপর নির্ভর করিতে পারে।

কোন অঞ্চল জুড়িয়া কোন প্রকার বল ক্রিয়া করিলে ঐ অঞ্চলকে বলক্ষেত্র (Field of force) বলে। ক্ষেত্রের যে কোন বিন্দুতে বল **F** ঐ বিন্দুর স্থানাংকের ফলন (function) হিসাবে জানা আছে বলিয়া মনে করা হয়। ক্ষেত্রে যে কোন C রেখা কল্পনা করিলে, $d\mathbf{l}$ যদি রেখাস্থ কোন বিন্দুতে রেখার স্বল্পাংশ এবং **F** ঐ বিন্দুতে বল হয়, তাহা হইলে **F** ও $d\mathbf{l}$-এর

স্কেলার গুণফলের সমাকলকে, অর্থাৎ $\int \mathbf{F}.d\mathbf{l}$ রাশিটিকে, ঐ বলের পথ-সমাকল বা রেখা-সমাকল (path integral or line integral) বলে (2-10.1 অনুচ্ছেদ দেখ)।

রেখার এক বিন্দু A হইতে অন্য বিন্দু B পর্যন্ত পথ-সমাকল নিশ্চিত সমাকল $\int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{l}$ আকারে প্রকাশ করা হয়। রেখার যে কোন কণার স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$ হইলে $\delta\mathbf{l}\to 0$ সীমায় $d\mathbf{l}=d\mathbf{r}$ হয়। অতএব সমাকল্য (integrand) $\mathbf{F}.d\mathbf{l}$ বা $\mathbf{F}.d\mathbf{r}$ লেখা যায়। এই নিশ্চিত সমাকলের মান A ও B যোগকারী রেখার উপরে নির্ভর করিবে কি করিবে না, তাহা বল $\mathbf{F}$-এর প্রকৃতির উপর নির্ভর করে। কোন বলের পথ-সমাকল A ও B যোগকারী রেখার উপরে নির্ভর না করিয়া কেবল A ও B বিন্দুর উপর নির্ভর করিলে, ঐ বলকে **সংরক্ষী বল** (**Conservative force**) বলে।

বলক্ষেত্রে কণার গতিপথের কোন P বিন্দুতে উহার বেগ যদি $\mathbf{v}$ হয়, তাহা হইলে

$$\mathbf{F}.d\mathbf{r}=m(d\mathbf{v}/dt).(\mathbf{v}\ dt)=m\mathbf{v}.d\mathbf{v}=m\ d(\tfrac{1}{2}v^2) \qquad (3\text{-}11.2)$$

অতএব কণাকে A হইতে B-তে লইয়া যাইতে $\mathbf{F}$ বল মোট যে কার্য করে তাহার মান

$$\int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\Big[\tfrac{1}{2}mv^2\Big]_A^B=\tfrac{1}{2}mv_B^2-\tfrac{1}{2}mv_A^2 \qquad (3\text{-}11.3)$$

কণাকে একবিন্দু হইতে অন্যবিন্দুতে লইয়া যাইতে বল মোট যে কার্য করে, বলের পথ-সমাকল তাহাই মাপে। পথ-সমাকলকে পথের দূরত্ব দিয়া ভাগ করিলে ঐ পথে প্রদত্ত দুই বিন্দুর মধ্যে বলের গড়মান পাওয়া যায়।

গতিশক্তি (**Kinetic energy**)। $T=\tfrac{1}{2}mv^2$ রাশিকে কণার গতিশক্তি বলে। ইহার মাত্রা কার্যের মাত্রা। 3-11.3 সমীকরণ হইতে দেখা যায়, কণার গতিপথে A হইতে B বিন্দু পর্যন্ত পথ-সমাকল দুই বিন্দুর মধ্যে কণার গতিশক্তি বৃদ্ধির সমান।

ক্ষমতা (**Power**) বলিতে সময় সাপেক্ষে কার্য করিবার হার বুঝায়। অতএব ক্ষমতা

$$A=\mathbf{F}.d\mathbf{r}/dt=\mathbf{F}.\mathbf{v} \qquad (3\text{-}11.4)$$

কার্যের মত ইহাও স্কেলার রাশি। তা ছাড়া,

$$dT/dt=d\,(\tfrac{1}{2}mv^2)\,/dt=\mathbf{v}.m\ d\mathbf{v}/dt=\mathbf{F}.\mathbf{v}=A \qquad (3\text{-}11.5)$$

অর্থাৎ সময় সাপেক্ষে গতিশক্তি পরিবর্তনের হার ক্ষমতার সমান।

প্রশ্ন। দেখাও যে
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}.\mathbf{v}\, dt = T_2 - T_1$$

3-12. সংরক্ষী বল (Conservative forces)। কোন কোন বল আছে যাহা বলক্ষেত্রের এক বিন্দু A হইতে অন্য কোন বিন্দু B-তে কোন কণা সরাইতে যে কার্য করে তাহা যে পথে কণা A হইতে B-তে গেল তাহার উপর নির্ভর না করিয়া কেবল A ও B বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে। এরূপ বলকে **সংরক্ষী বল** বলে। এরূপ বলক্ষেত্রে কণা যদি C_1 পথে A হইতে B-তে যায় এবং অন্য কোন C_2 পথে B হইতে A-তে ফিরিয়া আসে, তাহা হইলে যাতায়াতের এই পূর্ণচক্রে বলের করা মোট কার্যের মান হইবে শূন্য। C_1 ও C_2 দ্বারা গঠিত বদ্ধপথকে (closed curve) আমরা C_0 বলিব। অতএব বলা যায় কোন সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে যে কোন বদ্ধ পথে বল দ্বারা কৃত কার্যের মান শূন্য। সংকেতে লেখা যায়

$$\oint_{C_0} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0$$

$\oint_C$ চিহ্নটি বদ্ধ পথ C_0-তে লওয়া সমাকল বুঝায়, অর্থাৎ উহা C_1 পথে A হইতে B পর্যন্ত নিশ্চিত সমাকল এবং C_2 পথে B হইতে A পর্যন্ত নিশ্চিত সমাকলের যোগফল।

$$\oint_{C_0} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{C_1\,\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{F}.d\mathbf{r} + \int_{C_2\,\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \mathbf{F}.d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}12.2)$$

স্টোক্‌সের সূত্র (Stokes' theorem ; 2-11.3 অনুচ্ছেদ দেখ) হইতে জানা আছে বদ্ধপথে কোন ভেক্টরের পথ সমাকল, এবং ঐ পথ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র S ভেদ করিয়া ঐ ভেক্টরের curl-এর যে ফ্লাক্‌স্ (flux) যায়, তাহারা সমান। অতএব আলোচ্য ক্ষেত্রে স্টোক্‌স সূত্র হইতে দেখা যায়

$$\oint_{C_0} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int\int_S \mathrm{curl}\ \mathbf{F}.d\mathbf{S} = 0 \qquad (3\text{-}12.3)$$

বদ্ধপথ C_0 যেভাবে ইচ্ছা নেওয়া যায়। ইহার অর্থ, S আমরা ইচ্ছামত

নিতে পারি। এরূপ অবস্থায় সমাকলের মান যদৃচ্ছ হইতে পারে, অথচ 3-12.3 অনুসারে সমাকলের মান শূন্য হইবে। সমাকল্যের মান সর্বত্র শূন্য হইলে, অর্থাৎ curl $\mathbf{F}=0$ হইলেই ইহা সম্ভব। অতএব সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রের সর্বত্র

$$\text{curl } \mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (\text{2-9.3 অনুচ্ছেদ}) \tag{3-12.4}$$

মনে কর V রাশিটি বলক্ষেত্রের স্থানাংকের কোন স্কেলার ফলন (function) বুঝায়। এরূপ হইলে curl grad $V=0$, অর্থাৎ curl grad V-র মান সর্বথা শূন্য হইবে (2-9.5 অনুচ্ছেদের শেষে প্রথম প্রশ্নটি দেখ)। অতএব $\mathbf{F}$-কে আমরা এইরূপ কোন ফলনের গ্রেডিয়েন্ট (2-9 ও 2-9.1 অনুচ্ছেদ দেখ) বলিয়া ধরিতে পারি। (2-10.1 অনুচ্ছেদের শেষের অংশও দেখ)। সাধারণতঃ লেখা হয়

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V \tag{3-12.5}$$

আমাদের পরিচিত গতীয় কোন রাশির সহিত V-কে সমার্থক করার উদ্দেশ্যে (পরের অনুচ্ছেদ দেখ) এই বিয়োগচিহ্নটি রাখা হয়।

এখানে বলা উচিত যে 3-12.1, 3-12.4 বা 3-12.5 সমীকরণ তিনটির যে কোনটিকে সংরক্ষী বলের সংজ্ঞা হিসাবে নেওয়া যায়। উহাদের যে কোন একটি হইতে অন্য দুইটি পাওয়া যায়। তবে V-র সাহায্যে সংরক্ষী ক্ষেত্রের বর্ণনা $\mathbf{F}$-এর সাহায্যে বর্ণনার তুলনায় সুবিধার, কারণ V স্কেলার রাশি।

কোন বলক্ষেত্রের যে কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারেখা (line of action) যদি একটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দু দিয়া যায়, অর্থাৎ সর্বস্থানেই বল যদি ঐ বিন্দু অভিমুখী বা উহার বিপরীতমুখী থাকে, তাহা হইলে এ প্রকার বলকে কেন্দ্রগ বল (central force) বলে। ঐ স্থিরবিন্দুকে মূলবিন্দু এবং স্থান ভেক্টরের অভিমুখে $\mathbf{r}_1$-কে ঐকিক ভেক্টর ধরিলে কেন্দ্রগ বল $\mathbf{F}=\mathbf{r}_1 f(r)$* লেখা যায়। $f(r)$ r-এর উপর বলের নির্ভরের রূপ প্রকাশ

* $\mathbf{F}=\mathbf{r}_1 f(r)$ হইতে বোঝা যায় বল কেন্দ্রগ এবং উহার মান কেবল r-এর উপর নির্ভর করে ; r-এর দিকের উপর নয়। অতএব কেন্দ্র হইতে সমান দূরে বলের মান সমান। এরূপ বল কেন্দ্র সাপেক্ষে প্রতিসম (symmetrical) এবং ইহাকে centro-symmetrical central force বলে। বল r-এর মান ও দিক্ উভয়ের উপরেও নির্ভর করিতে পারে। r সমান থাকিলেও এরূপ কেন্দ্রগ বলের মান দিকের সঙ্গে বদলাইতে পারে। এক্ষেত্রে লিখিতে হয় $\mathbf{F}=\mathbf{r}_1 f(\mathbf{r})$। $\mathbf{F}$-এর এই ব্যঞ্জক (expression) আগেরটির চেয়ে ব্যাপকতর এবং যে-কোন কেন্দ্রগ বল এইভাবে প্রকাশ করা যায়। ইহা central force-এর যথার্থ ব্যঞ্জক ; আগেরটি বিশেষ ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। ক্ষেত্র অসমদৈশিক (anisotropic) হইলে পরের ব্যঞ্জকটিই নিতে হয়। আমরা কেবল সমদৈশিক (isotropic) ক্ষেত্র লইয়া আলোচনা করিব বলিয়া আমাদের আগের ব্যঞ্জকটি নিলেই চলিবে।

করে। সোজাসুজি হিসাব করিয়া দেখান যায় $f(r)$ যে প্রকারই হউক না কেন curl $\mathbf{r}_1 f(r)=0$ হইবে (2-9.3 অনুচ্ছেদের শেষে দ্বিতীয় প্রশ্নটি দেখ)। কাজেই সকল প্রকার কেন্দ্রগ বল সংরক্ষী। ইহাদের দুই প্রকার বলের সহিত পদার্থ বিজ্ঞানের গোড়াতেই পরিচয় ঘটে। একটি হইল সরল দোলগতির (simple harmonic motion) প্রত্যানয়ক (restoring) বল ; এক্ষেত্রে $f(r)=-kr$ বা $\mathbf{F}=-k\mathbf{r}$। দ্বিতীয়টি হইল স্থির বৈদ্যুত, চৌম্বক ও মহাকর্ষীয় বল। ইহাদের ক্ষেত্রে $f(r)=k/r^2$ বা $\mathbf{F}=\mathbf{r}_1(k/r^2)=(k/r^3)\,\mathbf{r}$। আকর্ষণের ক্ষেত্রে k নিগেটিভ রাশি।

3-13. স্থিতিশক্তি (Potential energy)। সংরক্ষী বলক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে স্থিতিশক্তি $V(\mathbf{r})$ বলিতে ঐ বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট স্থিরবিন্দু পর্যন্ত কোন কণাকে লইয়া যাইতে ক্ষেত্রস্থ বল যে কার্য করে তাহা বুঝায়। অধিকাংশ ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট স্থিরবিন্দুটি অনন্ত দূরত্বে অবস্থিত বলিয়া ধরা হয়। আলোচ্য P বিন্দুতে $\overline{OP}\equiv\mathbf{r}$ এবং স্থির P_0 বিন্দুতে $\overline{OP_0}\equiv\mathbf{r}_0$ হইলে P বিন্দুতে স্থিতিশক্তি।

$$V(\mathbf{r})=\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0}\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P}_0}(F_x dx+F_y dy+F_z dz)$$

$$-\int_{P_0}^{P}(F_x dx+F_y dy+F_z dz) \tag{3-13.1}$$

কণাকে স্থিরবিন্দু P_0 হইতে আলোচ্য P বিন্দুতে আনিতে বলের বিরুদ্ধে, অর্থাৎ বলক্ষেত্রের উপরে (on the field) যে কার্য হয়, শেষোক্ত সমাকল তাহাই বুঝায়।

V রাশিটি কণার স্থানাংক x, y, z-এর ফলন (function) বলিয়া লেখা যায়

$$dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz$$

3-13.1. সমীকরণ হইতে পাই

$$dV=-(F_x dx+F_y dy+F_z dz)$$

dx, dy, dz-এর মান ইচ্ছামত হইতে পারে বলিয়া শেষ দুইটি সমীকরণ তুলনা করিয়া পাই

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x},\ F_y=-\frac{\partial V}{\partial y},\ F_z=-\frac{\partial V}{\partial z} \tag{3-13.2}$$

অতএব ভেক্টর সংকেতনে (notation) লেখা যায়

$$\mathbf{F}=\mathbf{i}F_x+\mathbf{j}F_y+\mathbf{k}F_z=-\left(\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$=-\text{grad } V. \quad (3\text{-}13.3)$$

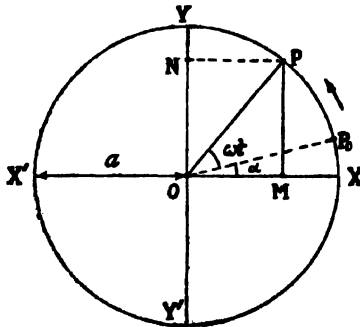
ইহা 3-12.5 সমীকরণের সহিত অভিন্ন। অতএব 3-12 অনুচ্ছেদের স্কেলার রাশি V স্থিতিশক্তি বুঝায়। বলা দরকার যে প্রামাণ্য অবস্থান (standard position) P_0-তে স্থিতিশক্তি $V(\mathbf{r}_0)=0$ ধরা হয়। চলিত রীতিতে $r_0 \to \infty$ ধরা হয়, অর্থাৎ পরস্পর ক্রিয়াশীল কণার মধ্যে অনন্ত দূরত্ব থাকিলেই তবে উহা শূন্য স্থিতিশক্তির অবস্থান বলিয়া ধরা হয়।

3-14. শক্তির সংরক্ষণ (Conservation of energy)। 3-13.3 সমীকরণ হইতে লেখা যায়

$$\mathbf{F}.d\mathbf{r}=-\text{grad } V.d\mathbf{r}=-\{(\partial V/\partial x)dx+(\partial V/\partial y)\,dy$$
$$+(\partial V/\partial z)\,dz\}=-dV \quad (3\text{-}14.1)$$

$$\therefore \quad \int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{r}=-\int_A^B dV=V_A-V_B$$

3-11.3 সমীকরণে পাওয়া গিয়াছে

$$\int_A^B \mathbf{F}.dr=\tfrac{1}{2}mv_B^2-\tfrac{1}{2}mv_A^2$$

3.7 চিত্র

অতএব $V_A-V_B=\tfrac{1}{2}mv_B^2-\tfrac{1}{2}mv_A^2$

$$\text{বা} \quad \tfrac{1}{2}mv_A^2+V_A=\tfrac{1}{2}mv_B^2+V_B \quad (3\text{-}14.2)$$

ইহা হইতে দেখা যায় সংরক্ষী বলক্ষেত্রে কোন কণার গতিপথের যে কোন দুই বিন্দুতে কণার গতি ও স্থিতি শক্তির যোগফল স্থির থাকে। গতিবিজ্ঞানে শক্তির সংরক্ষণ বলিতে এই তথ্য বুঝায়। সংরক্ষী বলের ক্রিয়াধীন গতিতে মোট শক্তি $E=T+V$ গতির একটি অচর রাশি (constant of motion)।

3-15. সরল দোলগতি বা সরল সমঞ্জস দোলন (Simple harmonic motion)। যে কোন ব্যাসরেখায় বৃত্তপথে সুষম (uniform) আবর্তনের প্রক্ষেপ (projection বা অভিক্ষেপ)-কে **শুদ্ধগতিবিজ্ঞানে** সরল দোলগতির সংজ্ঞা বলিয়া ধরা হয়।

বৃত্তপথে সুষম আবর্তনের কৌণিক বেগ ω, বৃত্তের ব্যাসার্ধ a ও বৃত্তের কেন্দ্র O-কে (3.7 চিত্র) মূলবিন্দু ধরা যাক। মনে কর $t=0$ মুহূর্তে আলোচ্য সচল বিন্দু P_0-তে ছিল, বিন্দুর গতি বামাবর্তে এবং $\angle P_0OX=\alpha$। t সময়ে সচল বিন্দু P-তে আসিলে $X'OX$ রেখায় উহার গতির অভিক্ষেপ OM। অতএব $X'OX$ রেখায় বৃত্তের কেন্দ্র হইতে মাপা সরণ

$$x=a\cos(\omega t+\alpha) \qquad (3\text{-}15.1)$$

YOY' রেখায় গতির অভিক্ষেপ লইলে, সরণ হইবে

$$y=a\sin(\omega t+\alpha) \qquad (3\text{-}15.2)$$

সচল বিন্দু বৃত্তপথে ঘুরিয়া চলিলে উহা হইতে $X'OX$ রেখায় টানা লম্বের পাদ M বৃত্তের $X'OX$ ব্যাসের দুই প্রান্ত X ও X'-এর মধ্যে যাতায়াত করিতে থাকিবে। P বিন্দু এক পাক খাইলে M একটি দোলন নিষ্পন্ন করে। উভয়ের পর্যায়কাল (periodic time) $T=2\pi/\omega$। a-কে দোলনের বিস্তার (amplitude), $(\omega t+\alpha)$ কোণকে **দশাকোণ** (phase angle) এবং α কোণকে **আদিদশা** (initial phase বা epoch) বলা হয়। গতির পূর্ণাঙ্গ বর্ণনার জন্য এই তিনটি রাশিরই দরকার হয়।

গতিবিজ্ঞানে, যে বলের ক্রিয়ায় সরল দোলগতি হয় সেই বলের সাহায্যে গতির সংজ্ঞা দেওয়া হয়। ইহাতে বলা হয়, 'কোন কণার উপর ক্রিয়াশীল বল সর্বদা একটি নির্দিষ্ট স্থিরবিন্দু অভিমুখী ও ঐ বিন্দু হইতে কণার দূরত্বের সমানুপাতিক হইলে, এবং গতি একটি সরলরেখায় সীমিত থাকিলে কণার যে প্রকার গতি হয় তাহাই সরল দোলগতি।' এই প্রকার বলকে প্রত্যানয়ক (restoring) বল বলে। সংক্ষেপে বলা যায়, 'সরণের সমানুপাতিক প্রত্যানয়ক বলের ক্রিয়ায় গতিই সরল দোলগতি।'

কণার ভর m এবং একক (unit) সরণে ক্রিয়াশীল বল s হইলে, নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -sx \text{ বা } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{s}{m}x = 0$$

$s/m = \omega^2$ লিখিয়া পাই

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (3\text{-}15.3)$$

ইহাই সরল দোলগতির অবকল সমীকরণ (differential equation)। সমীকরণটি রৈখিক (linear), দ্বিতীয়ক্রমের (second order), সমঘাত (homogenous) এবং স্থির গুণাংকের (of constant coefficients)। ইহার সর্বক্ষেত্রীয় সমাধান (general solution) নিচের যে কোনভাবে লেখা যায়

$$\left.\begin{aligned} &x = a\cos(\omega t + \alpha),\ x = a\sin(\omega t + \alpha) \\ &x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}15.4)$$

দ্বিতীয়ক্রমের অবকল সমীকরণের সর্বক্ষেত্রীয় সমাধানে দুইটি স্বৈচ্ছিক রাশি থাকিতেই হইবে। 3-15.4-এ a, α বা A, B এরূপ স্বৈচ্ছিক রাশি। গতির কোন মুহূর্তে (সাধারণতঃ $t=0$-তে) সরণ ও বেগ জানা থাকিলে ইহাদের সহজেই বাহির করা যায়।

প্রশ্ন। (i) সরল দোলনের গতির সমীকরণ $x = a\cos(\omega t + \alpha)$ হইলে, এবং $t=0$ মুহূর্তে $x = x_0$ ও $v = v_0$ হইলে প্রমাণ কর যে

$\tan\alpha = -v_0/\omega x_0$, এবং $a = \sqrt{(v_0^2 + \omega^2 x_0^2)}/\omega$.

(ii) $x = a\sin(\omega t + \alpha)$ এবং $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ধরিয়া a, α এবং A, B-র মান বাহির কর।

[উত্তর : $\tan\alpha = \omega x_0/v_0$; $a = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0^2}/\omega$.
$A = x_0$, $B = v_0/\omega$.]

শক্তি সংরক্ষণ। সরল দোলগতির জনয়িতা প্রত্যানয়ক বল কেন্দ্রগ বলিয়া উহা সংরক্ষী (§ 3-12)। অতএব এই বলের ক্রিয়ায় চলন্ত কণার গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফলসমান থাকিবে (§ 3-14)। ইহা সোজাসুজি সহজেই প্রমাণ করা যায়। কণার ভর m ও উহার গতির সমীকরণ $x = a\cos(\omega t + \alpha)$ হইলে, উহার গতিশক্তি

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 = \tfrac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t + \alpha) \qquad (3\text{-}15.5)$$

সরণ x হইলে প্রত্যানয়ক বল $-sx$ । এই অবস্থানে সরণ dx বাড়িলে বলের বিরুদ্ধে কৃত কার্য $=sx.dx$ । সরণ 0 হইতে x হইলে বলের বিরুদ্ধে মোট যে কার্য হইবে তাহাই কণার স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি V । কণা $x=0$-তে থাকিলে উহার স্থিতিশক্তি যদি শূন্য ধরা হয়, তবে, $s=m\omega^2$ বলিয়া

$$V=\int_0^x sxdx=\tfrac{1}{2}sx^2=\tfrac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2(\omega t+\alpha) \qquad (3\text{-}15.6)$$

অতএব, মোট শক্তি

$$E=T+V=\tfrac{1}{2}\,m\,a^2\omega^2 \qquad (3\text{-}15.7)$$

3-16. অবমন্দিত সমঞ্জস দোলন (Damped harmonic vibration)। গত অনুচ্ছেদে আলোচিত সরল দোলনে বিস্তার সময়ের সঙ্গে বদলায় না। বিস্তার স্থির রাখিয়া দোলন অবিরাম চলিতে থাকে। কিন্তু যে কোন স্বাভাবিক দোলনে বিস্তার ক্রমশঃ কমিয়া আসে। বাস্তব দোলনে প্রত্যানয়ক বল ছাড়া গতিতে বাধা দেয় এমন বলও থাকে। বায়ুতে কোন দোলক দুলিতে থাকিলে, বায়ুর সহিত ঘর্ষণ, বায়ুর ও দোলকের লম্বন সূত্রের সান্দ্রতা (viscosity), প্রভৃতির জন্য দোলকের গতিতে কিছু বাধার সৃষ্টি হয়। ইহাতে বিস্তার ক্রমে কমিয়া আসে।

সচল কণার বেগ কম থাকিলে এরূপ বাধার বল কণার সাময়িক বেগ dx/dt-র আনুপাতিক বলিয়া ধরা যায়। ঐকিক বেগে (unit velocity-তে) বাধার বলের মান r হইলে, dx/dt বেগে বাধার বল $=-rdx/dt=-r\dot{x}$ লেখা যায়। এই বল সর্বদা বেগের বিপরীতে ক্রিয়া করে বলিয়া বিয়োগ চিহ্ন দেওয়া দরকার। অতএব, প্রত্যানয়ক বল $-sx$ ধরিলে, নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে কণার গতির অবকল সমীকরণ হইবে

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-sx-r\frac{dx}{dt} \text{ বা } \ddot{x}+\frac{r}{m}\dot{x}+\frac{s}{m}x=0 \qquad (3\text{-}16.1)$$

$$r/m=2\alpha \text{ এবং } s/m=\omega^2 \qquad (3\text{-}16.2)$$

ধরিলে লেখা যায়

$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega^2x=0 \qquad (3\text{-}16.3)$$

সরল দোলনের 3-15.3 সমীকরণের মত ইহাও দ্বিতীয় ক্রমের, রৈখিক, সমঘাত ও স্থির গুণাংকের সমীকরণ। দ্বিতীয় পদটি ইহাতে বেশী।

ইহার সমাধান একাধিক উপায়ে পাওয়া যাইতে পারে। আমরা বিচারাধীন ভাবে ইহার সমাধান

$$x=f(t)e^{-\alpha t} \qquad (3\text{-}16.4)$$

ধরিব। এখানে $f(t)$ কাল t-র ফলন বুঝায়। ইহা হইতে $\dot{x}$ ও $\ddot{x}$-এর মান বাহির করিয়া 3-16.3 সমীকরণে বসাইলে সমীকরণ যদি মেলে তাহা হইলে মনে করিতে হইবে এই 'পরখ সমাধান' (trial solution) গ্রহণীয়। সমাধানে দুইটি স্বৈচ্ছিক রাশি থাকিলে উহা সর্বক্ষেত্রীয় সমাধান হইবে।

3-16.4 হইতে পাই

$$\dot{x}=\dot{f}e^{-\alpha t}-\alpha fe^{-\alpha t}$$

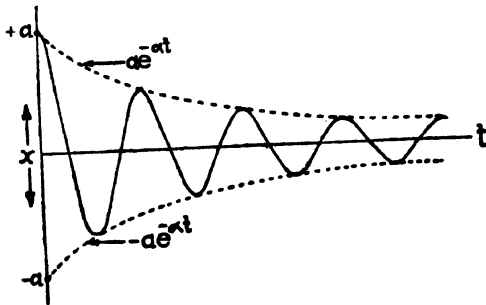
ও $$\ddot{x}=\ddot{f}e^{-\alpha t}-2\alpha\dot{f}e^{-\alpha t}+\alpha^2 fe^{-\alpha t}$$

3-16.3 সমীকরণে এই মান বসাইয়া সরল করিলে পাওয়া যায়

$$\frac{d^2f}{dt^2}+(\omega^2-\alpha^2)f=0 \qquad (3\text{-}16.5)$$

α, ω অপেক্ষা ছোট, ω-র সমান বা ω অপেক্ষা বড় হইলে তিন ক্ষেত্রে f-এর রূপ তিন প্রকার হয়।

(i) $\alpha<\omega$, অর্থাৎ $r/2m<\sqrt{s/m}$ বা $r<\sqrt{4sm}$।

এক্ষেত্রে বাধা দুর্বল। 3-16.5 সমীকরণকে 3-15.3 সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করিলে দেখা যায় f ও t-র সম্পর্ক সরল দোলনের এবং উহার

3.8 চিত্র

পর্যায় কাল $T=2\pi/\sqrt{\omega^2-\alpha^2}$। অতএব $\alpha<\omega$ হইলে লেখা যায় $f=a\cos(\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\,t+\epsilon)$ এবং 3-16.3 সমীকরণের সমাধান

$$x=ae^{-\alpha t}\cos(\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\,t+\epsilon). \qquad (3\text{-}16.6)$$

a এবং ϵ স্বেচ্ছিক রাশি, এবং ইহাই সর্বক্ষেত্রীয় সমাধান। এ প্রকার গতিকে **অবমন্দিত দোলন** (damped oscillation) বলে। গতির প্রকৃতি 3.8 চিত্রে দেখান হইয়াছে। $ae^{-\alpha t}$ রাশিটিকে দোলনের বিস্তার ধরা যায়। ইহা সময়ের সহিত কমে ; α যত বড় হয় ইহা তত দ্রুত কমে। দোলনে সরণ $ae^{-\alpha t}$ ও $-ae^{-\alpha t}$ সীমার মধ্যে থাকে।

(ii) $\alpha=\omega$, অর্থাৎ $r=\sqrt{4sm}$। এ ক্ষেত্রে অবমন্দনকে **ক্রান্তিক অবমন্দন** (critical damping) বলে। $\alpha=\omega$ হওয়ায় 3-16.5 সমীকরণ হইয়া দাঁড়ায় $\ddot{f}=0$। ইহার সমাধান $f=A+Bt$; A ও B স্বেচ্ছিক রাশি। অতএব ক্রান্তিক অবমন্দনে সর্বক্ষেত্রীয় সমাধান

$$x=(A+Bt)\,e^{-\alpha t} \tag{3-16.7}$$

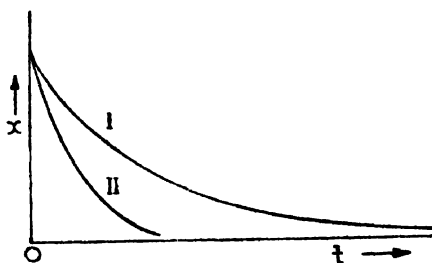
3.9 চিত্রের II চিহ্নিত বক্র গতির প্রকৃতি বুঝায়। এক্ষেত্রে সরণ সবচেয়ে দ্রুত কমিয়া আসে। গতিতে দোলন থাকে না।

(iii) $\alpha>\omega$, অর্থাৎ $r>\sqrt{4sm}$। এ ক্ষেত্রে বাধা জোরাল। 3-16.5 সমীকরণের $\omega^2-\alpha^2$ রাশি নিগেটিভ বলিয়া ইহার সমাধান।

$$f=Ae^{\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t}+Be^{-\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t}$$

A ও B স্বেচ্ছিক রাশি। অতএব বাধা জোরাল হইলে গতির সমাধান

$$x=e^{-\alpha t}\left(Ae^{\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t}+Be^{-\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t}\right) \tag{3-16.8}$$

এই গতিকে **অতিমন্দিত** (overdamped) গতি বলে। ইহার প্রকৃতি 3.9

3.9 চিত্র

চিত্রে I চিহ্নিত বক্রের মত। সরণ আস্তে আস্তে কমিয়া আসে। কমার হার ক্রান্তিক অবমন্দনের হারের চেয়ে কম।

(ii) ও *(iii)* ক্ষেত্র দুইটিতে গতিকে দোলহীন (aperiodic) বলে।

$t=0$ মুহূর্তে x ও $\dot{x}$-এর মান জানা থাকিলে উহাদের সাহায্যে a, ϵ বা A, B-র মান বাহির করা যায়।

প্রশ্ন। (1) অবমন্দিত দোলনে আদি মুহূর্তে ($t=0$) সরণ $x=x_0$ ও বেগ $\dot{x}=0$ হইলে সরণের সমীকরণ কি হইবে? [উত্তর: সুবিধার জন্য $\sqrt{\omega^2-\alpha^2}=p$ লিখিলে, $x=(\omega x_0/p)e^{-\alpha t}\cos(pt-\tan^{-1}\alpha/p)$]

(2) অবমন্দিত দোলনে আদি মুহূর্তে সরণ $x=0$ এবং বেগ $\dot{x}=v_0$ হইলে সরণের সমীকরণ কি হইবে? [উত্তর: $x=(v_0/p)e^{-\alpha t}\sin pt$]

(3) 10 g ভরের কণার উপর প্রত্যায়নক বল 10 dyn/cm এবং বাধার বল 2 dyn s/cm ক্রিয়া করে।

(a) গতি দোলনী কি দোলহীন বাহির কর।

(b) বাধার বল কত হইলে অবমন্দন ক্রান্তিক হইবে?

(c) বল ঠিক থাকিলে কত ভরে অবমন্দন ক্রান্তিক হইবে?

(d) কণাকে সাম্যাবস্থায় 20 g cm/s ঘাত (impulse) দিলে উহার সরণের সমীকরণ কি হইবে?

(e) (d) প্রশ্নে বিস্তার অর্ধেক হইতে কত সময় লাগিবে?

[উত্তর: (a) দোলনী; (b) 20 dyn. s/cm; (c) 0.1 g;

(d) $x=(2/\sqrt{0.99})e^{-0.1t}\sin\sqrt{0.99}\,t$; (e) প্রায় 6 9 s]

(4) অবমন্দন ক্রান্তিক হইলে, এবং আদিতে কণার $x=0$ ও $\dot{x}=v_0$ হইলে উহার গতির সমীকরণ $x=v_0te^{-\omega t}$ হইবে প্রমাণ কর।

3-17. কণার কৌণিক ভরবেগ (Angular momentum of a particle)। m ভর ও v বেগের কণা উহার গতিপথের P বিন্দুতে থাকিলে, **কোন স্থির বিন্দু O সাপেক্ষে** কণার কৌণিক ভরবেগ বলিতে

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times(m\mathbf{v})=\mathbf{r}\times\mathbf{p} \qquad (3\text{-}17.1)$$

রাশিটি বুঝায়। এখানে $\mathbf{r}$ ঐ কণার O বিন্দু সাপেক্ষ স্থান ভেক্টর $\overline{OP}$ এবং $\mathbf{p}$ কণার রৈখিক ভরবেগ।

কৌণিক ভরবেগ $\mathbf{L}$ ভেক্টর রাশি; উহা $\mathbf{r}$ ও $\mathbf{p}$-র ভেক্টর গুণফল (2-6.2 ও 2-6.3 অনুচ্ছেদ দেখ)। $\mathbf{r}$ ও $\mathbf{p}$-র মধ্যবর্তী কোণ $\theta\ (<\pi)$ হইলে $\mathbf{L}$-এর মান $rp\sin\theta$। $\mathbf{L}$-এর দিক্ $\mathbf{r}$-$\mathbf{p}$ তলের অভিলম্বে। কোন দক্ষিণাবর্তী স্ক্রু $\mathbf{r}$ হইতে $\mathbf{p}$-র দিকে ঘুরাইলে স্ক্রুর মাথা যে দিকে আগায়, $\mathbf{L}$-এর তাহাই অভিমুখ। অথবা, ডান হাতের বুড়া আঙুল সোজা রাখিয়া অন্য আঙুলগুলি মুঠা করিলে মুঠা করা আঙুল যদি $\mathbf{r}$ হইতে $\mathbf{p}$-র দিকে বাঁকিয়া থাকে তাহা হইলে $\mathbf{L}$-এর অভিমুখ হইবে বুড়া আঙুলের গোড়া হইতে মাথার দিকে।

মনে রাখিতে হইবে যে কণার কৌণিক ভরবেগ O বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে। একই কণার কৌণিক ভরবেগ বিভিন্ন বিন্দু সাপেক্ষে বিভিন্ন হইবে। O বিন্দু সাপেক্ষে কণার কৌণিক বেগ $\dot{\phi}$ হইলে, 3-8.1 সমীকরণ অনুসারে আমরা লিখিতে পারি।

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mr^2\dot{\phi} \qquad (3\text{-}17.1a)$$

এই সমীকরণ দিয়া কৌণিক বেগের সঙ্গে কৌণিক ভরবেগের সম্পর্ক পাওয়া যায়।

উল্লিখিত কণার উপর ক্রিয়াশীল বল $\mathbf{F}$ হইলে

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

[2-8.2 d সমীকরণ দেখ

$$= \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ বলিয়া পাই

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} \qquad (3\text{-}17.2)$$

$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ রাশিটিকে O বিন্দু সাক্ষেপে $\mathbf{F}$ বলের 'ভ্রামক' (Moment) বলে।

দেখা গেল, কোন স্থির বিন্দু সাক্ষেপে কোন কণার কৌণিক ভরবেগ পরিবর্তনের হার ঐ বিন্দু সাক্ষেপে কণার উপর ক্রিয়াশীল বলের ভ্রামকের সমান।

3-17.2 সমীকরণে $\mathbf{F} = 0$ হইলে $\mathbf{L}$ স্থির থাকিবে, অর্থাৎ বল ক্রিয়া না করিলে যে কোন বিন্দু সাক্ষেপে কণার কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর অপরিবর্তিত থাকিবে। এই তথ্যকে কণার **কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র (Principle of conservation of angular momentum)** বলে।

বল ক্রিয়া করিলেও কোন অক্ষে $\mathbf{N}$-এর উপাংশের মান যদি শূন্য হয় তাহা হইলে ঐ অক্ষে $d\mathbf{L}/dt$-র উপাংশের মানও শূন্য হইবে, অর্থাৎ ঐ অক্ষে কৌণিক ভরবেগের উপাংশ অক্ষুণ্ণ থাকিবে।

পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা দেখিতে পাইব কেন্দ্রগ সকল বলের ক্ষেত্রেই কেন্দ্র সাক্ষেপে কণার কৌণিক ভরবেগ অক্ষুণ্ণ থাকে। প্রাকৃতিক বলের অধিকাংশই কেন্দ্রগ বলিয়া এই কারণে কৌণিক ভরবেগের সাহায্যে উহাদের ক্রিয়া আলোচনা অনেক সহজ হয়।

3-18. কেন্দ্রগ বলের ক্রিয়ায় গতি (Motion under central forces)। আগেই বলা হইয়াছে যে (§ 3-12) যে বল সর্বত্রই কোন স্থির বিন্দুর অভিমুখে বা তাহার বিপরীতে ক্রিয়া করে এবং যাহার মান কেবল ঐ স্থির বিন্দু হইতে দূরত্বের উপর নির্ভর করে, তাহাই কেন্দ্রগ বল। কেন্দ্রগ বলের ক্রিয়ায় কণা যে পথে চলে তাহাকে **কেন্দ্রীয় কক্ষ (Central orbit)** বলে।

স্থির বিন্দু হইতে দূরত্বকে $\mathbf{r}$ এবং উহার অভিমুখে ঐকিক ভেক্টরকে $\mathbf{r}_1$ লিখিলে, কেন্দ্রগ বলক্ষেত্রের

$$\left.\begin{array}{l}\text{স্থিতিশক্তি } V=\phi(\mathbf{r})\\ \text{এবং বল } \mathbf{F}=\mathbf{r}_1 f(r)=-\mathbf{r}_1 \dfrac{d\phi}{dr}\end{array}\right\} \qquad (3\text{-}18.1)$$

লেখা যায়। মহাকর্ষীয় বল আকর্ষক বলিয়া সে ক্ষেত্রে লেখা যাইবে

$$\mathbf{F}=\mathbf{r}_1 f(r)=-\mathbf{r}_1 (\mu/r^2)=-\mu\mathbf{r}/r^3.$$

মহাকর্ষে $\mu=Gm_1m_2$; এখানে G মহাকর্ষীয় নিত্যসংখ্যা এবং m_1 ও m_2 আকর্ষক ও আকৃষ্ট কণার ভর।

সকল প্রকার কেন্দ্রগ বল সংরক্ষী, ইহাও 3-12 অনুচ্ছেদে বলা হইয়াছে। $f(r)$-এর রূপ যাহাই হউক না কেন, $\text{curl } \mathbf{r}_1 f(r)=0$।

কেন্দ্রীয় কক্ষ একই সমতলে থাকে ইহা সহজেই দেখান যায়। কেন্দ্রগ বল $\mathbf{F}$ ও কণার বেগ $\mathbf{v}$ হইলে, কণার কক্ষ $\mathbf{F}$ ও $\mathbf{v}$ দ্বারা নির্ণীত তলেই থাকিবে, কারণ ঐ তলের অভিলম্বে কণার গতির কোন উপাংশ নাই।

3-18.1. কেন্দ্রগ বলের ক্রিয়ায় কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ। কেন্দ্রগ বলের ক্রিয়ায় কৌণিক ভরবেগ সর্বদাই সংরক্ষিত থাকে। $\mathbf{F}$ এবং $\mathbf{r}$ একই রেখায় ক্রিয়া করে বলিয়া সর্বদাই $\mathbf{r}\times\mathbf{F}=0$ হয়। অতএব 3-17.2 সমীকরণ হইতে দেখা যায় $d\mathbf{L}/dt=0$ বা কৌণিক ভরবেগ $\mathbf{L}$ স্থির রাশি। কণার গতিতে $\mathbf{L}$ একটি অচর রাশি (constant of the motion)।

3-18.2. কেন্দ্রগ বলক্ষেত্রে গতির সমীকরণ (Equation of motion in a central field)। গতি সমতলীয় বলিয়া আলোচনায় ধ্রুবীয় স্থানাংক r, θ ব্যবহারে সুবিধা হয়। 3-7 অনুচ্ছেদে এই স্থানাংকে ত্বরণের অরীয় ও অনুপ্রস্থ উপাংশ বাহির করা হইয়াছে (3-7.4*a* ও 3-7.4*b*

সমীকরণ)। কণার ভর m হইলে, এই দুই দিকে কণার গতীয় সমীকরণ হইবে

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F \tag{3-18.2}$$

$$\text{এবং} \quad mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad \text{বা} \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \tag{3-18.3}$$

3-18.3. কেন্দ্রীয় গতির দুইটি অচর রাশি (Two constants of central motion)। কৌণিক ভরবেগের 3-17.1a সংজ্ঞা অনুসারে $mr^2\dot{\theta}$ রাশিটিই বলকেন্দ্র (centre of force) O সাপেক্ষে আলোচ্য কণার কৌণিক ভরবেগ L। 3-18.1 অনুচ্ছেদের আলোচনা অনুসারে ইহা স্থির রাশি হইবে। 3-18.3 সমীকরণ হইতেও দেখা যায় কণার গতিতে L রাশিটি অচর থাকে। ইহার অভিমুখ কক্ষের অভিলম্বে। দক্ষিণ কর্কস্ক্রু বা দক্ষিণ বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ সূত্র প্রয়োগ করিয়া ইহার দিক্ পাওয়া যায়।

কেন্দ্রগ বল সংরক্ষী বলিয়া ইহার ক্ষেত্রে মোট শক্তি $E = T + V$ স্থির থাকিবে (3-14 অনুচ্ছেদ)। কেন্দ্রীয় গতির ইহা দ্বিতীয় অচর রাশি।

3-13 অনুচ্ছেদে আলোচিত স্থিতিশক্তির সংজ্ঞা অনুসারে

$$\text{স্থিতিশক্তি} \quad V(r) = -\int_{\infty}^{r} F(r)\,dr$$

কণার গতিশক্তি $T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2$ (3-7.2 সমীকরণ দেখ)

$$\therefore \quad E = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 - \int_{\infty}^{r} F(r)dr \tag{3-18-4}$$

3-18.4. ক্ষেত্রীয় বেগ (Areal velocity)। 3-18.3 সমীকরণকে কণার ভর m দিয়া ভাগ করিলে পাই কণার অনুপ্রস্থ ত্বরণ

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{3-18.5}$$

গতির সময় কণার স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$ যে হারে ক্ষেত্র বর্ণনা করে তাহার মান $\frac{1}{2}r \times r\dot{\theta} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$। ইহাকে 'ক্ষেত্রীয় বেগ' বলে। 3-18.5 সমীকরণ হইতে দেখা যায় কেন্দ্রীয় গতিতে এই রাশির মান অপরিবর্তিত থাকে। $mr^2\dot{\theta} = L$ (কৌণিক ভরবেগ) হওয়ায় $r^2\dot{\theta} = L/m$। সুবিধার জন্য আমরা

$$r^2\dot{\theta} = L/m = h \tag{3-18.6}$$

লিখিব। $h = L/m$ রাশিটি একক ভরের কৌণিক ভরবেগ, এবং উহা ক্ষেত্রীয় বেগ $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$-এর দ্বিগুণ। নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে h স্থিরমান রাশি ; ইহাকে **কৌণিক ভরবেগ স্থিরাংক (angular momentum constant)** বলা হয়।

3-18.5. কেন্দ্রীয় গতির অবকল সমীকরণ (Differential equation of motion in a central orbit)। 3-18.2 সমীকরণকে m দিয়া ভাগ করিলে কেন্দ্রীয় গতিতে অরীয় ত্বরণ a_r-এর মান পাওয়া যায়।

$$F/m = a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2.$$

3-18.6 সমীকরণ হইতে পাই $\dot{\theta} = h/r^2$। অতএব শেষোক্ত সমীকরণ হইতে $\dot{\theta}$ অপনীত করিলে পাওয়া যায়

$$\ddot{r} - h^2/r^3 = a_r \qquad (3\text{-}18.7)$$

এই অবকল সমীকরণ সমাধান করিতে পারিলে কেন্দ্রীয় গতিতে r ও t-র সম্পর্ক পাওয়া যায়। কিন্তু সোজাসুজি ইহার সমাধান বেশ জটিল।

3-18.6. ধ্রুবীয় বিপরীত স্থানাংক ব্যবহার (Use of reciprocal polar coordinates)। $u = 1/r$ এবং θ—ইহাদের ধ্রুবীয় বিপরীত স্থানাংক বলে। ইহাদের ব্যবহার করিয়া 3-18.7 সমীকরণ হইতে t অপনীত করিলে সমীকরণটি u, θ স্থানাংকে প্রকাশিত হয়। ইহার সমাধান করিলে কক্ষের সমীকরণ u, θ স্থানাংকে পাওয়া যায়।

$$\dot{\theta} = h/r^2 = hu^2$$

সম্পর্কটি ব্যবহার করিয়া নিম্নোক্তভাবে 3-18.7 হইতে t অপনীত করা যায়।

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right) = hu^2\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2} \cdot hu^2$$

$$= -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$\ddot{r}$-এর মান 3-18.7 সমীকরণে বসাইলে পাই

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3 = a_r$$

$$\text{বা}\quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{a_r}{h^2u^2} \qquad (3\text{-}18.8)$$

ধ্রুবীয় বিপরীত স্থানাংকে যে কোন কেন্দ্রীয় গতির ইহাই সাধারণ অবকল সমীকরণ। $a_r = F(r)/m$ কণার অরীয় ত্বরণ বা প্রতি একক ভরের উপর ক্রিয়াশীল বল। F কিভাবে u-র উপর নির্ভর করে তাহা জানা থাকিলে সেই মান 3-18.8 সমীকরণে বসাইয়া দ্বিতীয় ক্রমের যে অসমঘাত (non-homogeneous) অবকল সমীকরণ পাওয়া যাইবে, তাহার সমাধান কেন্দ্রীয় কক্ষপথের সমীকরণ। F $1/r^2$ বা $1/r^3$-এর আনুপাতিক হইলে সমাধান সহজ হয়।

গতির ভেক্টর সমীকরণ। কেন্দ্রগ বলের ক্রিয়ার কণার গতির ভেক্টর সমীকরণ কি? 3-7 অনুচ্ছেদে দেখান হইয়াছে যে $\mathbf{n}$ $\mathbf{r}$-এর অভিমুখে ঐকিক ভেক্টর ও $\mathbf{l}$ তাহার অনুপ্রস্থে বামাবর্তে ঐকিক ভেক্টর হইলে $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{n} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{l} = a_r\mathbf{n} + a_\theta\mathbf{l}$। কেন্দ্রগ বলের ক্ষেত্রে $a_\theta = 0$। অতএব এ ক্ষেত্রে ত্বরণ $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{n}$। বল $\mathbf{F}$-ও $\mathbf{r}$-এর অভিমুখে বলিয়া লেখা যায়

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{n} = \mathbf{F}$$

ইহাই কেন্দ্রীয় গতির ভেক্টর সমীকরণ।

3-19. বিষমবর্গীয় বলাধীন গতি (Motion under inverse square law of force)। কেন্দ্রগ বল বলকেন্দ্র হইতে দূরত্বের বর্গের বিষমানুপাতিক হইলে লেখা যায়

$$F(r) = k'/r^2 = k'u^2.$$

k' রাশিটি সমানুপাত স্থিরাংক (factor of proportionality)। ভর একক ধরিয়া লেখা যায়

$$a_r = F(r)/m = k/r^2 = ku^2 \tag{3-19.1}$$

k রাশিটিকে **একক ভরের বল স্থিরাংক (force constant per unit mass)** বলে। আকর্ষক বলে k নিগেটিভ ও বিকর্ষক বলে উহা পজিটিভ।

কেন্দ্রীয় কক্ষের সর্বক্ষেত্রীয় অবকল সমীকরণ 3·18.8-এ a_r-এর উপরোক্ত মান বসাইলে বিষমবর্গীয় বলের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য সমীকরণ পাওয়া যায়। ইহা হইল

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{ku^2}{h^2u^2} = -\frac{k}{h^2} \tag{3-19.2}$$

k/h^2 প্রদত্ত ক্ষেত্রে স্থির রাশি বলিয়া $u' = u + k/h^2$ লইলে লেখা যায়

$$\frac{d^2u'}{d\theta^2} + u' = 0 \tag{3-19.3}$$

সরল দোলনের সমীকরণ 3-15.3-র সঙ্গে এই সমীকরণ তুলনা করিলে দেখা যায় u' ও θ-র সম্পর্ক সরল দোলীয় এবং ইহার সর্বক্ষেত্রীয় (general) সমাধান হিসাবে লেখা যায়

$$u' = A\cos(\theta-\theta_0) \text{ বা } u = -k/h^2 + A\cos(\theta-\theta_0)$$

অর্থাৎ $$\frac{1}{r} = -\frac{k}{h^2} + A\cos(\theta-\theta_0) \qquad (3\text{-}19.4)$$

এই সমীকরণ r, θ স্থানাংকে কক্ষপথের সমীকরণ। কৌণিক ভরবেগ স্থিরাংক h এবং স্বেচ্ছিক রাশি A ও θ_0-র মান আদি মুহূর্তের অবস্থা হইতে বাহির করা যায়। নিচে ইহা করা হইল।

3-19.1 h, A ও θ_0-র মান। ধরা যাক আদি মুহূর্তে ($t=0$) কণার বেগ v_0, উহার স্থান ভেক্টরের মান r_0 এবং v_0 ও r_0-র মধ্যবর্তী কোণ α। এই মুহূর্তে $\theta=0$ ধরা হইল, অর্থাৎ θ কোণ r_0 হইতে মাপা হইবে। আদি মুহূর্তে

$$(\dot{r})_{t=0} = v_0 \cos\alpha \text{ এবং } (r\dot{\theta})_{t=0} = v_0 \sin\alpha$$

3-18.6 সমীকরণ হইতে পাই

$$h = (r^2\dot{\theta})_{t=0} = r_0 v_0 \sin\alpha \qquad (3\text{-}19.5)$$

3-19.4 সমীকরণে $t=0$ ধরিলে পাই

$$\frac{1}{r_0} = -\frac{k}{h^2} + A\cos\theta_0 \qquad (3\text{-}19.6)$$

3-19.4 অবকলনে পাই

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -A\sin(\theta-\theta_0)$$

$\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{dr}{dt}\Big/\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{r}/\dot{\theta}$ বলিয়া উপরের সমীকরণে $t=0$ ধরিলে পাই

$$\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)_{t=0} = A\sin\theta_0 \text{ বা } \left(-\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}\right)_{t=0} = A\sin\theta_0$$

$$\text{বা } (\dot{r})_{t=0} = -(r^2\dot{\theta})_{t=0} A\sin\theta_0$$

অর্থাৎ $$v_0\cos\alpha = -hA\sin\theta_0 \qquad (3\text{-}19.7)$$

A এবং θ_0-র মান পাইতে উপরের সমীকরণগুলি হইতে দেখা যায়

$A \sin \theta_0 = -(v_0/h) \cos \alpha$ এবং $A \cos \theta_0 = 1/r_0 + k/h^2$

অতএব

$$\tan \theta_0 = \frac{-(v_0/h) \cos \alpha}{(1/r_0 + k/h^2)} = \frac{-v_0 h^2 r_0 \cos \alpha}{h(h^2 + kr_0)}$$

$$= \frac{-h^2 \cos \alpha}{(h/v_0 r_0)(h^2 + kr_0)} = -\frac{h^2 \cot \alpha}{h^2 + kr_0} \qquad (3\text{-}19.8)$$

এবং $$A^2 = \frac{v_0^2}{h^2} + \left(\frac{1}{r_0} + \frac{k}{h^2}\right)^2 = \frac{k^2}{h^4} + \frac{2}{h^2}\left(\frac{k}{r_0} + \frac{v_0^2}{2}\right)$$

$$= \frac{k^2}{h^4} + \frac{2E'}{h^2} \qquad (3\text{-}19.9)$$

এখানে ধরা হইয়াছে $E' = \frac{k}{r_0} + \frac{v_0^2}{2}$ (3-19.10)

3-19.2. মোট শক্তি। 3-18.4 সমীকরণ হইতে গতির মোট শক্তি E পাওয়া যায়। এখানে স্থিতিশক্তি

$$V = -\int_{\infty}^{r} \frac{k'}{r^2} dr = \frac{k'}{r} = \frac{mk}{r}$$

অতএব $E = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + mk/r$

$$= m\left(\frac{v^2}{2} + \frac{k}{r}\right) \qquad (3\text{-}19.11)$$

কেন্দ্রীয় গতিতে E অচর রাশি বলিয়া

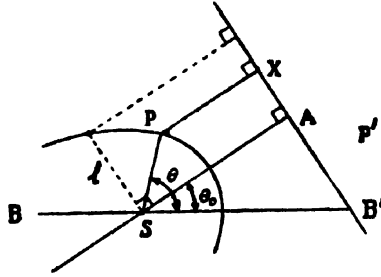
$$E = (E)_{t=0} = m(v_0^2/2 + k/r_0) \text{।}$$

অর্থাৎ $$\dot{E} = m\left(\frac{v_0^2}{2} + \frac{k}{r_0}\right) = mE' \qquad (3\text{-}19.12)$$

দেখা গেল 3-19.9 সমীকরণের E' **একক ভরের মোট শক্তি (total energy per unit mass)**।

3-19.3. মোট কৌণিক ভরবেগ। মোট কৌণিক ভরবেগ L আদি মুহূর্তের কৌণিক ভরবেগের সমান কারণ ইহাও কেন্দ্রীয় গতিতে অচর রাশি।

$$\therefore \quad L = mh = mr_0 v_0 \sin \alpha. \qquad (3\text{-}19.13)$$

3-19.4. কনিকের সমীকরণ (Equation of a conic)। বিষমবর্গীয় বলাধীন কেন্দ্রীয় কক্ষের প্রকৃতি আলোচনা করিবার আগে আমরা কনিক (conics) সম্বন্ধে দু-একটি কথা বলিয়া লইব কারণ কক্ষগুলি প্রকৃতিতে কনিক এবং কনিকের মূল কথাগুলি জানা থাকিলে বুঝিবার সুবিধা হইবে।

3.10 চিত্র

3.10 চিত্রে S কোন কনিকের ফোকাস, AB' উহার নিয়তা বা নিয়ামক (directrix) ও AS কনিকের অক্ষ। P বিন্দু ϵ উৎকেন্দ্রতা (eccentricity) বিশিষ্ট কোন কণিকের উপরস্থ একটি বিন্দু, এবং P হইতে AB'-এর উপর টানা লম্ব PX হইলে কনিকের সংজ্ঞা অনুসারে

$$PS/PX = \epsilon$$

হইবে। ধ্রুবীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করিয়া S-কে মূলবিন্দু ও SB'-কে অক্ষ ধরা যাক। ধ্রুবীয় অক্ষ ও কনিকের অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ θ_0। S হইতে কনিকের অক্ষের অভিলম্বে টানা লম্বের কণিক পর্যন্ত দূরত্ব $l = \epsilon\, AS$। ইহাকে নাভি লম্বার্ধ (semi-latus rectum) বলে।

$PS/PX = \epsilon$ সম্পর্কটি হইতে পাওয়া যায়

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l} + \frac{\epsilon}{l} \cos(\theta - \theta_0) \tag{3-19.14}$$

3-19.14 সমীকরণে ϵ এবং l উভয়েই পজিটিভ রাশি। $\epsilon = 1$ হইলে কনিকটি অধিবৃত্ত (parabola), $\epsilon < 1$ হইলে উহা উপবৃত্ত (ellipse), $\epsilon > 1$ হইলে পরাবৃত্ত (hyperbola) এবং $\epsilon = 0$ হইলে উহা বৃত্ত (circle)।

ফোকাস নিয়তার যে দিকে, কনিকের উপরস্থ বিন্দু P' তাহার বিপরীত দিকে হইলে তখন সমীকরণ হয়

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{l} - \frac{\epsilon}{l} \cos(\theta - \theta_0) \tag{3-19.15}$$

এ ক্ষেত্রে $\epsilon > 1$ এবং কনিকটি পরাবৃত্তের নিগেটিভ শাখা। 3-19.14 সমীকরণ দিয়া সব কয়টি কনিকই বুঝান যায়। l নিগেটিভ ও $\epsilon > 1$ হইলে পরাবৃত্তের নিগেটিভ শাখা পাওয়া যায়।

3-19.5. কেন্দ্রগ বিষমবর্গীয় বলাধীন গতিতে কক্ষের প্রকৃতি (Nature of central orbit under inverse square law of force)। কেন্দ্রগ বিষমবর্গীয় বলাধীন গতিতে কক্ষের ধ্রুবীয় স্থানাংকের সমীকরণ 3-19.4-কে কনিকের অনুরূপ সমীকরণ 3-19.14-এর সঙ্গে তুলনা করিলে দেখা যাইবে উহারা একই প্রকৃতির।

3-19.4 সমীকরণ হইল $\dfrac{1}{r} = -\dfrac{k}{h^2} + A\cos(\theta - \theta_0)$

3-19.14 সমীকরণ হইল $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{l} + \dfrac{\epsilon}{l}\cos(\theta - \theta_0)$

তুলনায় দেখা যায়

$$l = -\frac{h^2}{k} = -\frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{k} \qquad \text{(3-19.5 সমীকরণ দেখ)} \qquad (3\text{-}19.16)$$

এবং $$\epsilon^2 = l^2 A^2 = \frac{h^4}{k^2}\left(\frac{k^2}{h^4} + \frac{2E'}{h^2}\right) \qquad \text{(3-19.9 সমীকরণ দেখ)}$$

$$= 1 + \frac{2h^2 E'}{k^2} \qquad (3\text{-}19.17)$$

মনে রাখা ভাল যে h=একক ভরের কৌণিক বেগ=L/m, E'=একক ভরের মোট শক্তি=E/m, এবং k=একক ভরের উপর ক্রিয়াশীল বল=F/m।

(A) **বিকর্ষক বল।** বল বিকর্ষক হইলে k পজিটিভ রাশি। অতএব l নিগেটিভ। 3-19.12 সমীকরণ হইতে দেখা যায় E' এ ক্ষেত্রে পজিটিভ রাশি। অতএব $\epsilon > 1$। 3-19.4 অনুচ্ছেদের আলোচনা অনুসারে কক্ষ এ ক্ষেত্রে পরাবৃত্তের নিগেটিভ শাখা হইবে। বলকেন্দ্র উহার ফোকাস। পরমাণুর কেন্দ্রক (atomic nucleus) দ্বারা α-কণার বিক্ষেপণে (scattering) কণার কক্ষ এই প্রকার হয়। এই বিক্ষেপণ 3-22 অনুচ্ছেদে আলোচিত হইয়াছে।

(B) **আকর্ষক বল।** এ ক্ষেত্রে k নিগেটিভ রাশি। অতএব l পজিটিভ। E' পজিটিভও হইতে পারে, নিগেটিভও হইতে পারে। ϵ^2-র ন্যূনতম মান 0। অতএব 3-19.17 সমীকরণ হইতে দেখা যায় E' রাশিটি

$-k^2/2h^2$ অপেক্ষা কম হইতে পারে না। v_0-র যে কোন বাস্তব মানে ϵ^2 পজিটিভ হইবে। ইহার পজিটিভ বর্গমূল কনিক কক্ষের প্রকৃতি বুঝাইবে।

এখানে নূতন একটি রাশির অবতারণা করিয়া লইলে সুবিধা হয়। আকর্ষক বল k/r^2-এর ক্রিয়ায় অনন্ত দূরত্ব হইতে r_0 অবস্থানে আসিতে একক ভরের কণা যে বেগ লাভ করে তাহাকে v_∞ বলিলে শক্তির সংরক্ষণে পাই

$$\frac{1}{2}v_\infty^2 = \int_\infty^{r_0} \frac{k}{r^2}\,dr = -\frac{k}{r_0} \qquad (3\text{-}19.18)$$

v_∞ বেগকে 'না-ফেরার বেগ', 'পলায়নের বেগ' বা 'মুক্তির বেগ' (Escape velocity) বলে। এরূপ নামকরণের অর্থ একটু পরেই বোঝা যাইবে।

3-19.12 সমীকরণে k/r_0-র বদলে $-\frac{1}{2}v_\infty^2$ লিখিলে পাই

$$E' = \tfrac{1}{2}(v_0^2 - v_\infty^2) \qquad (3\text{-}19.19)$$

(1) **কক্ষ উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত বা পরাবৃত্ত।** 3-19.19 সমীকরণে দেওয়া E'-এর মান ϵ^2-এর 3-19.17 সমীকরণে বসাইলে পাই

$$\epsilon^2 = 1 + h^2(v_0^2 - v_\infty^2)/k^2 \qquad (3\text{-}19.20)$$

এই সমীকরণের সাহায্য কক্ষপথের প্রকৃতি আলোচনা খুব সহজ।

(*a* $v_0 < v_\infty$ হইলে $\epsilon < 1$ হইবে। তখন কক্ষ উপবৃত্ত (ellipse)।

(*b*) $v_0 = v_\infty$ হইলে $\epsilon = 1$ হইবে। তখন কক্ষ অধিবৃত্ত (parabola)।

(*c*) $v_0 > v_\infty$ হইলে $\epsilon > 1$ হইবে। l পজিটিভ থাকায় কক্ষ হইবে পরাবৃত্তের (hyperbola) নিকট শাখা।

লক্ষ্য কর যে এই তিনটির কোন ক্ষেত্রেই কক্ষের প্রকৃতি বিচারে α-কোণের অবতারণা করিতে হইতেছে না। কেবল v_0-র মান দিয়াই উহা নির্দিষ্ট হয়। অতএব কণাকে r_0-র সহিত যে কোণেই নিক্ষেপ করা যাক না কেন, কেবল v_0-র মান দিয়া কক্ষের প্রকৃতি নির্ধারিত হইবে। (α=0 হইলে কোন্ ক্ষেত্রে কক্ষ কি প্রকার হইবে ?)

উপবৃত্ত পথে কণা ঘুরিলে উহা বলের আকর্ষণের সীমার মধ্যেই থাকে। কিন্তু অধিবৃত্তে ও পরাবৃত্তে কণা বলকেন্দ্র হইতে অনন্ত দূরত্বে চলিয়া যায় ;

বেগ বেশী থাকায় বল উহাকে ধরিয়া রাখিতে পারে না। এই বেগের সীমান্ত মান v_{∞}, অর্থাৎ বলকেন্দ্র হইতে অনন্ত দূরত্বে চলিয়া যাইতে হইলে কণার কমপক্ষে v_{∞} বেগ থাকা দরকার। এই কারণে v_{∞}-কে 'না-ফেরার বেগ' 'মুক্তির বেগ' বা 'পলায়নের বেগ' বলা হইয়াছে।

মহাকর্ষের ক্ষেত্রে আকর্ষক কণার ভর M ও মহাকর্ষীয় নিত্যসংখ্যা G হইলে $k=-GM$। ভূপৃষ্ঠ হইতে পলায়নের বেগ $v_{\infty}=\sqrt{2GM/R}$। পৃথিবীর ভর $M=5{\cdot}98\times10^{24}$ kg, ব্যাসার্ধ $R=6371$ km এবং $G=6.67\times10^{-11}$ এমকেএস একক ধরিলে পাই $v_{\infty}=11.2$ km/s।

(2) কক্ষ বৃত্তাকার। 3-19.20 সমীকরণ হইতে দেখা যায় $v_0^2-v_{\infty}^2=-k^2/h^2$ হইলে $\epsilon=0$ হইবে। এ ক্ষেত্রে কক্ষ বৃত্তাকার। ইহার শর্ত বাহির করিতে লেখা যায়

$$v_0^2-v_{\infty}^2=-\frac{k^2}{h^2}=-\frac{k^2}{r_0^2v_0^2\sin^2\alpha}\qquad\frac{v_{\infty}^4}{4v_0^2\sin^2\alpha}$$

বা $$v_{\infty}^4-4v_0^2v_{\infty}^2\sin^2\alpha+4v_0^4\sin^2\alpha=0$$

বা $$(v_{\infty}^2-2v_0^2\sin^2\alpha)^2=4v_0^4\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-1)$$

$\sin^2\alpha=1$ হইলেই বাস্তব v_0-তে এই সমীকরণ সম্ভব। অতএব $\epsilon=1$ হইতে হইলে $\alpha=\pi/2$ এবং $v_0^2=v_{\infty}^2/2$ হইবে, অর্থাৎ কক্ষ বৃত্তাকার হইতে হইলে r_0-র সমকোণে $v_0=v_{\infty}/\sqrt{2}$ বেগে কণাকে নিক্ষেপ করিতে হইবে। v_{∞} নিক্ষেপ বিন্দুতে কণার পলায়নের বেগ।

নিগেটিভ শক্তি। কণার মোট শক্তি $E=\frac{1}{2}m(v_0^2-v_{\infty}^2)$ হইতে দেখা যায় বৃত্ত ও উপবৃত্ত কক্ষে E নিগেটিভ রাশি ($v_0<v_{\infty}$)। অধিবৃত্ত কক্ষে $E=0$ এবং পরাবৃত্ত কক্ষে E পজিটিভ। পরস্পর আকর্ষী দুই কণার মধ্যে অনন্ত দূরত্ব থাকিলে সেই অবস্থায় স্থিতিশক্তির মান শূন্য ধরা হয়; উহারা কাছে আসিলে স্থিতিশক্তি নিগেটিভ হয়। মোট শক্তি নিগেটিভ হওয়ার অর্থ স্থিতিশক্তির মান গতিশক্তির চেয়ে বেশী হওয়া। মোট শক্তি শূন্য অর্থ এই দুই প্রকার শক্তি সমান।

3-19.6. মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে কণার গতি। নিউটনের মহাকর্ষীয় সূত্র অনুসারে (7-1 অনুচ্ছেদ) r দূরত্বে অবস্থিত M ও m ভরের দুই কণার মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষক বল $F=GMm/r^2$.

সুবিধার জন্য আমরা $M\ll m$ ধরিব। m-এর আকর্ষণে M কণার ত্বরণ হইবে Gm/r^2, এবং M-এর আকর্ষণে m-এর ত্বরণ হইবে GM/r^2।

$m \ll M$ বলিয়া M-এর ত্বরণ উপেক্ষা করিয়া উহাকে স্থির ধরা যায়। m কণাকে M-এর মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে নিক্ষেপ করিলে, m-এর উপর M অভিমুখী কেন্দ্রীয় বল ক্রিয়া করিবে: এই বল দূরত্বের বর্গের বিষমানুপাতিক। অতএব এ ক্ষেত্রে এই অনুচ্ছেদের পূর্বলব্ধ সকল সিদ্ধান্তগুলিই প্রযোজ্য হইবে। এ ক্ষেত্রে $k' = -GMm$ এবং $k = -GM$।

পৃথিবীর মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে কণার গতি নানাকারণে আমাদের জানিবার বিষয়। গতি বিচারে নিক্ষেপ বিন্দুতে পলায়নের বেগ v_∞ জানা থাকা বিশেষ দরকার। ভূপৃষ্ঠে $v_\infty = \sqrt{2GM/R}$ ইহা আগেই বলা হইয়াছে; উহার মান প্রায় 11.2 km/s (এ সম্পর্কে 7-8 অনুচ্ছেদেও দ্রষ্টব্য)। ভূপৃষ্ঠ হইতে ইহার চেয়ে বেশী বেগে কণা নিক্ষেপ করিলে উহা পরাবৃত্ত পথে পৃথিবীর আকর্ষণের বাহিরে চলিয়া যাইবে। নিক্ষেপের বেগ v_0 v_∞ অপেক্ষা কম হইলে কক্ষ হইবে উপবৃত্ত। সূর্যের মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে গ্রহের গতিও অনুরূপ উপবৃত্ত পথে গতি। $v_0 = v_\infty$ হইলেও কণা পৃথিবীর আকর্ষণের বাহিরে চলিয়া যাইবে, কিন্তু কক্ষ হইবে অধিবৃত্ত।

এই সকল কক্ষের ফোকাস ভূকেন্দ্র, কারণ ভূপৃষ্ঠের বাহিরে পৃথিবীর মহাকর্ষীয় বল বিচারে পৃথিবীর ভর উহার কেন্দ্রে সংহত ধরা চলে (7-4 (3a) অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য)। পৃথিবীর ভরের তুলনায় নিক্ষিপ্ত বস্তুর ভর উপেক্ষণীয় বলিয়া ভূকেন্দ্র স্থির এবং উহাই পূর্বের আলোচনার বলকেন্দ্র ধরা যাইবে।

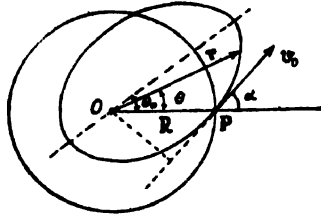
M-এর তুলনায় m উপেক্ষণীয় না হইয়া উভয়ে তুলনীয় হইলে একের টানে অন্যটি সরিবে। এ ক্ষেত্রে বলকেন্দ্র স্থির ধরা চলে না। এরূপ হইলে M বা m কণার গতি কি প্রকার হইবে তাহা 4-12 অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হইয়াছে।

3-20. ক্ষেপণাস্ত্র (Ballistic missile)। মনে কর ভূপৃষ্ঠের কোন স্থান হইতে উল্লম্বের (vertical) সহিত α কোণে v_0 বেগে কোন ক্ষেপণাস্ত্র নিক্ষেপ করা হইল। এ ক্ষেত্রে পৃথিবীকে R ব্যাসার্ধের গোলক মনে করিয়া উহার ভর M কেন্দ্রে সংহত বলিয়া ধরা যায়। ক্ষেপণাস্ত্রের উপর পৃথিবীর আকর্ষণ সর্বদাই ভূকেন্দ্র দিয়া যায়। ক্ষেপণাস্ত্রকে উহার ভরকেন্দ্রে সংহত কণা বলিয়া ধরা চলে। উহার গতির আলোচনা আমরা বায়ুর বাধা, পৃথিবীর আবর্তন, ইত্যাদি জটিল ব্যাপার উপেক্ষা করিব। এইভাবে সরল করিয়া লইলে ক্ষেপণাস্ত্রের গতি কেবল ভূকেন্দ্রগ বিষমবর্গীয় আকর্ষক বল দিয়া নিয়ন্ত্রিত হইবে।

3-19.5 (B) অনুচ্ছেদের আলোচনা অনুসারে ক্ষেপণের বেগ v_0 ভূপৃষ্ঠে পলায়নের বেগ v_∞-র চেয়ে কম হইলে ক্ষেপণাস্ত্রের কক্ষ উপবৃত্ত, সমান হইলে অধিবৃত্ত ও বড় হইলে পরাবৃত্ত হইবে। কক্ষের উৎকেন্দ্রতার সমীকরণ 3-19.20, অর্থাৎ

$$\epsilon^2=1+\frac{h^2}{k^2}(v_0{}^2-v_\infty{}^2)$$

$h=$একক ভরের কৌণিক ভরবেগ$=Rv_0 \sin\alpha$ (3.11 চিত্র) ; $k=-GM$ এবং $v_\infty{}^2=2GM/R$।

ক্ষেপণাস্ত্রের v_0, v_∞ অপেক্ষা কম থাকে। সমান বা বেশী হইলে উহা পৃথিবীর আকর্ষণের বাহিরে চলিয়া যাইবে। অতএব অস্ত্রের কক্ষ

3.11 চিত্র

উপবৃত্ত। উপবৃত্তের অক্ষ ও নিক্ষেপবিন্দুর (P) স্থানভেক্টর সমান্তরাল নয় (3-11 চিত্র)। উহাদের মধ্যবর্তী কোণ θ_0 হইলে এবং উপবৃত্তের দ্বিতীয় ফোকাস, অর্থাৎ বাঁদিকের ফোকাস, মূলবিন্দু ধরিলে উপবৃত্তের সমীকরণ হইবে

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{l}-\frac{\epsilon}{l}\cos(\theta-\theta_0) \text{ বা } r=\frac{l}{1-\epsilon\cos(\theta-\theta_0)} \qquad (3\text{-}20.1)$$

(3-19.14 সমীকরণের সঙ্গে ইহার প্রভেদ লক্ষণীয়। উহাতে উপবৃত্তের ডানদিকের ফোকাসকে মূলবিন্দু ধরা হইয়াছে ; এখানে বাঁদিকের।)

3-19.16 সমীকরণে দেখা গিয়াছে $l=-h^2/k$। উপরের সমীকরণে l-এর এই মান বসাইলে পাই

$$r=\frac{R^2 v_0{}^2 \sin^2\alpha}{GM\{1-\epsilon\cos(\theta-\theta_0)\}}$$

সুবিধার জন্য $v_o^2 = cv_\infty^2 = c(2GM/R)$ লিখিলে পাই

$$r = \frac{2Rc \sin^2 \alpha}{1 - \epsilon \cos(\theta - \theta_0)} \tag{3-20.2}$$

এবং $\epsilon^2 = 1 + \frac{R^2 v_o^2 \sin^2 \alpha}{G^2 M^2} v_\infty^2 (c-1)$

$$= 1 + 4c(c-1) \sin^2 \alpha \tag{3-20.3}$$

মনে রাখিতে হইবে $c = v_o^2/v_\infty^2$; ইহা 1-এর চেয়ে ছোট একটি ভগ্নাংশ। ক্ষেপণাস্ত্রে $c < \frac{1}{2}$ থাকে।

নিক্ষেপের মুহূর্তে $r = R$ এবং $\theta = 0$। অতএব

$$R = \frac{2Rc \sin^2 \alpha}{1 - \epsilon \cos \theta_o} \text{ বা } 1 - \epsilon \cos \theta_o = 2c \sin^2 \alpha$$

$$\therefore \cos \theta_o = \frac{1 - 2c \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 + 4c(c-1) \sin^2 \alpha}} \tag{3-20.4}$$

ইহা হইতে কক্ষের অক্ষের দিক্ পাওয়া যায়। ইহা আলোচ্য ক্ষেত্রে 3-19.8 সমীকরণের অনুরূপ সমীকরণ।

ক্ষেপণাস্ত্রের পাল্লা (Range of the missile)। ক্ষেপণাস্ত্রের কৌণিক পাল্লা (angular range) বাহির করিতে 3-20.2 সমীকরণ ব্যবহার করা যায়। $2c \sin^2 \alpha = 1 - \epsilon \cos \theta_0$ বলিয়া উহা হইতে পাই

$$r = \frac{1 - \epsilon \cos \theta_0}{1 - \epsilon \cos(\theta - \theta_o)} R$$

θ-র দুইটি মানে, $\theta = 0$ এবং $\theta = 2\theta_o$, $r = R$ হইবে। ক্ষেপণাস্ত্রের কক্ষ এই দুই বিন্দুতে ভূপৃষ্ঠকে ছেদ করিবে। অতএব উহার কৌণিক পাল্লা $2\theta_o$। $\theta = 0$ ও $\theta = 2\theta_0$ সীমার মধ্যে $r > R$ হইবে। $\theta = \theta_0$ হইলে ভূপৃষ্ঠ হইতে ক্ষেপণাস্ত্রের উচ্চতা সবচেয়ে বেশী হইবে, কারণ তখন $1 - \epsilon \cos(\theta - \theta_o)$ অবম। এই অবস্থানে ভূকেন্দ্র হইতে ক্ষেপণাস্ত্রের দূরত্ব সবচেয়ে বেশী। কক্ষের এই বিন্দুকে 'অপভূ' (apogee) বলে।

3-21. নকল উপগ্রহ (Artificial satellite)। ক্ষেপণাস্ত্র উৎক্ষিপ্ত হইয়া পৃথিবীতেই ফিরিয়া আসিবে ; কিন্তু নকল উপগ্রহ উৎক্ষিপ্ত হইয়া পৃথিবীতে না ফিরিয়া উহাকে প্রদক্ষিণ করিবে। উপবৃত্ত কক্ষের হ্রস্ব-অক্ষার্ধ b (semi-minor axis) পৃথিবীর ব্যাসার্ধের চেয়ে বড় না হইলে

পৃথিবী প্রদক্ষিণ সম্ভব নয়। v_0 এবং α কি রকম হইলে $b<R$ হইবে তাহা সহজেই বাহির করা যায়, কারণ

$$b=\frac{}{\sqrt{(1-\epsilon^2)}}\quad\frac{2Rc\sin^2\alpha}{\sqrt{4c\,(1-c)\sin^2\alpha}}=\frac{\sqrt{c}\,\sin\alpha}{\sqrt{1-c}}.\ R$$

ইহা R অপেক্ষা বড় হইতে হইলে $c\sin^2\alpha>(1-c)$ বা $c>1/(1+\sin^2\alpha)$ হইবে। $\sin^2\alpha$-র দুই সীমান্ত মান 0 ও 1। অতএব $b>R$ হইতে হইলে $c=v_0{}^2/v_\infty{}^2$-এর মান $\frac{1}{2}$ হইতে 1-এর মধ্যে থাকিবে।

আমরা ধরিব নকল উপগ্রহ উৎক্ষেপে উহা ভূপৃষ্ঠ হইতে H_p উচ্চতায় অর্থাৎ ভূকেন্দ্র হইতে $R+H_p=r_p$ দূরত্বে v_p বেগে অনুভূমে (horizontally) উৎক্ষিপ্ত হয়। অতএব ইহার ক্ষেত্রে $\alpha=\pi/2$। উৎক্ষেপ বিন্দুতে পলায়নের বেগ

$$(v_\infty)_p=\{2GM/(R+H_p)\}^{\frac{1}{2}}=(2GM/r_p)^{\frac{1}{2}} \tag{3-21.1}$$

[ভূপৃষ্ঠে পলায়নের বেগ v_∞ হইলে $v_\infty=(2GM/R)^{\frac{1}{2}}$। অতএব

$$GM=\tfrac{1}{2}r_p(v_\infty)_p^2=\tfrac{1}{2}Rv_\infty{}^2\ ] \tag{3-21.1a}$$

গত অনুচ্ছেদের মত

$$v_p{}^2=c(v_\infty)_p{}^2 \text{ বা } c=(v_\infty)_p{}^2/(v_p)^2 \tag{3-21.2}$$

হইলে 3-20.3 সমীকরণে $\alpha=\pi/2$ ধরিয়া কক্ষের উৎকেন্দ্রতা ϵ জানা যায়।

$$\epsilon^2=1-4c(1-c) \tag{3-21.3}$$

c-র মান $\frac{1}{2}$ হইতে 1-এর মধ্যে থাকিবে। $c=\frac{1}{2}$ হইলে কক্ষ বৃত্তাকার হইবে। $c=1$ হইলে উহা হইবে অধিবৃত্ত।

উপবৃত্ত কক্ষে একক ভরের কৌণিক ভরবেগ

$$h=(R+H_p)v_p=r_pv_p \tag{3-21.4}$$

এবং $$-k=GM=\tfrac{1}{2}r_p(v_\infty)_p{}^2\quad[\ =\tfrac{1}{2}Rv_\infty{}^2\ ] \tag{3-21.5}$$

অতএব কক্ষের নাভিলম্বার্ধ

$$l=-\frac{h^2}{k}=\frac{r_p{}^2v_p{}^2}{\frac{1}{2}r_p(v_\infty)_p{}^2}=2cr_p \tag{3-21.6}$$

উপভূ ও অপভূ (Perigee and apogee)। উপগ্রহের উপবৃত্ত কক্ষের যে বিন্দু পৃথিবীর সবচেয়ে কাছে তাহাকে 'উপভূ' (perigee), ও যে বিন্দু সবচেয়ে দূরে তাহাকে 'অপভূ' (apogee) বলে। উভয় স্থানে কণার স্থান ভেক্টর ও বেগের মধ্যবর্তী কোণ $\pi/2$। r_p ও r_a যথাক্রমে এই দুই দূরত্বে হইলে

$$r_p = \frac{l}{1+\epsilon} \quad \text{এবং} \quad r_a = \frac{l}{1-\epsilon}, \qquad (3\text{-}21.7)$$

এই দুই বিন্দুতে বেগ যথাক্রমে v_p ও v_a হইলে কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণের জন্য (অথবা ক্ষেত্রীয় বেগের সুষমতার জন্য) পাইব

$$r_p v_p = r_a v_a. \qquad (3\text{-}21.8)$$

ভূপৃষ্ঠ হইতে উপভূ ও অপভূর দূরত্ব যথাক্রমে

$$H_p = r_p - R \quad \text{ও} \quad H_a = r_a - R.$$

(আমরা উৎক্ষেপ বিন্দু উপভূতে লইয়াছি। ইহা অপভূতেও লওয়া চলিত।)

কক্ষের দীর্ঘ অক্ষার্ধ (Semi-major axis of the orbit)। কক্ষের দীর্ঘ অক্ষার্ধ a হইলে

$$2a = r_p + r_a = \frac{2l}{1-\epsilon^2} = \frac{4cr_p}{4c(1-c)} = \frac{r_p}{1-c} \qquad (3\text{-}21.9)$$

কক্ষের **হ্রস্বঅক্ষার্ধ** (semi-minor axis)

$$b = \frac{l}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \frac{2cr_p}{\sqrt{4c(1-c)}} = r_p\sqrt{\frac{c}{1-c}} \qquad (3\text{-}21.10)$$

উপবৃত্তে পর্যায়কাল (Periodic time)। উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল πab। উহা পরিক্রমার পর্যায়কাল T হইলে গড় ক্ষেত্রীয় বেগ $\pi ab/T$। এ ক্ষেত্রে জানা আছে ক্ষেত্রীয় বেগ স্থির এবং উহার মান $\frac{1}{2}h$ (3-18.4 অনুচ্ছেদ)।

$$\therefore \quad \frac{\pi ab}{T} = \frac{h}{2} \quad \text{বা} \quad T = \frac{2\pi ab}{h} \qquad (3\text{-}21.11)$$

ইহাতে a, b ও h-এর পূর্বলব্ধ মান বসাইলে পাই

$$T = 2\pi \frac{r_p}{2(1-c)} \cdot \frac{r_p\sqrt{c}}{\sqrt{(1-c)}} \cdot \frac{1}{r_p v_p}$$

$$\pi \frac{c^{\frac{1}{2}}}{(1-c)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{r_p}{v_p} \qquad (3\text{-}21.12)$$

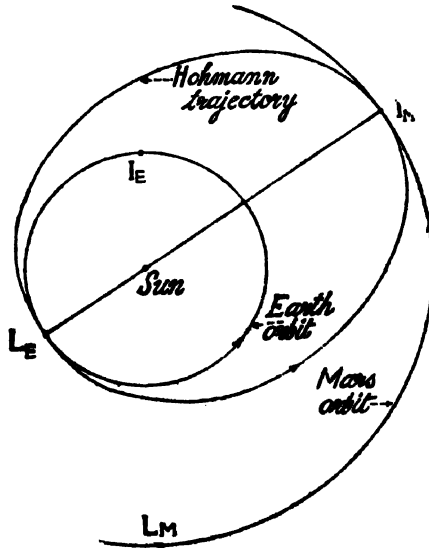
(7-9 অনুচ্ছেদের (8) অংশও দেখ।)

প্রশ্ন। পৃথিবীর কোন নকল উপগ্রহের উপভূ উচ্চতা 160 km এবং উপভূ বেগ 28,800 km/hr। ভূপৃষ্ঠে পলায়নের বেগ 11.2 km/s। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R=6400$ km ধরিয়া অপভূ উচ্চতা, অপভূ বেগ ও আবর্তনের পর্যায়কাল বাহির কর।

[উত্তর : 790 km ; 7.3 km/s ; 1 hr 34 min]

(সংকেত—উপভূতে পলায়নের বেগ পাইতে 3.21.1a সমীকরণ ব্যবহার কর।)

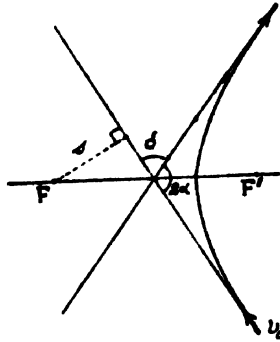
আন্তর্গ্রহ কক্ষ (Interplanetary orbit)। নকল উপগ্রহের কক্ষ বাড়াইয়া উহাতে অন্য গ্রহে পৌঁছান সম্ভব। 1925 খৃষ্টাব্দে হোম্যান (Hohmann) নামে একজন জর্মন ইঞ্জিনীয়ার প্রমাণ করেন যে, যে উপবৃত্ত কক্ষে এক গ্রহ হইতে অন্য কোন গ্রহে সবচেয়ে কম শক্তি ব্যয়ে যাওয়া যায় তাহা উভয় গ্রহের কক্ষের স্পর্শক। এই কক্ষকে 'হোম্যান কক্ষ' বলে।

3.12 চিত্রে পৃথিবী এবং মঙ্গলগ্রহের মধ্যে এইরূপ একটি কক্ষ দেখান হইয়াছে। সুবিধার জন্য উভয় গ্রহের কক্ষ বৃত্তাকার ধরা হইয়াছে, এবং

3.12 চিত্র

হোম্যান কক্ষে গতিতে পৃথিবী ও মঙ্গলের আকর্ষণ উপেক্ষা করা হইয়াছে। এই কক্ষে গতি যেন কেবল সূর্যের আকর্ষণের জন্য এবং উৎক্ষিপ্ত যান সূর্যের একটি নকল গ্রহ। এই সরলীকরণের ফলে হোম্যান কক্ষে উপবৃত্ত কক্ষ সংক্রান্ত সব সিদ্ধান্তগুলিই প্রয়োগ করা যাইবে।

ইহা করিলে দেখা যায়, পৃথিবী হইতে এই কক্ষে মঙ্গলগ্রহে যাইতে 259 দিন সময় লাগিবে। পৃথিবী ছাড়ার সময় উহার অবস্থান L_E (3.12 চিত্র) এবং মঙ্গলের অবস্থান L_M হইলে, মঙ্গলের সঙ্গে নকল গ্রহের মিলন ঘটিবে I_M বিন্দুতে এবং তখন পৃথিবী থাকিবে I_E বিন্দুতে। পৃথিবী ছাড়ার সময় সূর্য সাপেক্ষে নকল গ্রহের বেগ হইতে হইবে প্রায় 32.5 km/s।

হোম্যান কক্ষে গতি সবচেয়ে মন্থর, কিন্তু শক্তিব্যয় সবচেয়ে কম। বেশী শক্তি ব্যয় করিয়া অন্য কক্ষে আরও তাড়াতাড়ি মঙ্গলে পৌঁছান যাইবে।

3-22. কেন্দ্রকের বিকর্ষণ; α-কণার বিক্ষেপণ সংক্রান্ত রাদারফোর্ডের পরীক্ষা (Nuclear repulsion ; Rutherford's experiment on scattering of α-particles)। মনে কর Ze পজিটিভ আধানে আহিত কোন কেন্দ্রক F বিন্দুতে (3.13 চিত্র) স্থির আছে, এবং $2e$ পজিটিভ

3.13 চিত্র

আধানে আহিত একটি α-কণা v_0 বেগে উহার দিকে এমনভাবে নিক্ষিপ্ত হইয়াছে যে সোজা গেলে কণাটি কেন্দ্রক হইতে s দূর দিয়া যাইবে। s-কে 'সংঘাত প্রাচল' (Impact parameter) বলে। দুই আধানে বিকর্ষণ হয় এবং বল দুয়ের দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। বলের মান $F=2Ze^2/r^2$ এবং একক ভরের বল স্থিরাংক k (3-19 অনুচ্ছেদ)$=2Ze^2/m$; ইহা পজিটিভ রাশি। m α-কণার ভর। 3-19.5 অনুচ্ছেদের আলোচনা অনুসারে α-কণার কক্ষপথ হইবে পরাবৃত্তের নিগেটিভ শাখা।

কেন্দ্রকের বিকর্ষণের জন্য α-কণার গতিপথ δ কোণে বিচ্যুত হয়। পরাবৃত্তের দুই অনন্ত স্পর্শকের (asymptotes) মধ্যে কোণ 2α হইলে $\delta=\pi-2\alpha$। পরাবৃত্তের জ্যামিতিক ধর্ম হইতে জানা আছে

$$\tan \tfrac{1}{2}\delta=\cot\alpha=(\epsilon^2-1)^{-\frac{1}{2}} \qquad (3\text{-}22.1)$$

3-19.17 সমীকরণ অনুসারে $\epsilon^2 - 1 = 2h^2E'/k^2$। E' একক ভরের গতি ও স্থিতিশক্তির যে কোন সময়ের যোগফল। আদি মুহূর্তে দুই কণার দূরত্ব বেশী বলিয়া স্থিতিশক্তি শূন্য ধরা যায়। অতএব $E' = \frac{1}{2}v_0^2$। তা ছাড়া, h = একক ভরের কৌণিক ভরবেগ $= sv_0$ এবং $k = 2Ze^2/m$।

$$\therefore \quad \epsilon^2 - 1 = 2h^2E'/k^2 = h^2v_0^2/k^2$$

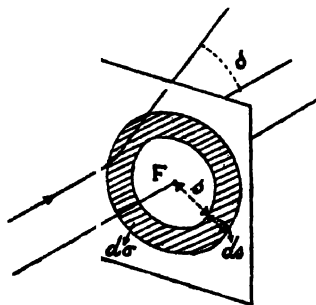
$$\text{এবং} \quad (\epsilon^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = k/hv_0 = \frac{2Ze^2/m}{sv_0^2}$$

$$\text{অতএব} \quad \tan\tfrac{1}{2}\delta = \frac{2Ze^2}{msv_0^2} \qquad (3\text{-}22.2)$$

পরীক্ষার সঙ্গে এই ফল তুলনা করিতে হইলে উহা হইতে s রাশিটি অপনীত করিতে হইবে, কারণ s মাপা যায় না। খুব পাতলা পাতে যদি প্রতি বর্গক্ষেত্রে n সংখ্যক কেন্দ্রক থাকে ও N α-কণা উহাতে আপতিত হয়, তাহা হইলে গড়ে δ ও $\delta + d\delta$ কোণের মধ্যে যে dN সংখ্যক α-কণা বিক্ষিপ্ত হইবে, তাহা n ও N-এর সমানুপাতিক হইবে ধরিয়া লেখা যায়

$$dN \propto nN \text{ বা } dN/N = n\,d\sigma \qquad (3\text{-}22.3)$$

$d\sigma$ রাশিটিকে δ ও $\delta + d\delta$ কৌণিক ব্যবধানের 'অবকলীয় বিক্ষেপণ প্রস্থচ্ছেদ' (differential cross-section for scattering) বলে। $d\sigma$-র মাত্রা (dimensions) ক্ষেত্রফলের মাত্রা। কেন্দ্রককে ঘেরিয়া প্রস্থচ্ছেদের যেটুকু ক্ষেত্রে আপতিত হইলে α-কণা উপরোক্ত $d\delta$ কৌণিক অঞ্চলে বিক্ষিপ্ত হইবে, $d\sigma$ তাহার কার্যকর মান।

মনে কর, কোন α-কণা বিক্ষেপণ কেন্দ্র F-এর (3.14 চিত্র) দিকে ছুটিয়া

3.14 চিত্র

আসিতেছে। সংঘাত প্রাচল s ও $s + ds$-এর মধ্যে থাকিলে কণা যদি δ ও $\delta + d\delta$ কৌণিক অঞ্চলে বিক্ষিপ্ত হয়, তাহা হইলে $d\sigma = 2\pi s\,ds$ হইবে।

চিত্রে এই অংশ ছায়া করিয়া দেখান হইয়াছে। 3-22.2 সমীকরণ হইতে পাই

$$s=\frac{2Ze^2}{mv_0^2}\cot\frac{\delta}{2}$$

এবং ইহার অবকলনে পাই

$$|ds|=\frac{Ze^2}{mv_0^2}\operatorname{cosec}^2\frac{\delta}{2}\,d\delta$$

$$\therefore\quad d\sigma=2\pi s\,|ds|=2\pi\frac{2Ze^2}{mv_0^2}\cot\frac{\delta}{2}\cdot\frac{Ze^2}{mv_0^2}\cdot\operatorname{cosec}^2\frac{\delta}{2}\,d\delta$$

$$=\left(\frac{Ze^2}{mv_0^2}\right)^2\cdot\frac{2\pi\sin\delta}{\sin^4\frac{1}{2}\delta}\,d\delta \tag{3-22.4}$$

অতএব $$\frac{dN}{Nn}=\left(\frac{Ze^2}{mv_0^2}\right)^2\frac{2\pi\sin\delta}{\sin^4\frac{1}{2}\delta}\,d\delta \tag{3-22.5}$$

রাদারফোর্ড তাঁহার পরীক্ষালব্ধ ফল এই সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করিয়াছিলেন। পরীক্ষায় সোনার পাতলা পাতের কেন্দ্রকগুলি বিক্ষেপণ কেন্দ্র। সোনার কেন্দ্রকের আধান $Ze=79e$। α-কণার ভর $m=6.6\times10^{-24}$g। $v_0=2\times10^9$ cm/s ছিল। পাতের n এবং আপতিত α-কণার সংখ্যা N জানা ছিল। প্রায় 150° কোণে বিক্ষিপ্ত α-কণার সংখ্যা (dN) মাপিয়া দেখা গিয়াছিল s প্রায় $3{\cdot}66\times10^{-13}$ cm।

এই পরীক্ষার সাহায্যে রাদারফোর্ড কেন্দ্রকের ব্যাপ্তি (dimensions) মাপিতে পারিয়াছিলেন। মোটামুটি ইহা 10^{-12} cm ক্রমের।

3-23. কেপলারের সূত্রাবলী (Kepler's laws)। ডেনমার্কের জ্যোতির্বিদ টাইকো ব্রাহি (Tycho Brahe, ড্যানিশ উচ্চারণ টিকো ব্রাহে) বহু বৎসর ধরিয়া বিভিন্ন গ্রহের অবস্থান মাপেন। তাঁহার সংগৃহীত তথ্য কয়েক বৎসর ধরিয়া বিশ্লেষণ করিয়া এবং নিজে আরও অনুরূপ তথ্য সংগ্রহ করিয়া তাঁহার সহকারী কেপলার গ্রহের গতি সংক্রান্ত নিম্নোক্ত সূত্র তিনটি বাহির করেন। ইহারা কেপলারের সূত্র নামে খ্যাত।

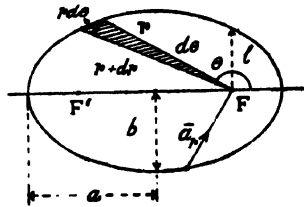
(1) গ্রহগুলি সূর্যের চারদিকে উপবৃত্ত কক্ষে ঘোরে; সূর্য থাকে উপবৃত্তের এক ফোকাসে।

(2) সূর্য ও গ্রহ যোগ করিয়া যে রেখা, উহা সমান সময়ে সমান ক্ষেত্র বর্ণনা করে।

(3) কোন উপবৃত্তে পরিক্রমণের পর্যায়কালের বর্গ ঐ উপবৃত্তের দীর্ঘ অক্ষার্ধের ঘন মানের সমানুপাতিক।

কেপলারের সূত্রগুলি হইতে গ্রহের গতির সুষ্ঠু বর্ণনা পাওয়া যায়; কিন্তু

কি কারণে গতি ঐ প্রকার হয় তাহা জানা যায় না। নিউটন এই কারণ আবিষ্কার করেন ; উহা হইল সূর্যে ও গ্রহে দূরত্বের বিষমবর্গীয় আকর্ষণ। সূত্রগুলি হইতে কি করিয়া এ সিদ্ধান্তে আসা যায় তাহা আমরা আলোচনা করিব। দ্বিতীয় সূত্র হইতে দেখা যাইবে বল কেন্দ্রগ ; প্রথম সূত্র হইতে দেখিব বল দূরত্বের বিষমবর্গীয়। তৃতীয় সূত্র হইতে দেখিব যে, সকল গ্রহের ক্ষেত্রেই প্রতি একক ভরের উপর বল (F/m) ও সূর্য হইতে উহার দূরত্বের বিপরীত বর্গের $(1/r^2)$ অনুপাত, অর্থাৎ $(F/m) \div (1/r^2)$, একই। এই অনুপাতকেই একক ভরের বল স্থিরাংক (force constant per unit mass) বলে। ইহার একত্ব হইতে মহাকর্ষীয় নিত্যসংখ্যার অবতারণা করা যায়।

দ্বিতীয় সূত্র হইতে সিদ্ধান্ত। সূর্য ও গ্রহে দূরত্বের তুলনায় উহাদের ব্যাস উপেক্ষণীয় বলিয়া উভয়কে বিন্দু কণা ধরা যায়। সূর্যের অবস্থানকে মূলবিন্দু করিয়া গ্রহের কক্ষতলে ধ্রুবীয় নির্দেশতন্ত্র লওয়া যাক। dt অবসরে গ্রহের অবস্থান r, θ বিন্দু হইতে $r+dr, \theta+d\theta$ বিন্দুতে সরিলে

3.15 চিত্র

(3.15 চিত্র) গ্রহের স্থানভেক্টর **r** এই সময়ে যে ক্ষেত্র বর্ণনা করে তাহার মান $\frac{1}{2}r.rd\theta = \frac{1}{2}r^2 d\theta$। অতএব ক্ষেত্র বর্ণনার হার $\frac{1}{2}r^2 d\theta/dt = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$। দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে ইহা স্থিরমান। অতএব লেখা যায়

$$\tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \tfrac{1}{2}h \quad \text{বা} \quad r^2\dot{\theta} = h \qquad (3\text{-}23.1)$$

h-এর মান স্থির এবং উহা আলোচ্য গ্রহের ক্ষেত্রীয় বেগের (areal velocity) দ্বিগুণ।

3-7.4 (b) সমীকরণে আমরা দেখিয়াছি সমতলীয় ধ্রুবীয় নির্দেশাংককে অনুপ্রস্থ ত্বরণ

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

$r^2\dot{\theta}$ রাশিটির মান স্থির থাকায় $a_\theta = 0$ হইবে। ইহার অর্থ দাঁড়ায় যে গ্রহের গতিতে ত্বরণ সর্বদাই অরীয় (radial), অর্থাৎ কেন্দ্রগ। অতএব বলও কেন্দ্রগ।

প্রথম সূত্র হইতে সিদ্ধান্ত। গ্রহের ত্বরণ সর্বদাই অরীয় বলিয়া 3.7.4(*a*) সমীকরণ উহার গতির সমীকরণ হইবে, অর্থাৎ

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = F(r)/m = a_r$$

r-এর বদলে $1/r = u$-কে স্থানাংক ধরিলে 3-18.7 ও 3-18.8 সমীকরণ অনুযায়ী উপরের গতীয় সমীকরণ হইয়া দাঁড়ায়

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{a_r}{h^2u^2}$$

কেপলারের প্রথম সূত্রে বলে গ্রহের কক্ষ উপবৃত্ত। ধ্রুবীয় স্থানাংকে উপবৃত্তের সমীকরণ

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1 + \epsilon \cos \theta}{l}$$

ইহা হইতে পাই

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\epsilon \cos \theta}{l} \text{ এবং } \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{l}$$

$$\text{অতএব } -\frac{a_r}{h^2u^2} = \frac{1}{l}$$

$$\text{বা } a_r = -\frac{h^2u^2}{l} = -\frac{h^2}{lr^2} = -\frac{k}{r^2}. \qquad (3\text{-}23.2)$$

$$k = h^2/l \qquad (3\text{-}23.3)$$

রাশিটি নির্দিষ্ট গ্রহের ক্ষেত্রে স্থির মান। তৃতীয় সূত্র হইতে দেখিব ইহা সকল গ্রহের ক্ষেত্রেই সমান।

3-23.2 সমীকরণের নিগেটিভ চিহ্ন হইতে বোঝা যায় ত্বরণ (বা বল) মূলবিন্দুর (অর্থাৎ সূর্যের) অভিমুখে। দেখা যায় বল আকর্ষক ও দূরত্বের বর্গের বিষমানুপাতিক।

তৃতীয় সূত্র হইতে সিদ্ধান্ত। উপবৃত্তের দীর্ঘ ও হ্রস্ব অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$ হইলে $b^2 = al$ এবং উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল πab। উপবৃত্ত পরিক্রমার পর্যায়কাল T হইলে ক্ষেত্রীয় বেগ $\pi ab/T$। দ্বিতীয় সূত্র

অনুসারে ক্ষেত্রীয় বেগের মান $h/2$ বলিয়া পাই

$$\frac{\pi ab}{T}=\frac{h}{2} \text{ বা } h^2=\frac{4\pi^2a^2b^2}{T^2}=\frac{4\pi^2a^3l}{T^2}$$

$$\therefore\ 4\pi^2\frac{a^3}{T^2}=\frac{h^2}{l}=k \qquad (3\text{-}23.4)$$

তৃতীয় সূত্র অনুসারে a^3/T^2 সকল গ্রহের ক্ষেত্রে একই হওয়ায় দেখা যায় একক ভরের বল স্থিরাংক k সকল গ্রহের ক্ষেত্রেই সমান। এই ফল হইতে বলের ব্যঞ্জকে (expression) মহাকর্ষীয় নিত্যসংখ্যা G-র অবতারণা করা যায়।

মহাকর্ষীয় নিত্যসংখ্যা (Universal gravitational constant)। অরীয় ত্বরণ a_r-কে গ্রহের ভর m দিয়া গুণ করিলে গ্রহের উপর মোট বল $F(r)$-এর মান পাওয়া যায়। $F=ma_r=mk/r^2$। নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুসারে সূর্যের উপর সমান বল ক্রিয়া করিবে। F-এর ব্যঞ্জক হইতে ধরা চলে ইহা সূর্যের ভর M-এর সমানুপাতিক হইবে। তাহা হইলে লেখা যায় $F=Mk'/r^2$। k' এখানে সূর্যের একক ভর সংক্রান্ত বল স্থিরাংক। উভয় বলের মান সমান বলিয়া

$$mk=Mk' \text{ বা } \frac{k}{M}=\frac{k'}{m}=G \text{ (ধরা যাক)}$$

এই G রাশিটিই মহাকর্ষীয় নিত্যসংখ্যা এবং

$$k=GM \qquad (3\text{-}23.5)$$

যে কোন গ্রহের উপর বা সূর্যের উপর বলের মান

$$F=\frac{GMm}{r^2} \qquad (3\text{-}23.6)$$

সূর্য ও গ্রহের আকর্ষণ বিচারে 3-23.6 সমীকরণে G রাশিটি আসিয়াছে। কেপলারের সূত্র অনুসারে সকল গ্রহের ক্ষেত্রে G একই। সূর্য ও গ্রহগুলিকে আমরা গোলক বলিয়া মনে করিতে পারি। সমসত্ত্ব গোলকের ক্ষেত্রে উহার ভর গোলকের কেন্দ্রে সংহত বলিয়া ধরা যায় (7-4 অনুচ্ছেদ), অর্থাৎ মহাকর্ষীয় আকর্ষণের ক্ষেত্রে এরূপ গোলককে উহার কেন্দ্রে অবস্থিত সমভর কণা দিয়া প্রতিস্থাপিত (replaced) করা যায়। (এই সিদ্ধান্তে আসিতে নিউটনের নাকি প্রায় কুড়ি বৎসর সময় লাগিয়াছিল।) নিউটনের মনে হইয়াছিল, বিরাট গোলক-পিণ্ডের আকর্ষণের ক্ষেত্রেই G আসিবে, অন্যত্র আসিবে না—ইহা যুক্তিযুক্ত নয়। তিনি সিদ্ধান্ত করেন যে-কোন দুইটি বস্তুকণার মধ্যে আকর্ষণ 3-23.6 সমীকরণ অনুসারে হইবে। ইহাই মহাকর্ষীয় সূত্র।

প্রশ্ন

1. বক্রপথে চলন্ত কণার ত্বরণের অভিলম্ব উপাংশ বাহির কর। পথের কোন বিন্দুতে বক্রতা কেন্দ্র ও বক্রতা ব্যাসার্ধ বলিতে কি বুঝায় ?

কোন কণার গতির সমীকরণ

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}\ R\cos\omega t+\mathbf{j}\ R\sin\omega t.$$

ইহার ত্বরণের স্পার্শক ও অভিলম্ব উপাংশ বাহির কর এবং পথের যে-কোন বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ যে R তাহা প্রমাণ কর।

[সংকেত—গতি বৃত্তপথে। 0 ; $R\omega^2$]

2. সমতলীয় গতিতে ধ্রুবীয় স্থানাংকে ত্বরণের অরীয় ও অনুপ্রস্থ উপাংশের মান বাহির কর।

[উত্তর :—$R\omega^2$; 0]

3. সচল কণার বেগ ও কোন স্থির বিন্দু সাপেক্ষে উহার কৌণিক বেগের সম্পর্ক বাহির কর। এই স্থির বিন্দু কণার আবর্তন অক্ষের উপর থাকিলে সম্পর্ক কি হইবে ?

কৌণিক বেগকে ভেক্টর রাশি মনে করা যায় কেন ? ইহার দিক্ কিভাবে স্থির করা হয় ?

4. বলের কাল-সমাকল ও পথ-সমাকল দ্বারা কি বুঝায় ? উহাদের সাহায্যে গতি-সংক্রান্ত কি কি বিষয় জানা যাইতে পারে ?

5. সংরক্ষী বল কাহাকে বলে ? তিনটি বিভিন্ন উপায়ে ইহার সংজ্ঞা দাও, এবং উহার যে কোন একটি হইতে অন্য দুইটি পাওয়া যায়, ইহাও দেখাও।

যে কোন প্রকার কেন্দ্রগ বল সংরক্ষী, ইহা কিভাবে দেখাইতে পার ? তোমার জানা সকল প্রকার সংরক্ষী বলের নাম কর।

6. সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল স্থির থাকে ইহা প্রমাণ কর।

7. সরল দোলগতির দুই প্রকার সংজ্ঞা দাও, এবং উহার যে-কোন একটি হইতে অন্যটিতে কিভাবে যাওয়া যায় দেখাও।

কোন কণার ভর 1 g এবং উহার উপর প্রত্যানয়ক বল 4 dyn/cm। আদি মুহূর্তে কণার সরণ 2.5 cm ও বেগ 12 cm/s হইলে কণার গতির সমীকরণ কি হইবে ?

[উত্তর : $x=6.5\cos(2t-66°2')$]

পথের মধ্যবিন্দুতে কণার মোট শক্তি 84.5 erg হইবে দেখাও।

8. কোন কণার উপর সরণের আনুপাতির প্রত্যানয়ক বল ও বেগের আনুপাতিক বিরোধী বল ক্রিয়া করিলে উহার গতি কি কি প্রকার হইতে পারে আলোচনা কর।

ক্রান্তিক অবমন্দনে সাম্যাবস্থায় কণাকে হঠাৎ v_0 বেগ দেওয়া হইল। প্রমাণ কর কণা চরম বিক্ষেপের অবস্থানে যাইতে যে সময় লইবে তাহা v_0-র উপর নির্ভর করে না।

[সংকেত—$t=0$ তে $x=0$ বলিয়া কণার গতির সমীকরণ $x=Bte^{-\omega t}$ হইবে। চরম বিক্ষেপের অবস্থানে $\dot{x}=0$। বিক্ষেপকাল $t=1/\omega$]

9. কৌণিক ভরবেগ কাহাকে বলে? উহাকে ভেক্টর রাশি মনে করা যায় কেন? উহার দিক্ কি ধরা হয়?

প্রমাণ কর যে কোন স্থিরবিন্দু সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ পরিবর্তনের হার ঐ বিন্দুসাপেক্ষে ক্রিয়াশীল বলের ভ্রামকের সমান।

10. কেন্দ্রগ বল কাহাকে বলে? এরূপ বলের ক্রিয়ায় বলকেন্দ্র সাপেক্ষ কৌণিক ভরবেগ স্থির থাকিবে কেন? কৌণিক ভরবেগ স্থিরাংকের সহিত ক্ষেত্রীয় বেগের সম্পর্ক কি?

ধ্রুবীয় বিপরীত স্থানাংকে কেন্দ্রীয় কক্ষের অবকল সমীকরণ বাহির কর।

কেন্দ্রীয় গতিতে শক্তি সংরক্ষিত থাকিবে কেন? মোট শক্তির মান লেখ।

11. দূরত্বের বিষমবর্গীয় বলাধীন গতিতে ধ্রুবীয় স্থানাংকে কক্ষের সমীকরণ কি হইবে বাহির কর। এইরূপ গতিতে কোন্ কোন্ রাশি স্থির থাকে? উহাদের মান কিভাবে পাওয়া যায়?

কক্ষ কনিক (conic) মনে করিবার কি কারণ আছে? কনিকের নাভিলম্বার্ধ ও উৎকেন্দ্রতার মান বাহির কর।

12. উপরের প্রশ্নের নাভিলম্বার্ধ ও উৎকেন্দ্রতার সমীকরণের সাহায্যে বিকর্ষক ও আকর্ষক বলের কোন্ ক্ষেত্রে কক্ষ কিরূপ হইবে আলোচনা কর।

উপবৃত্ত কক্ষে মোট শক্তি নিগেটিভ বলার অর্থ কি? অন্যান্য ক্ষেত্রে ইহা কিরূপ?

13. ক্ষেপণাস্ত্রের গতি আলোচনা কর। আলোচনা সরল করিতে কি কি বিষয় উপেক্ষা করিয়াছ বল।

ক্ষেপণাস্ত্র পৃথিবীতেই ফিরিয়া আসিতে হইলে উহার নিক্ষেপ বেগের ঊর্ধ্বসীমা কি হইবে? বেগ ইহার বেশী হইলে গতি কি প্রকার হয়?

14. নকল উপগ্রহের গতি আলোচনা কর। ইহার বেগ কোন্ সীমার মধ্যে থাকা দরকার? কক্ষের পর্যায়কাল, এবং ভূপৃষ্ঠ হইতে কক্ষের উপভূ ও অপভূ দূরত্বের মান নির্ণেয় রাশির সাহায্যে প্রকাশ কর।

হোম্যান কক্ষ কাহাকে বলে?

15. কেন্দ্রক দ্বারা α-কণার বিক্ষেপণ সংক্রান্ত রাদারফোর্ডের পরীক্ষার তত্ত্ব আলোচনা কর।

16. গ্রহের গতিসংক্রান্ত কেপলারের সূত্রগুলি লেখ। উহাদের সাহায্যে নিউটনের মহাকর্ষীয় সূত্রে কি করিয়া আসা যায়?

17. মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে পলায়নের বেগ বলিতে কি বুঝায়?

কোন স্থির কণার মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে অন্য একটি কণা v_0 বেগে স্থান ভেক্টরের সহিত α কোণে নিক্ষিপ্ত হইল। v_0 নিক্ষেপ বিন্দুতে পলায়নের বেগ v_∞ অপেক্ষা কম হইলে নিক্ষিপ্ত কণার কক্ষ উপবৃত্ত হইবে প্রমাণ কর।

উপবৃত্ত পরিক্রমণের পর্যায়কাল হিসাব কর।

$v_0 = v_\infty$ বা $v_0 > v^\infty$ হইলে কক্ষ কি প্রকার হইবে?

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

কণাগোষ্ঠীর গতিবিজ্ঞান

(Dynamics of a system of particles)

গত পরিচ্ছেদে একটি মাত্র কণার গতি আলোচনা করা হইয়াছে। এই পরিচ্ছেদে আমরা পরস্পর সম্পর্কিত একাধিক কণার গতি আলোচনা করিব।

4-1. ভরকেন্দ্র (Centre of mass)। মনে কর n সংখ্যক কণা ত্রিমাত্রিক দেশে (three dimensional space) n অবস্থানে ব্যাপ্ত হইয়া আছে। উহাদের i-তম কণার ভরকে m_i ($i=1, 2, 3\ldots\ldots n$) দিয়া এবং যে কোন স্বেচ্ছিক মূলবিন্দু O সাপেক্ষে উহার স্থানভেক্টরকে $\overline{OP_i} \equiv \mathbf{r}_i$ দিয়া বুঝান হইবে।

যে G বিন্দুর স্থান ভেক্টর

$$\overline{OG} \equiv \mathbf{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)$$

$$= \Sigma\, m_i \mathbf{r}_i / M \qquad (4\text{-}1.1)$$

তাহাকে ঐ কণাগোষ্ঠীর 'ভরকেন্দ্র' বলে। M বলিতে উহাদের মোট ভর বুঝায়।

4-1.1 হইতে লেখা যায়

$$\Sigma\, m_i \mathbf{r}_i = M\mathbf{R} \qquad (4\text{-}1.2)$$

এই সম্পর্কটি পরে অনেক জায়গায় আমাদের ব্যবহার করিতে হইবে।

কার্টেজীয় নির্দেশাংকে $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ এবং $\mathbf{R} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ হইলে

$$\bar{x} = (\Sigma\, m_i x_i) / M$$

$$\bar{y} = (\Sigma\, m_i y_i) / M$$

ও $$\bar{z} = (\Sigma\, m_i z_i) / M$$

হইবে। ভর অবিচ্ছিন্নভাবে ব্যাপ্ত থাকিলে, লেখা যায়

$$\bar{x} = \int x\,dm/M, \text{ ইত্যাদি।} \qquad (4\text{-}1.3)$$

dm স্বল্প পরিমিত আয়তনের ভর ও x উহার নির্দেশাংক। সমাকলন সম্পূর্ণ ভর ব্যাপিয়া হইবে। 4-1.3 সমীকরণের সাহায্যে সরল জ্যামিতিক আকারের নানা বস্তুর ভরকেন্দ্র বাহির করা যায়।

ভরকেন্দ্র G-র অবস্থান মূলবিন্দু O-র অবস্থানের উপর নির্ভর করে না। ইহা প্রমাণ করিতে অন্য কোন বিন্দু O'-কে মূলবিন্দু ধরা যাক। $\overline{O'O}=\mathbf{d}$ এবং $\overline{O'P}_i=\mathbf{r}_i'$ হইলে $\mathbf{r}_i'=\mathbf{d}+\mathbf{r}_i$ হইবে। নূতন অবস্থায় G' বিন্দু ভরকেন্দ্র হইলে, সংজ্ঞানুসারে,

$$\begin{aligned}\overline{O'G'}&=\Sigma\, m_i\mathbf{r}_i'/M=\Sigma\, m_i(\mathbf{d}+\mathbf{r}_i)/M\\&=\Sigma\, m_i\mathbf{d}/M+\Sigma\, m_i\mathbf{r}_i/M\\&=\mathbf{d}+\overline{OG}=\overline{O'O}+\overline{OG}=\overline{O'G}.\end{aligned}$$

ইহার অর্থ G ও G' একই বিন্দু। অতএব G অদ্বিতীয় (unique) বিন্দু, অর্থাৎ নির্দিষ্ট কণাগোষ্ঠীর একটিমাত্র ভরকেন্দ্র থাকে।

G বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিলে $\mathbf{R}=0$ হইবে। ইহাতে 4-1.1 সমীকরণ হইয়া দাঁড়ায়

$$\Sigma\, m_i\mathbf{r}_i'=0 \qquad (4\text{-}1.4)$$

এখানে $\mathbf{r}_i'$, G সাপেক্ষে i-তম কণার স্থানভেক্টর বুঝায়। এই সমীকরণ গুরুত্বপূর্ণ ; পরে অনেক স্থানে আমরা ইহার ব্যবহার করিব। $m_i\mathbf{r}_i'$-কে G বিন্দু সাপেক্ষে m_i ভরের প্রথম ভর-ভ্রামক (first moment of the mass) বলা চলে। 4-1.4 সমীকরণকে ভাষায় প্রকাশ করিতে হইলে বলা যায় 'ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে কোন কণাগোষ্ঠীর প্রথম ভর-ভ্রামকের ভেক্টর যোগফল শূন্য।' কার্যতঃ এই উক্তিকেই ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞা হিসাবে দেওয়া যায় এবং বলা চলে

'যে বিন্দু সাপেক্ষে কোন কণাগোষ্ঠীর প্রথম ভর-ভ্রামকের ভেক্টর যোগফল শূন্য, সেই বিন্দু ঐ কণাগোষ্ঠীর ভরকেন্দ্র।'

বস্তু (body) মাত্রেই কণাগোষ্ঠী ; উহাতে ভরের ব্যাপ্তি অবিচ্ছিন্ন ধরা হয়। কোন বস্তু কিংবা বিচ্ছিন্ন কণাগোষ্ঠী অভিকর্ষের (gravity) ক্রিয়াধীন হইলে, অভিকর্ষের মান স্থির থাকিলে ভরকেন্দ্র এবং ভারকেন্দ্র একই হয় কারণ ভারকেন্দ্রের সংজ্ঞা অনুসারে $\Sigma\, m_i g_i \mathbf{r}_i=0$। যেখানে অভিকর্ষ বিবেচ্য নহে সেখানে দুই বিন্দু এক হইলেও উহাকে ভারকেন্দ্র না বলিয়া ভরকেন্দ্র বলাই সঙ্গত। পৃথিবী হইতে অনেক দূরে মহাশূন্যে অভিকর্ষ বিবেচ্য নহে। অতএব সেখানে ভারকেন্দ্রের কল্পনা অর্থহীন ; কিন্তু ভরকেন্দ্রের কল্পনা সর্বাবস্থায়ই সার্থক।

4-2. ভরকেন্দ্রের গতি (Motion of centre of mass)। গত অনুচ্ছেদের মত কোন কণাগোষ্ঠী ধরা যাক। উহার i-তম কণার উপর

ক্রিয়াশীল বল $\mathbf{F}_i$-কে দুই অংশে ভাগ করা যাইতে পারে। গোষ্ঠীর বাহিরের ক্রিয়ার ফলে ঐ কণার উপর ক্রিয়াশীল বল $\mathbf{f}_i$ হইল এক অংশ। দ্বিতীয় অংশ হইল গোষ্ঠীর অন্য কোন j-তম কণা উহার উপর যে বল $\mathbf{f}_{ij}$ প্রয়োগ করে। এই সকল অভ্যন্তরীণ বলের ক্ষেত্রে নিউটনের তৃতীয় সূত্র প্রযোজ্য হইবে ইহা আমরা ধরিয়া লইব। এরূপ ক্ষেত্রে

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ij} \tag{4-2.1}$$

অতএব i-তম কণার উপর মোট বল

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}$$

সুবিধার জন্য আমরা লিখিব

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \sum_j{}' \mathbf{f}_{ij} \tag{4-2.2}$$

এখানে $\sum_j{}'$ চিহ্ন দ্বারা বুঝাইবে যোগের পদগুলিতে $j=i$ ছাড়া আর সকল পদই থাকিবে, কারণ $j=i$ হইলে উহাতে বুঝায় কণা নিজের উপরে নিজে যে বল প্রয়োগ করে। কোন কণাই নিজে নিজের উপরে কোন বল প্রয়োগ করে না। $\sum_j{}'$ এর এই অর্থ মনে রাখিতে হইবে, কারণ পরে বহুস্থানে আমরা ইহা ব্যবহার করিব।

যে কোন বিন্দুকে মূল বিন্দু লইয়া, i-তম কণায় নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র প্রয়োগ করিলে পাই

$$m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{f}_i + \sum_j{}' \mathbf{f}_{ij} \tag{4-2.3}$$

গোষ্ঠীর সমস্ত কণার অনুরূপ সমীকরণগুলি যোগ করিলে পাই

$$\Sigma\, m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \Sigma \mathbf{f}_i + \sum_i \sum_j{}' \mathbf{f}_{ij} \tag{4-2.4}$$

শেষ পদের Σ' চিহ্নের যোগে $j=i$ থাকিবে না, কিন্তু Σ চিহ্নের যোগে সকল i-ই থাকিবে। সহজেই দেখা যায় $\Sigma\,\Sigma'\,\mathbf{f}_{ij}=0$, কারণ k-তম কণার উপর l-তম কণার বল $\mathbf{f}_{kl}$ ও l-তম কণার উপর k-তম কণার বল $\mathbf{f}_{lk}$ সমান ও বিপরীত। যুগ্ম সংকলনে (double summation) এইরূপ জোড়া জোড়া সমান ও বিপরীত রাশি থাকে বলিয়া উহার মান শূন্য হয়। অতএব 4-2.4 সমীকরণ হইয়া দাঁড়ায়

$$\frac{d^2}{dt^2} \Sigma m_i \mathbf{r}_i = \Sigma\, \mathbf{f}_i = \mathbf{F} \tag{4-2.5}$$

এখানে $\mathbf{F}$ গোষ্ঠীর উপর ক্রিয়াশীল বাহিরের মোট বল বুঝায়। $\mathbf{F}$ = বহির্বল।

4-1.1 সমীকরণ হইতে লেখা যায় $\Sigma m_i\mathbf{r}_i = M\mathbf{R}$; এখানে R ভর-কেন্দ্রের স্থানভেক্টর। অতএব কণাগোষ্ঠীর গতীয় সমীকরণ

$$M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}. \qquad (4\text{-}2.6)$$

এই সমীকরণ হইতে আমরা বাহিরের F বলের ক্রিয়ায় কণাগোষ্ঠীর ভর-কেন্দ্রের গতি জানিতে পারি। দেখা যায় ভরকেন্দ্রে কণাগোষ্ঠীর মোট ভরের সমান ভরের একটি কণা থাকিলে F বলের ক্রিয়ায় উহার যে রূপ গতি হইত কণাগোষ্ঠীর ভরকেন্দ্রের গতি তাহাই। লক্ষ্য কর যে, এই গতিতে অভ্যন্তরীণ বলের কোন ক্রিয়া থাকে না। এই জন্য বলা যায় যে 'বাহিরের বলের ক্রিয়া বিচারে কণাগোষ্ঠীর ভর উহার ভরকেন্দ্রে সংহত ধরা চলে।'

4-3. কণাগোষ্ঠীর রৈখিক ভরবেগ (Linear momentum of a system of particles)। কোন কণাগোষ্ঠীয় মোট রৈখিক ভরবেগ

$$\mathbf{P} = \Sigma\,\mathbf{p}_i = \Sigma m_i\dot{\mathbf{r}}_i$$

$$= M\dot{\mathbf{R}} = M\mathbf{v} \qquad (4\text{-}3.1)$$

M ঐ গোষ্ঠীর মোট ভর, R উহার ভরকেন্দ্রের স্থানভেক্টর ও $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}$ ভরকেন্দ্রের বেগ। কণাগোষ্ঠীর বদলে উহার ভরকেন্দ্রে M ভরের কণা থাকিয়া বেগে চলিলে উহার যে রৈখিক ভরবেগ হইত, কণা-গোষ্ঠীর রৈখিক ভরবেগও তাহাই।

4-2.6 ও 4-3.1 সমীকরণ একত্র লইয়া লেখা যায়

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \qquad (4\text{-}3.2)$$

অর্থাৎ কণাগোষ্ঠীর মোট রৈখিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার উহার উপর ক্রিয়াশীল বাহিরের বলের সমান।

4-3.2 সমীকরণ হইতে দেখা যায় বাহিরের বল $\mathbf{F} = 0$ হইলে কণা-গোষ্ঠীর মোট রৈখিক ভরবেগ ($\mathbf{P} = M\mathbf{v}$) স্থির থাকিবে। ইহাই কণা-গোষ্ঠীসংক্রান্ত রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষণের সূত্র (Principle of conservation of linear momentum of a system of particles)। ইহাতে বলে যে, আভ্যন্তরীণ বল নিউটনের তৃতীয় সূত্র মানিলে কেবল আভ্যন্তরীণ বলের ক্রিয়ায় কণাগোষ্ঠীর মোট ভরবেগের কোন পরিবর্তন হয় না। স্থির

অবস্থায় একটি বোমা ফাটিলে উহার টুকরাগুলির ভরবেগের ভেক্টর যোগফল শূন্য হইবে।

রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষণ ও নিউটনের গতীর সূত্র। 3-10 অনুচ্ছেদে আমরা দেখিয়াছি বলের ঘাত (Impulse) ও রৈখিক ভরবেগ একই জাতীয় রাশি। নিউটনের প্রথম সূত্র হইতে দেখা যায় বাহির হইতে বলের ঘাত প্রযুক্ত না হইলে কণাগোষ্ঠীর ভরবেগ স্থির থাকিবে। এখানে দেখিলাম কেবলমাত্র তৃতীয় সূত্র সত্য হইলেই, কণাগোষ্ঠীর ক্ষেত্রে এই তত্ত্ব সত্য হইবে। অতএব বলা যায় নিউটনের তৃতীয় সূত্র প্রথম সূত্রের মধ্যেই নিহিত আছে। ভরবেগের ভাষায় লিখিলে নিউটনের তিনটি সূত্র মাত্র দুইটি সূত্র রূপে প্রকাশ করা যায়—

(1) বলের ঘাত না পাইলে ভরবেগ অক্ষুণ্ণ থাকে।

(2) ভরবেগ পরিবর্তন প্রযুক্ত বলের ঘাতের আনুপাতিক।

[ঘাত, বলের কাল-সমাকল (3-10 অনুচ্ছেদ)।]

4-4. কণাকোষ্ঠীর কৌণিক ভরবেগ (Angular momentum of a system of particles)। কোন স্বেচ্ছিক বিন্দু O মূলবিন্দু হইলে, সংজ্ঞানুসারে O সাপেক্ষে গোষ্ঠীর i-তম কণার কৌণিক ভরবেগ $=\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$। অতএব O সাপেক্ষে কণাগোষ্ঠীর মোট কৌণিক ভরবেগ।

$$\mathbf{L} = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) \tag{4-4.1}$$

ধরা যাক, O সাপেক্ষে গোষ্ঠীর ভরকেন্দ্র G-র স্থানভেক্টর $\mathbf{R}$, এবং G-সাপেক্ষে i-তম কণার স্থানভেক্টর $\mathbf{r}_i'$। তাহা হইলে

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \text{ এবং } \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v} \tag{4-4.2}$$

এখানে $\mathbf{v}'_i = d\mathbf{r}'_i/dt$ হইল G সাপেক্ষে i-তম কণার বেগ, এবং $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$ হইল O সাপেক্ষে ভরকেন্দ্রের বেগ। অতএব,

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)\\ &= \Sigma\{(\mathbf{R}+\mathbf{r}_i') \times m_i(\mathbf{v}+\mathbf{v}_i')\}\\ &= \Sigma(\mathbf{R} \times m_i\mathbf{v}) + \Sigma\, \mathbf{R} \times m_i\mathbf{v}_i') + \Sigma(\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{v})\\ &\quad + \Sigma(\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{v}_i')\end{aligned}$$

(2-6.7 সমীকরণ দেখ)

4-1.4 সমীকরণ অনুসারে দ্বিতীয় পদ

$$\Sigma(\mathbf{R} \times m_i\mathbf{v}_i') = \mathbf{R} \times d/dt(\Sigma m_i\mathbf{r}_i') = 0.$$

কারণ $\mathbf{r}_i'$ ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে কণার স্থানভেক্টর। একই কারণে তৃতীয় পদ

$$\Sigma(\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{v}) = \Sigma\, m_i\mathbf{r}_i') \times \mathbf{v} = 0.$$

অতএব $\mathbf{L} = \Sigma(\mathbf{R} \times m_i\mathbf{v}) + \Sigma(\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{v}_i')$

$$= \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + \Sigma\,(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i') \qquad (4\text{-}4.3)$$

ইহার প্রথম পদ ভরকেন্দ্রে অবস্থিত M ভরের O বিন্দু সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ, এবং দ্বিতীয় পদ ভরকেন্দ্র G সাপেক্ষে কণাগোষ্ঠীর মোট কৌণিক ভরবেগ। রৈখিক ভরবেগের মত এখানে গোষ্ঠীর ভর ভরকেন্দ্রে সংহত ধরিলেই চলিবে না ; কণাগোষ্ঠীর মোট কৌণিক ভরবেগ পাইতে হইলে ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে গোষ্ঠীর যে কৌণিক ভরবেগ আছে তাহা যোগ করিতে হইবে।

4-5. কৌণিক ভরবেগ ও বাহ্য টর্ক (Angular momentum and external torque)। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে গোষ্ঠীর i-তম কণার ক্ষেত্রে

$$\dot{\mathbf{p}}_i = m_i\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \Sigma'\mathbf{f}_{ij}$$

ভেক্টর অবকলনের নিয়ম অনুসারে (2-8.2d সমীকরণ),

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i$$

কারণ $d\mathbf{r}_i/dt$ ও $\mathbf{p}_i$ উভয় ভেক্টরই বেগ $\mathbf{v}_i$ অভিমুখী বলিয়া উহাদের ভেক্টর গুণফলের মান শূন্য।

অতএব, $\mathbf{L} = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)$ বলিয়া পাই

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i)$$

$$= \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) + \Sigma(\mathbf{r}_i \times \Sigma'\mathbf{f}_{ij}) \qquad (4\text{-}5.1)$$

সহজেই দেখান যায় ডান দিকের দ্বিতীয় পদের মান শূন্য। ইহার পদগুলিতে $(\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{kl} + \mathbf{r}_l \times \mathbf{f}_{lk})$-র ন্যায় জোড়া জোড়া পদ থাকিবে। এইরূপ যে কোন জোড়া পদ $= (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) \times \mathbf{f}_{kl} = \mathbf{r}_{lk} \times \mathbf{f}_{kl}$, কারণ $\mathbf{f}_{lk} = -\mathbf{f}_{kl}$, এবং $\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l = \mathbf{r}_{lk}$ l-তম কণা হইতে k-তম কণার দূরত্ব। এই দুই কণার পারস্পরিক ক্রিয়া কেন্দ্রগ ধরিলে $\mathbf{r}_{lk}$ এবং $\mathbf{f}_{kl}$-এর ক্রিয়ারেখা একই হয় এবং উহাদের ভেক্টর গুণফলের মান হয় শূন্য। অতএব

$$\Sigma(\mathbf{r}_i \times \Sigma'\mathbf{f}_{ij}) = 0$$

এবং
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = \mathbf{N} \qquad (4\text{-}5.2)$$

N রাশিটি এখানে মূলবিন্দু সাপেক্ষে বাহ্য বলের মোট ভ্রামক বা টর্ক (torque) বুঝায়। 4-5.2 সমীকরণ হইতে দেখা যায়, 'কোন বিন্দু সাপেক্ষে কোন কণাগোষ্ঠীর কৌণিক ভরবেগ পরিবর্তনের হার গোষ্ঠীর উপর ক্রিয়াশীল বাহ্য বলের ঐ বিন্দু সাপেক্ষ ভ্রামকের (বা টর্কের) সমান'।

দৃঢ় বস্তুর ঘূর্ণন আলোচনায় এই তথ্যটি খুব সাহায্য করে।

কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ (Conservation of angular momentum)। 4-5.2 সমীকরণ হইতে দেখা যায় বাহ্য টর্কের মান শূন্য হইলে L স্থির থাকিবে। বাহ্যবল ক্রিয়া না করিলে বা টর্ক সৃষ্টি না করিলে, টর্ক থাকিবে না, এবং কণাগোষ্ঠীর কৌণিক ভরবেগ অক্ষুণ্ণ থাকিবে। ইহাকেই 'কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র' বলে। নিজ অক্ষে পৃথিবীর আবর্তন ইহার একটি উদাহরণ। এখানে টর্ক সৃষ্টিকারী বাহ্যবল কার্যতঃ উপেক্ষণীয়।

এই সিদ্ধান্তে আসিতে অভ্যন্তরীণ বল মোট কোন টর্ক সৃষ্টি করিতে পারে না ধরা হইয়াছে।

4-6. কণাগোষ্ঠীর গতিশক্তি (Kinetic energy of a system of particles)। গতিশক্তির সংজ্ঞা অনুসারে কণাগোষ্ঠীর মোট গতিশক্তি

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 \qquad (4\text{-}6.1)$$

4-4.2 সমীকরণের মত $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}$ ধরিলে

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i (v^2 + v_i'^2 + 2\mathbf{v}_i'\cdot\mathbf{v})$$
$$= \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i'^2 \qquad (4\text{-}6.2)$$

কারণ 4-1.4 সমীকরণ অনুসারে তৃতীয় পদ

$$\Sigma m_i \mathbf{v}_i'.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\frac{d}{dt}(\Sigma m_i \mathbf{r}_i') = 0$$

দেখা যায় কৌণিক ভরবেগের মত গতিশক্তিও দুইটি রাশির সমষ্টি। প্রথমটি হইল ভরকেন্দ্রে রাখা M ভরের কণার v বেগের গতিশক্তি এবং দ্বিতীয়টি হইল ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে সকল কণার গতিশক্তির যোগফল। মনে রাখিতে হইবে M কণাগোষ্ঠীর মোট ভর।

4-7. সংরক্ষী বলের ক্রিয়ায় মোট শক্তি (Total energy under conservative forces)। 4-5.2 সমীকরণ পাইতে আমরা ধরিয়াছি যে অভ্যন্তরীণ বল কেন্দ্রগ, অতএব সংরক্ষী। যদি বাহ্য বলকেও সংরক্ষী ধরা যায়, তাহা হইলে সংরক্ষী বলের 3-12.5 সমীকরণে দেওয়া সংজ্ঞা অনুসারে লেখা যায়

$$\mathbf{f}_i = +\nabla_i V \text{ এবং } \mathbf{f}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} \qquad (4\text{-}7.1)$$

এখানে $V(r_1, r_2 \ldots)$ বলিতে কণাগোষ্ঠীর বাহিরে অবস্থিত যে সকল বস্তু কণাগোষ্ঠীর উপর বল প্রয়োগ করে উহাদের সাপেক্ষে কণাগোষ্ঠীর স্থিতিশক্তি বুঝায়, এবং $V_{ij}=V_{ji}$ বলিতে বুঝায় i-তম ও j-তম কণার পারস্পরিক ক্রিয়ার স্থিতিশক্তি।

এখন, 4-2.3 সমীকরণের উভয় দিক $d\mathbf{r}_i/dt$ দিয়া গুণ করিয়া সকল কণা লইয়া যোগ করিলে উহার বাঁদিক হইবে

$$\Sigma m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\, \tfrac{1}{2}\, \Sigma m_i \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{dT}{dt} \qquad (4\text{-}7.2)$$

এবং ডানদিক হইবে

$$\sum \mathbf{f}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + \sum\sum{}' \mathbf{f}_{ij} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

$$= -\sum \nabla_i V \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} - \sum\sum{}' \nabla_i V_{ij} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

$$= -\sum \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \cdot \frac{dz_i}{dt} \right)$$

$$- \sum\sum{}' \left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right)$$

$$= -\frac{dV}{dt} - \frac{1}{2} \sum\sum{}' \frac{dV_{ij}}{dt} \qquad (4\text{-}7.3)$$

V_{ij} রাশিটি $\mathbf{r}_i$ এবং $\mathbf{r}_j$ উভয়ের উপর নির্ভর করে এবং

$$dV_{ij} = \nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \nabla_j V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_j$$

বলিয়া 4-7.3 সমীকরণের শেষ ধাপে $\frac{1}{2}$ সংখ্যাটি আসিয়াছে। অতএব

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt} - \frac{1}{2} \sum\sum{}' \frac{dV_{ij}}{dt}$$

বা $$\frac{d}{dt}\left(T + V + \tfrac{1}{2}\, \Sigma\Sigma' V_{ij}\right) = 0 \qquad (4\text{-}7.4)$$

ব্রাকেটের ভিতরের রাশিটি কণাগোষ্ঠীর মোট যান্ত্রিক (mechanical) শক্তি। 4-7.4 সমীকরণ সংরক্ষী বলক্ষেত্রে যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণ বুঝায়।

লক্ষ্য কর যে, অভ্যন্তরীণ বলের জন্য রৈখিক বা কৌণিক ভরবেগে কোন পরিবর্তন হয় না, কিন্তু মোট শক্তিতে হয়।

4-8. সবাধ কণাগোষ্ঠী (System of particles with constraints)।

অনেক ক্ষেত্রে কণাগোষ্ঠী বলের ক্রিয়ায় অবাধে চলিতে পারে না; উহাকে বিশেষ কতকগুলি বাধা (constraints) মানিয়া চলিতে হয়। দুইটি কণা দৃঢ়ভাবে যুক্ত থাকিলে গতির সময় উহাদের দূরত্ব সর্বদাই স্থির থাকিবে। কোন ক্ষেত্রে হয়ত কণার গতি বিশেষ কোন তলে আবদ্ধ রাখিতে হইবে। সবাধ গতির এইরূপ নানাপ্রকার উদাহরণ হইতে পারে।

সবাধ গতিতে আলোচ্য কণাগোষ্ঠীর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা (Degrees of freedom ; 4-13 অনুচ্ছেদ) অবাধগতির তুলনায় কম হয়। অবাধগতিতে n সংখ্যক কণার x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2......ইত্যাদি $3n$ সংখ্যক স্বাতন্ত্র্য থাকে; ইহার যে কোনটি স্বাধীন ভাবে বদলাইতে পারে। বিশেষ কোন বাধা মানিয়া চলিতে হইলে এই $3n$ চর রাশির (variables) প্রত্যেকটি স্বতন্ত্র থাকে না; উহাদের একাধিক রাশির মধ্যে স্থির সম্পর্ক থাকে। দুই কণা দৃঢ়ভাবে যুক্ত থাকিলে উহাদের দূরত্ব স্থির থাকিতে হইবে বলিয়া $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$ স্থির রাশি হইতে হয়। ইহার সাহায্যে কণা দুইটির ছয়টি চর রাশির একটিকে অপনীত করা যায় এবং যুগ্মকণার স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হয় পাঁচ।

তা ছাড়া, গতিতে বাধা থাকার জন্য প্রযুক্ত বল ছাড়া কণাগোষ্ঠীর উপর অন্য বলও ক্রিয়া করে: এইগুলিকে **বাধাজনিত বল** (forces of constraint) বলে। প্রযুক্ত বল স্থানাংকের উপর নির্ভর করে, কিন্তু এই বলগুলিকে কণার স্থানাংকে প্রকাশ করা সম্ভব না হইতেও পারে। 4-2.3-র মত মূল গতীয় সমীকরণে এইরূপ বল থাকিলে উহার সমাধান সম্ভব নয়। অতএব এই সকল সমীকরণ হইতে ঐরূপ বল অপনীত করিতে হইবে। ইহা কিরূপে করা যায় তাহা পরবর্তী অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হইয়াছে। ঘর্ষণ না থাকিলে, অধিকাংশ বাধারই বিশেষ একটি ধর্ম থাকে—বাধাগুলি বজায় রাখিয়া কণাগোষ্ঠীতে যদৃচ্ছ একটুখানি সরণ ঘটাইলে বাধাজনিত বলগুলির বিরুদ্ধে কোন কার্য হয় না। এই ধর্মের সাহায্য লইয়া বলগুলি অপনীত করা যায়।

4-9. কল্পিত কার্যের তত্ত্ব (Principle of virtual work)। কার্যের কম্পনের (concept) সাহায্যে সাম্যের সুষ্ঠু একটি বর্ণনা দেওয়া

যায়। সবাধ কণাগোষ্ঠীর ক্ষেত্রে ইহা বিশেষভাবে প্রযোজ্য। মনে কর, বাধা লঙ্ঘন না করিয়া i-তম কণাকে ইচ্ছামত সামান্য একটু $\delta\mathbf{r}_i$ পরিমাণ সরান হইল। $\delta\mathbf{r}_i$ কার্যতঃ ঘটিবার মত সরণ না হইতেও পারে ; এরূপ সরণ ঘটিবার পক্ষে কোন বাধা না থাকিলেই হইল। আসল কোন সরণ হইতে পৃথক রাখিবার জন্য আমরা ইহাকে $d\mathbf{r}_i$ না লিখিয়া $\delta\mathbf{r}_i$ লিখিয়াছি। এরূপ সরণকে 'কল্পিত সরণ' (Virtual displacement) বলে। মনে রাখা ভাল যে এরকম সব $\delta\mathbf{r}_i$-গুলি স্বতন্ত্র নয় ; উহাদের মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধ থাকিবে, কারণ উহাদের বাধাগুলি মানিয়া চলিতে হইবে।

কণাগোষ্ঠী সাম্যে থাকিতে হইলে উহার প্রত্যেক কণার উপর মোট বলের মান সর্বদাই শূন্য হইতে হইবে। i-তম কণার উপর মোট বল $\mathbf{f}_i$ হইলে, সাম্যাবস্থায়

$$\Sigma\ \mathbf{f}_i . \delta\mathbf{r}_i = 0 \qquad (4\text{-}9.1)$$

হইবে। বাধা থাকিলে $\mathbf{f}_i$ বলকে দুই অংশে ভাগ করা যায়। এক অংশ হইল প্রযুক্ত বল $(\mathbf{f}_i)_{app}$; ইহা কণার স্থানাংকের উপর নির্ভর করে। দ্বিতীয় অংশ হইল বাধাজনিত বল $(\mathbf{f}_i)_{con}$। স্পষ্টতঃ

$$\mathbf{f}_i = (\mathbf{f}_i)_{app} + (\mathbf{f}_i)_{con} \qquad (4\text{-}9.2)$$

কল্পিত সরণ কোন বাধা লঙ্ঘন করে নাই। অতএব ধরা যায় 'কল্পিত সরণে বাধাজনিত বল কোন কার্যও করে নাই।' এরূপ হইলে

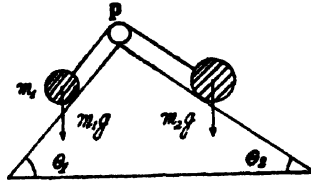
$$\Sigma\ (\mathbf{f}_i)_{con} . \delta\mathbf{r}_i = 0 \qquad (4\text{-}9.3)$$

হইবে। অতএব দেখা যায়, সবাধ কণাগোষ্ঠী সাম্যে থাকিলে, বাধা লঙ্ঘন না করিয়া উহাদের সামান্য একটু কল্পিত সরণ ঘটাইলে

$$\Sigma(\mathbf{f}_i)_{app} . \delta\mathbf{r}_i = 0 \qquad (4\text{-}9.4)$$

হইবে। ইহার অর্থ, 'কোন সবাধ কণাগোষ্ঠী সাম্যে থাকিলে কল্পিত সরণে প্রযুক্ত বলগুলি মোট যে (কল্পিত) কার্য করিবে তাহার মান হইবে শূন্য।' প্রত্যেকটি বলের মান শূন্য হওয়ার কোন প্রয়োজন নাই। কল্পিত কার্যের তত্ত্ব বলিতে উপরোক্ত অর্থ বুঝায়। কল্পিত কার্যের মান শূন্য হইলে বুঝিতে হইবে আলোচ্য কণাগোষ্ঠী বা বস্তুসংহতি সাম্যে আছে।

তত্ত্বের প্রয়োগ বুঝাইতে আমরা একটি সহজ উদাহরণ লইব। টানিলে বাড়ে না এমন একগাছা সুতার দুই মাথায় m_1, m_2 ভরের দুইটি কণা বাঁধিয়া θ_1, θ_2 কোণে আনত দুইটি মসৃণ তলের উপর উহাদের রাখা হইল (4.1 চিত্র)। সুতাগাছা দুই তলের মাথায় একটি মসৃণ পেরেকের উপর দিয়া ফেলা। কণা দুইটি কি অবস্থায় সাম্যে থাকিতে পারিবে?

সাম্যের শর্ত আলোচনা করিতে আমরা কল্পিত কার্যের তত্ত্ব প্রয়োগ করিব। এখানে প্রযুক্ত বল হইল কণা দুইটির ভার $m_1\mathbf{g}$ ও $m_2\mathbf{g}$। সুতায় টান (tension) বা তলের প্রতিক্রিয়া আলোচনায় আনিবার দরকার নাই, কারণ

4.1 চিত্র

উহারা প্রযুক্ত বল নহে। উহারা বাধাজনিত বল। কণা দুইটিকে তল বাহিয়া নিচের দিকে $\delta\mathbf{r}_1$ ও $\delta\mathbf{r}_2$ কল্পিত সরণ দেওয়া যাক। তাহা হইলে 4-9.4 সূত্র অনুসারে

$$m_1\mathbf{g}.\delta\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{g}.\delta\mathbf{r}_2 = 0$$

অর্থাৎ $m_1 g \sin\theta_1\ \delta r_1 + m_2 g \sin\theta_2\ \delta r_2 = 0$ হইবে।

সুতরাং দৈর্ঘ্য বদলান চলিবে না, এই বাধা মানিতে হইবে। অতএব $\delta r_1 = -\delta r_2$ হইবে। সুতরাং দেখা যায় সাম্যের শর্ত

$$m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2.$$

কোন ক্ষেত্রে কল্পিত কার্যের তত্ত্ব প্রয়োগ করিতে হইলে কোন্‌টি প্রযুক্ত বল এবং কোন্‌টি বাধাজনিত বল তাহা পরিষ্কার বুঝিতে হইবে।

4-10. সাম্যে স্থিতিশক্তি অবম অথবা চরম (At equilibrium, potential energy is a minimum or a maximum)। বল সংরক্ষী হইলে কল্পিত কার্যের সূত্র হইতে সুষ্ঠু একটি সিদ্ধান্তে আসা যায়। সংরক্ষী বলে লেখা যায়

$$(\mathbf{f}_i)_{app} = -\nabla_i V$$

$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots)$ কণাগোষ্ঠীর মোট স্থিতিশক্তি। কল্পিত কার্যের সূত্র অনুসারে $\Sigma\{(\mathbf{f}_i)_{app}.\ \delta\mathbf{r}_i\} = 0$ বলিয়া পাই

$$\Sigma(\nabla_i V.\delta\mathbf{r}_i) = 0$$

অর্থাৎ $$\delta V = 0. \qquad (4\text{-}10.1)$$

কল্পিত সরণে স্থিতিশক্তির পরিবর্তনই δV। $\delta V = 0$ হওয়ার বোঝা যায় সাম্যাবস্থায় V হয় অবম না হয় চরম। প্রথম ক্ষেত্রে সাম্য স্থায়ী (stable), দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অস্থায়ী (unstable)। V-র মান যদি $\mathbf{r}_i$-গুলির উপর নির্ভর না করে, তাহা হইলে সাম্যকে উদাসীন (neutral) বলে।

4-11. দাল'াবেরের* সূত্র (D'Alembert's principle)। এ পর্যন্ত গতি আলোচনা করিতে আমরা নিউটনের সূত্রগুলি প্রয়োগ করিয়াছি। অন্যভাবেও গতি সংক্রান্ত প্রশ্নের মীমাংসা করা যায়। দালাঁবেরের সূত্র ইহাদের অন্যতম। সবাধ গতিতে নিউটন সূত্রের প্রয়োগ অনেক ক্ষেত্রে জটিল হইতে পারে, কিন্তু দালাঁবেরের সূত্র এরূপ ক্ষেত্রে সুষ্ঠুভাবে প্রয়োগ করা যায়।

প্রযুক্ত বল ও বাধার বল লইয়া গতীয় সমীকরণ নিম্নোক্তভাবে লেখা যায়—

$$m_i \mathbf{a}_i = (\mathbf{f}_i)_{app} + (\mathbf{f}_i)_{con} \qquad (4\text{-}11.1)$$

এখানে $\mathbf{a}_i$ কণার ত্বরণ।

i-তম কণার উপর $-m_i \mathbf{a}_i$ বল প্রয়োগ করিলে উহা সাম্যে থাকিবে। 4-11.1 সমীকরণে এই বল যোগ করিলে উহা সাম্যের সমীকরণ হইয়া দাঁড়ায়, অর্থাৎ

$$(\mathbf{f}_i)_{app} - m_i \mathbf{a}_i + (\mathbf{f}_i)_{con} = 0 \qquad (4\text{-}11.2)$$

প্রত্যেক কণার জন্য অনুরূপ সমীকরণ পাওয়া যাইবে। এই অবস্থায় কল্পিত কার্যের তত্ত্ব প্রয়োগ করিলে পাই

$$\Sigma\{ (\mathbf{f}_i)_{app} - m_i \mathbf{a}_i \}.\ \delta\mathbf{r}_i = 0 \qquad (4\text{-}11.3)$$

কারণ ঐ তত্ত্ব অনুসারে $\Sigma(\mathbf{f}_i)_{con} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$। 4-11.3 সমীকরণই দালাঁবেরের সূত্রের গাণিতিক রূপ। $m_i \mathbf{a}_i$-কে i-তম কণার উপর 'কার্যকর' (effective) বল বলে। ইহা $(\mathbf{f}_i)_{eff}$ রূপেও লেখা যায়।

4-11.3 সমীকরণে প্রত্যেক $\delta\mathbf{r}_i$ রাশির গুণাংক=0 লেখা যায় না, কারণ বাধা থাকায় সব $\delta\mathbf{r}_i$ গুলি স্বতন্ত্র নয়। মনে করা যাক, কণাগোষ্ঠীর উপর m সংখ্যক বাধা আরোপিত আছে। বাধার m সমীকরণের সাহায্যে m চররাশি অপনীত করিয়া 4-11.3 সমীকরণ $3n-m$ চর রাশি দিয়া লিখিলে প্রত্যেকের গুণাংক=0 হইবে। এইগুলি ও বাধার m সমীকরণের সাহায্যে $3n$ চর রাশির সবগুলিই জানা যাইবে।

দালাঁবেরের সূত্রের মূল তথ্য এইভাবে বলা যায় :—

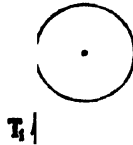
কণাগোষ্ঠীর i-তম কণার উপর 'প্রযুক্ত' বল $(\mathbf{f}_i)_{app}$ হইলে, গতিতে বাধা থাকার জন্য উহার ত্বরণ $(\mathbf{f}_i)_{app}/m_i = (\mathbf{a}_i)_{app}$ না হইয়া অন্য কিছু, ধরা

* বিদেশীয় নামের উচ্চারণ সাধারণতঃ বাংলায় সেই দেশীয় উচ্চারণের মত করিয়া লেখা যায় না। অনেকক্ষেত্রেই আমরা বিদেশীয় নামগুলির উচ্চারণ ইংরেজী বানান অনুযায়ী করিয়া থাকি। ফরাসী, জর্মন, ইতালীয় প্রভৃতি কোন কোন নাম সেই দেশীয় উচ্চারণ অনুযায়ী কখন কখন করা হয়। 'দাল'াবের' ফরাসী উচ্চারণের সহজ করা বাংলা নকল।

যাক, $(\mathbf{a}_i)_{eff}$ হইল। $m_i(\mathbf{a}_i)_{eff}=(\mathbf{f}_i)_{eff}$ উহার উপর 'কার্যকর' বল ধরিলে, দালাঁবেরের সূত্র বলে যে

$$\Sigma[\{(\mathbf{f}_i)_{app}-(\mathbf{f}_i)_{eff}\}\cdot\delta\mathbf{r}_i]=0,$$

অর্থাৎ 'বাহ্যবলের ক্রিয়াধীন কোন সবাধ কণাগোষ্ঠীর উপর কার্যকর বলের বিপরীত বল প্রয়োগ করিলে কণাগোষ্ঠী সাম্যে থাকিবে।' ইহার সাহায্যে গতিসংক্রান্ত প্রশ্নকে স্থিতিসংক্রান্ত প্রশ্নে পরিণত করা যায়।

একটি সহজ উদাহরণ দিয়া আমরা দালাঁবেরের সূত্রের প্রয়োগ দেখাইতে চেষ্টা করিব। 4.2 চিত্রে m_1 ও m_2 ভরের দুইটি কণা টানিলে-বাড়ে-না এমন একগাছা সুতা দিয়া বাঁধা। সুতাগাছা মসৃণ একটি পুলির (pulley) উপর দিয়া ঘোরান। অভিকর্ষের ক্রিয়ায় কণা দুইটির ত্বরণ কি হইবে ?

4.2 চিত্র

এখানে প্রযুক্ত বল $m_1\mathbf{g}$ ও $m_2\mathbf{g}$। তারে টান $\mathbf{T}_1$ ও $\mathbf{T}_2$ বাধাজনিত বল। দালাঁবেরের সূত্রের প্রয়োগে উহারা হিসাবে আসিবে না। কণা দুইটির ত্বরণ $\mathbf{a}_1$ ও $\mathbf{a}_2$ হইলে উহাদের উপর কার্যকর বল $m_1\mathbf{a}_1$ ও $m_2\mathbf{a}_2$। সূত্র অনুসারে

$$(m_1\mathbf{g}-m_1\ \mathbf{a}_1)\cdot\delta\mathbf{r}_1+(m_2\mathbf{g}-m_2\mathbf{a}_2)\cdot\delta\mathbf{r}_2=0.$$

এখানে কল্পিত সরণ $\delta\mathbf{r}_1$ ও $\delta\mathbf{r}_2$ উভয়কেই উপরের দিকে পজিটিভ ধরা হইয়াছে। সুতার দৈর্ঘ্য বদলাইবে না এই বাধা থাকায়

$$\delta\mathbf{r}_1=-\delta\mathbf{r}_2 \text{ এবং } \mathbf{a}_1=-\mathbf{a}_2$$

হইবে। উপরের সমীকরণে এই মানগুলি বসাইলে পাই

$$\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}$$

4-12. সমানীত ভর (Reduced mass)। এই অনুচ্ছেদে আমরা পারস্পরিক ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ায় অধীন দুইটি কণার গতি আলোচনা করিব। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া সমান ও বিপরীত ধরা হইবে এবং এই ক্রিয়াধীন গতিই আলোচনা করা হইবে। কণার উপরে বাহ্য বল ক্রিয়া করিলে ঐ বল যদি কণার ভরের সমানুপাতিক হয়, তাহা হইলেও আমাদের যুক্তির কোন পরিবর্তন দরকার হইবে না। সূর্যের আকর্ষণে গ্রহের গতি, যুগ্মতারার (binary stars) গতি, কেন্দ্রকের আকর্ষণে পরমাণুর ইলেকট্রনের গতি উভয়ের পারস্পরিক ক্রিয়ার অন্তর্গত। সূর্যের মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে পৃথিবীর টানে চাঁদের গতিতে পারস্পরিক ক্রিয়া ও ভরের আনুপাতিক বাহ্যবল উভয়ই আছে।

আলোচনায় দেখা যাইবে কণা দুইটির যে কোন একটির অন্যটি সাপেক্ষে গতি একই বলের ক্রিয়ায় স্থির মূলবিন্দু সাপেক্ষে উপযুক্ত ভরের একটি কণার গতির মত। 3-19 অনুচ্ছেদে বিষমবর্গীয় বলক্ষেত্রে গতির যে আলোচনা আমরা করিয়াছি উহাতে আকর্ষক কণা স্থির ধরা হইয়াছে। কিন্তু আকৃষ্ট কণার আকর্ষণে আকর্ষক কণার গতি উপেক্ষণীয় না হইতেও পারে (3-19.6 অনুচ্ছেদ দেখ)। বর্তমান আলোচনায় আকর্ষক কণার গতিও পাওয়া যাইবে।

কণা দুইটিকে আমরা 1 ও 2 সংখ্যা দিয়া চিহ্নিত করিব। উহাদের ভর m_1 ও m_2। দ্বিতীয় কণা প্রথমের উপর $\mathbf{f}_1'$ বল প্রয়োগ করে; প্রথম দ্বিতীয়ের উপর করে $\mathbf{f}_2'$। নিউটনের তৃতীয় সূত্র এখানে প্রযোজ্য হইলে

$$\mathbf{f}_1' = -\mathbf{f}_2'$$

হইবে। ইহা ছাড়া ধরা যাক কণা দুইটির উপর বাহ্যবল যথাক্রমে $\mathbf{f}_1$ ও $\mathbf{f}_2$। দুই কণার গতীয় সমীকরণ হইবে

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_1' \tag{4-12.1}$$

এবং $$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_2' = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1' \tag{4-12.2}$$

সমীকরণ দুটি যোগ করিয়া পাই

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$$

দুই কণার ভরকেন্দ্রের স্থান ভেক্টর

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{4-12.3}$$

$$\therefore \quad (m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$$

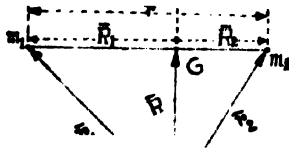
বা $$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} \tag{4-12.4}$$

এখানে M মোট ভর এবং $\mathbf{F}$ মোট বাহ্যবল $\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2$। এই সমীকরণ ভর-কেন্দ্রের গতির সুপরিচিত সমীকরণ (4-2.6 দেখ)। দুই কণা দিয়া গঠিত তন্ত্রের ভরকেন্দ্র বাহ্যবল F-এর ক্রিয়ায় M ভরের কণার মত চলিবে।

ইহার পর নূতন একটি ভেক্টর $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$-র অবতারণা করা যাক (4.3 চিত্র)। $\mathbf{r}$ ভেক্টরটি হইল m_2 সাপেক্ষে m_1-এর স্থান ভেক্টর। 4-12.1-কে m_1 দিয়া ও 4-12.2-কে m_2 দিয়া ভাগ করিয়া প্রথমটি হইতে দ্বিতীয়টি বিয়োগ করিলে পাই

$$\ddot{\mathbf{r}}_1-\ddot{\mathbf{r}}_2=\left(\frac{\mathbf{f}_1}{m_1}-\frac{\mathbf{f}_2}{m_2}\right)+\mathbf{f}_1'\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$$

বা $\ddot{\mathbf{r}}=(\mathbf{f}_1/m_1-\mathbf{f}_2/m_2)+\mathbf{f}_1'.\ \dfrac{m_1+m_2}{m_1m_2}$ (4-12.5)

প্রতি কণার উপর বাহ্যবল উহার ভরের সমানুপাতিক হইলে $\mathbf{f}_1/m_1-\mathbf{f}_2/m_2=0$ হইবে। বাহ্যবলের অবর্তমানে উপরের সমীকরণের ডানদিকের প্রথম পদ থাকিবে না।

4.3 চিত্র

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{4-12.6}$$

লিখিলে (4-12.5) সমীকরণ উপরোক্ত ক্ষেত্রে, বা বাহ্যবলের অবর্তমানে, হইয়া দাঁড়ায়

$$\mu\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{f}_1' \tag{4-12.7}$$

দ্বিতীয় কণা হইতে দেখিলে প্রথম কণার গতি এই সমীকরণ অনুসারে হইবে। মনে হইবে প্রথম কণার বদলে সেখানে μ ভরের একটি কণা আছে এবং উহা দ্বিতীয় কণা দ্বারা প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ায় চলিতেছে। যে কোন কণাকে প্রথম এবং অন্যটিকে দ্বিতীয় মনে করা যায়। এক কণা হইতে দেখিলে অন্য কণার গতি μ ভরের কণার গতির মত মনে হইবে। μ

ভরকে **সমানীত ভর** (Reduced mass) বলে। এক কণার ভর অন্যটির ভরের তুলনায় অনেক বেশী হইলেও সমানীত ভর হালকা কণার ভরের চেয়েও কিছু কম হইবে। উভয়ের ভর সমান হইলে $\mu=\frac{1}{2}m$ হইবে। 3.19 অনুচ্ছেদে আলোচিত বিষমবর্গীয় বলক্ষেত্রে আকর্ষক কণার গতি 4-12.7 সমীকরণ অনুসারে হইবে। বল মহাকর্ষীয় হইলে $f_1'=Gm_1m_2/r^2$ এবং

$$\mu\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{f}_1'=-G\frac{m_1m_2\mathbf{r}}{r^3}=-\frac{k\mathbf{r}}{r^3} \qquad (4\text{-}12.8)$$

বাহ্যবল দূরস্থ কোন ভরের মহাকর্ষীয় ক্রিয়ায় সৃষ্ট হইলে $f_1/m_1=f_2/m_2$ হয়। এ ক্ষেত্রে 4-12.4 ও 4-12.7 সমীকরণ প্রযুক্ত হইবে। উদাহরণ স্বরূপ সূর্যের মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে পৃথিবীর চারদিকে চাঁদের আবর্তনের কথা ধরা যায়। পৃথিবী ও চাঁদের যৌথ ভরকেন্দ্র উহাদের উপর সূর্যের আকর্ষণে 4-12.4 সমীকরণ অনুসারে চলিবে, এবং পৃথিবী হইতে চাঁদের গতি দেখাইবে 4-12.7 সমীকরণের গতির মত।

উপরের আলোচনায় m_1 ও m_2 ভরের পরস্পর ক্রিয়াশীল কণার গতিকে M ও μ ভরের কল্পিত দুইটি কণার পরস্পর নিরপেক্ষ গতিতে পরিণত করা হইয়াছে। দেখা যাইবে যুগ্মকণার যৌথ গতিশক্তি ও কৌণিক ভরবেগ কল্পিত কণা দুইটির গতিশক্তি ও কৌণিক ভরবেগের যোগফল সমান। কিন্তু মোট রৈখিক ভরবেগের ক্ষেত্রে ইহা প্রযোজ্য নয়।

গতিশক্তি। আসল দুই কণার মোট গতিশক্তি

$$T=\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2v_2^2$$

কল্পিত দুই কণার গতিশক্তির যোগফল $\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}\mu v^2$। ইহারা সমান তাহা সহজেই দেখান যায়, কারণ

$$\mathbf{V}=\dot{\mathbf{R}}=\frac{m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2}$$

এবং $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$.

এই দুই মান $\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}\mu v^2$-এ বসাইলে পাওয়া যায়

$$\tfrac{1}{2}MV^2+\tfrac{1}{2}\mu v^2=\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2v_2^2. \qquad (4\text{-}12.9)$$

কৌণিক ভরবেগ। কৌণিক ভরবেগ

$$\mathbf{L}=m_1(\mathbf{r}_1\times\mathbf{v}_1)+m_2(\mathbf{r}_2\times\mathbf{v}_2)$$

উপরে $\mathbf{V}$ ও $\mathbf{v}$-র মান হইতে $\mathbf{v}_1$ ও $\mathbf{v}_2$-কে $\mathbf{V}$ ও $\mathbf{v}$-র সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। ইহা করিলে দেখা যায়

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + (\mu/m_1)\,\mathbf{v},$$

এবং $\mathbf{v}_2 = \mathbf{V} - (\mu/m_2)\mathbf{v}$ ।

এই দুই মান L-এর সমীকরণে বসাইলে পাই

$$\mathbf{L} = m_1(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) + m_2\,(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2) = M\,(\mathbf{R} \times \mathbf{V}) + \mu\,(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \qquad (4\text{-}12.10)$$

রৈখিক ভরবেগ স্পষ্টতঃই

$$\mathbf{p} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = M\mathbf{V}. \qquad (4\text{-}12.11)$$

ইহাতে $\mu\mathbf{v}$ জাতীয় কোন পদ নাই ।

4-12.1. ভরকেন্দ্রীয় নির্দেশাংক (Centre-of-mass coordinates) । পরস্পর ক্রিয়াশীল দুই কণার গতি কখন কখন উহাদের ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে দেখিলে সুবিধা হয় । বৈদ্যুত আকর্ষণ বা বিকর্ষণে দুই আহিত কণার বিক্ষেপণে (scattering) ইহার প্রয়োগ আছে । 3.19 অনুচ্ছেদে আমরা একটি কণাকে (বলকেন্দ্র) স্থির ধরিয়া উহা সাপেক্ষে অন্যটির গতি দেখিয়াছি । কণা স্থির অর্থে উহার ভর $= \infty$ ধরা । একটু আগেই একটি সচল কণা হইতে অন্যটির গতি কেমন দেখায় তাহা আলোচনা করা হইয়াছে । যুগ্ম কণার ভরকেন্দ্রে বসিয়া উহাদের গতি কেমন দেখায় তাহাই এখানে আলোচ্য ।

ভরকেন্দ্র হইতে প্রথম কণার দূরত্ব $\mathbf{R}_1$ ও দ্বিতীয়ের $\mathbf{R}_2$ হইলে 4.3 চিত্র অনুসারে

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R},\ \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} \text{ এবং } \mathbf{r} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 \qquad (4\text{-}12.12)$$

$\mathbf{R}_1$ এবং $\mathbf{R}_2$ ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে দুই কণার স্থান ভেক্টর বলিয়া 4-1.4 সমীকরণ অনুসারে

$$m_1\,\mathbf{R}_1 + m_2\mathbf{R}_2 = 0 \qquad (4\text{-}12.13)$$

শেষ সমীকরণ দুটি হইতে পাই

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\mathbf{r} = \frac{\mu}{m_1}\,\mathbf{r} \\ \text{ও}\quad \mathbf{R}_2 &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\mathbf{r} = -\frac{\mu}{m_2}\,\mathbf{r} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}12.14)$$

4-12.8 সমীকরণে $\mathbf{R}_1$ ও $\mathbf{R}_2$-র এই মান বসাইলে যথাক্রমে পাই

$$\mu\ddot{\mathbf{R}}_1 = -\frac{m_2^{\,3}}{(m_1+m_2)^3}\cdot\frac{k\mathbf{R}_1}{R_1^{\,3}} \qquad (4\text{-}12.15a)$$

এবং $$\mu\ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{m_1^{\,3}}{(m_1+m_2)^3}\,\frac{k\mathbf{R}_2}{R_2^{\,3}} \qquad (4\text{-}12\text{-}15b)$$

4-12.8 সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করিলে দেখা যাইবে এ দুই ক্ষেত্রে বল স্থিরাংক (force constant) বিভিন্ন, কিন্তু অন্য সব এক রকম। অতএব ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে উভয় কণার গতি একই প্রকার এবং উহা এক কণা সাপেক্ষে অন্য কণার গতির মত। বাহিরের বল না থাকিলে ভরকেন্দ্র স্থির থাকে বা সুষম বেগে চলে। বল থাকিলে উহার গতি 4-12.4 সমীকরণ অনুসারে হয়।

দুই কণার একটি অন্যটির তুলনায় খুব ভারী হইলে ভরকেন্দ্র ভারী কণার খুব কাছে থাকে। তখন উহাকে প্রায় স্থির ধরা যায়। সূর্য ও পৃথিবী উহাদের যৌথ ভরকেন্দ্রের চারদিকে উপবৃত্ত পথে ঘোরে। কিন্তু ভরকেন্দ্র সূর্যের দেহের ভিতরেই পড়ে বলিয়া উহাকে স্থির ধরা যায়। হাইড্রোজেন পরমাণুতে ইলেকট্রন ও প্রোটন উহাদের যৌথ ভরকেন্দ্রের চারদিকে একই প্রকার কক্ষে ঘোরে। কিন্তু প্রোটন অনেক ভারী বলিয়া উহার কক্ষ ইলেকট্রন কক্ষের তুলনায় অনেক ছোট হয়।

4-13. স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা ও ব্যাপক নির্দেশাংক (Degrees of freedom and Generalized coordinates)। নিউটনের গতীয় সূত্র প্রয়োগে আমরা সাধারণতঃ কার্টেজীয় নির্দেশ তন্ত্র ব্যবহার করি। নিউটনের সূত্রের প্রয়োগ দুইভাবে হয়। হয় আমরা নিউটনের গতীয় সমীকরণ প্রয়োগ করি, নয়ত সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে নিউটনীয় গতিতত্ত্ব হইতে লব্ধ শক্তি সংরক্ষণের সাহায্য লই। প্রথমটিতে ভেক্টর রাশি ব্যবহার করিতে হয়, দ্বিতীয়টিতে স্কেলার। আলোচ্য গতির জটিলতা বেশী হইলে নিউটনের সমীকরণ প্রয়োগ করা দুষ্কর হইতে পারে, এবং গতিতে বাধা থাকিলে বাধাজনিত অজানা ও অবাঞ্ছিত বলের আগম হয়। তাছাড়া কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করা সকল ক্ষেত্রে সুবিধার হয় না।

গতীয় সূত্রের অন্যবিধ রূপও আছে এবং অনেক জটিল ক্ষেত্রে ইহাদের প্রয়োগ নিউটনের সূত্রের চেয়ে সহজ। পরবর্তী দুইটি অনুচ্ছেদে আমরা এইরূপ দুইটি সূত্রের কথা বলিব। ইহা বুঝিতে গতীয়তন্ত্রের (dynamical system) 'স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা' ও 'ব্যাপক নির্দেশাংক' (generalized coordinates) সম্বন্ধে ধারণা থাকা দরকার। স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার কথা আগে স্থানে স্থানে বলা হইয়া থাকিলেও আমরা উহার মূল কথাগুলি এখানে আর একবার বলিয়া লইব।

4-13.1 স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা (Degrees of freedom)। গতীয়তন্ত্রের উপাদান কণা ; দৃঢ়বস্তুও ইহার অন্তর্গত। পরস্পর নিরপেক্ষ যে অবম সংখ্যক চর রাশির (variables) সাহায্যে আলোচ্য গতীয়তন্ত্রের বিন্যাস

(configuration) সম্পূর্ণরূপে বর্ণনা করা যায় সেই সংখ্যাকে উহার স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা বলে। ত্রিমাত্রিক দেশে মুক্ত কণার স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা তিন। তিন-অক্ষীয় নির্দেশতন্ত্রে উহার তিনটি নির্দেশাংক x, y, z-এর সাহায্যে উহার অবস্থান সম্পূর্ণরূপে বর্ণনা করা যায়। বিকল্পে, গোলীয় (spherical) নির্দেশ-তন্ত্রের তিনটি নির্দেশাংক r, θ, ϕ নেওয়া যাইতে পারে। কণার গতি কোন সমতলে সীমাবদ্ধ থাকিলে x, y বা r, θ-র সাহায্যে উহার অবস্থান বর্ণনা সম্পূর্ণ হয়। এক্ষেত্রে কণার স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা দুই। গতি এক রেখায় আবদ্ধ থাকিলে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা এক। দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ দুইটি কণার স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা পাঁচ। কণা দুইটি মুক্ত থাকিলে x_1, y_1, z_1 এবং x_2, y_2, z_2 এই ছয়টি নির্দেশাংকের সাহায্যে উহাদের অবস্থান বর্ণনা হইতে পারিত। কিন্তু এই ছয়টি রাশিই স্বতন্ত্র নহে, কারণ দূরত্ব স্থির থাকিবে বলিয়া উহাদের মধ্যে

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=d^2=\text{স্থির রাশি},$$

এই সম্পর্কটি সকল সময়ই থাকিবে। ইহার সাহায্যে ছয়টি চর রাশির একটিকে অপনীত করা যায় এবং পাঁচটি স্বতন্ত্র নির্দেশাংকের সাহায্যে যুগ্মকণার অবস্থান সম্পূর্ণরূপে বর্ণনা করা যায়। d-এর সমীকরণটি আলোচ্য তন্ত্রে বাধার শর্ত।

সাধারণভাবে বলা যায় গতীয়তন্ত্রে N সংখ্যক কণা এবং m সংখ্যক বাধা থাকিলে, তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হইবে

$$n=3N-m \tag{4-13.1}$$

প্রত্যেকটি বাধায় কণাগুলির নির্দেশাংক কোনভাবে সম্পর্কিত হয়। সম্পর্ক জানা থাকিলে এই রকম প্রত্যেকটি সম্পর্কের সাহায্যে একটি করিয়া নির্দেশাংক অপনীত করা যায়। সকল সময় এই সম্পর্কগুলিকে রূপ দেওয়া যায় না; কিন্তু তাহাতে তত্ত্বগতভাবে কোন ক্ষতি নাই।

সকল ক্ষেত্রেই তিন অক্ষীয় নির্দেশতন্ত্র লইতে হইবে এরূপ কোন কথা নাই। উপরোক্ত যুগ্মকণার অবস্থান বুঝাইতে উহাদের ভরকেন্দ্রের নির্দেশাংকে x, y, z এবং উহাদের অক্ষের দিক্‌বিন্যাস বুঝাইবার জন্য θ, ϕ কোণ নেওয়া চলে। এই পাঁচটি স্বতন্ত্র নির্দেশাংকের সাহায্যেও অবস্থানের সম্যক বর্ণনা হয়। মুক্ত দৃঢ়বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা ছয়, কারণ উহার ভরকেন্দ্রের অবস্থান, বস্তুতে আবদ্ধ কোন অক্ষের দিক্‌বিন্যাস, ও অক্ষ সাপেক্ষে বস্তুটির নির্দিষ্ট কোন রেখা বা কণার অবস্থান বলিলেই উহার অবস্থান সম্পূর্ণ বর্ণনা করা হয়। এখানে ভরকেন্দ্রের জন্য x, y, z এবং দিক্‌বিন্যাস ও নির্দিষ্ট কণার

অবস্থানের জন্য স্বতন্ত্র তিনটি কোণ, এই ছয়টি চর রাশির দরকার হয়। দৃঢ়বস্তু কোন স্থিরবিন্দু সাপেক্ষে ঘুরিতে থাকিলে উহার স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা তিন, কারণ বস্তুতে আবদ্ধ স্থিরবিন্দুগামী ঘূর্ণন অক্ষের দিক্‌নির্দেশের জন্য দুইটি কোণ এবং এই অক্ষ সাপেক্ষে ঘূর্ণন কতটা তাহার জন্য আর একটি কোণ বলিলেই অবস্থান বর্ণিত হয়। ইহার জন্য অয়লারীয় কোণের (6-14 অনুচ্ছেদ দেখ) মত তিনটি কোণ স্থির করিলেই হইল। স্থির অক্ষে ঘুরিলে দৃঢ়বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা এক, কারণ বস্তুতে আবদ্ধ কোন রেখার কৌণিক সরণ জানিলেই বস্তুর অবস্থান জানা হয়।

4-13.2. ব্যাপক নির্দেশাংক (Generalized coordinates)। গতীয়তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা n হইলে সুবিধামত লওয়া n সংখ্যক পরস্পর নিরপেক্ষ চর রাশি q_i-র ($i=1, 2, 3, \ldots\ldots n$) সাহায্যে তন্ত্রের বিন্যাস সম্পূর্ণরূপে বর্ণনা করা সম্ভব। এই চর রাশিগুলিকে ঐ তন্ত্রের 'ব্যাপক নির্দেশাংক' বলে। ইহারা স্থানিক নির্দেশাংক, কৌণিক নির্দেশাংক বা অন্য প্রকার চর-রাশি, এমন কি কোন চররাশির ফলন (function)-ও হইতে পারে। ব্যাপক নির্দেশাংক বাছাই করার কোন নির্দিষ্ট নিয়ম নাই। তন্ত্র বুঝিয়া সুবিধামত উহাদের লইতে হয়। মনে রাখা ভাল যে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা চরম সংখ্যক না রাখিয়া অবম সংখ্যক করিয়া লওয়ায় গৌণভাবে গতির বাধা-গুলি স্বতঃই মানা হইয়াছে। কাজেই পরবর্তী বিশ্লেষণে বাধাজনিত বলের অবতারণার কোন দরকার হয় না।

4-13.3. ব্যাপক বেগ, বল ও ভরবেগ (Generalized velocities, forces and momenta)।

ব্যাপক নির্দেশাংক অধিকাংশ ক্ষেত্রে স্থানিক নির্দেশাংক না হইলেও বেগ, বল, ভরবেগ প্রভৃতি কল্পন বা মননের (concepts) অবতারণা এখানেও করা যায়। q_i ($i=1, 2, 3, \ldots\ldots n$) রাশিগুলি ব্যাপক নির্দেশাংক হইলে

$$\frac{dq_i}{dt}=\dot{q}_i \tag{4-13.2}$$

রাশিগুলিকে আলোচ্য তন্ত্রের 'ব্যাপক বেগ' (Generalized velocities) বলে।

মনে রাখিতে হইবে যে প্রত্যেকটি ব্যাপক নির্দেশাংক q_i, তন্ত্রের সমস্ত কণার কার্টেজীয় নির্দেশাংকের ফলন, অর্থাৎ

$$q_i=q_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots)$$

এই সমীকরণের সাহায্যে আমরা ব্যাপক বেগের সহিত সাধারণ বেগ $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ ইত্যাদির সম্পর্ক বাহির করিতে পারি। বিপরীতভাবে, আমরা প্রত্যেকটি

কার্টেজীয় নির্দেশাংক ব্যাপক নির্দেশাংকের ফলন হিসাবে লিখিতে পারি, অর্থাৎ

$$x_i = x_i(q_1, q_2 \cdots q_n)$$

এই সমীকরণের সাহায্যে কার্টেজীয় নির্দেশাংকে লিখিত যে কোন রাশিকে ব্যাপক নির্দেশাংকে লেখা যাইতে পারে। লক্ষ্য করা যাইতে পারে যে কার্টেজীয় বেগ $\dot{x}_i$ ব্যাপক বেগগুলির রৈখিক ফলন (linear function)।

কল্পিত সরণের (4-9 অনুচ্ছেদ) সাহায্যে 'ব্যাপক বলের' (Generalized forces) অবতারণা করা হয়: নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের সাহায্যে নয়। আলোচ্য তন্ত্রের k-তম কণার উপর বাহ্যবল $\mathbf{F}_k$ হইলে এবং কণাকে কল্পিত সরণ $\delta\mathbf{r}_k$ দিলে কণার উপরে কল্পিত কার্য হইবে $\mathbf{F}_k\delta\mathbf{r}_k$। তন্ত্রের সকল কণাগুলির এই রকম কল্পিত সরণ ঘটিলে মোট কল্পিত কার্য হইবে

$$\delta W = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k = \sum_k (X_k\,\delta x_k + Y_k\,\delta y_k + Z_k\,\delta z_k) \qquad (4\text{-}13.3)$$

যোগে সমস্ত কণাগুলি ধরিতে হইবে। X, Y, Z রাশিগুলি $\mathbf{F}$-এর উপাংশ।

আলোচ্য তন্ত্র q_i ($i = 1, 2, 3, \cdots, n$) ব্যাপক নির্দেশাংকে বর্ণিত হইয়া থাকিলে উপরোক্ত কল্পিত সরণে q_i গুলির δq_i পরিবর্তন হইবে এবং মোট কল্পিত কার্য ব্যাপক নির্দেশাংকে নিচের মত লেখা যাইবে :

$$\delta W = \sum_{i=1}^{i=n} Q_i\,\delta q_i \qquad (4\text{-}13.4)$$

যোগে সমস্ত ব্যাপক নির্দেশাংকগুলি ধরিতে হইবে।

4-13.3 সমীকরণের $X_k\delta x_k$ রাশিগুলির X_k রাশিটি x_k নির্দেশাংকের সহগামী বলের উপাংশ। এই সাদৃশ্য হইতে 4-13.4 সমীকরণের δq_i-এর গুণক Q_i রাশিটিকে q_i নির্দেশাংকের সহগামী 'ব্যাপক বল' (Generalized force) বলা হয়।

আলোচ্য তন্ত্রের গতিশক্তি T ব্যাপক বেগসমূহের বর্গীয় ফলন এবং ইহার $\dot{q}_i\dot{q}_j$ রাশিগুলির গুণক সাধারণতঃ q_i রাশিগুলির ফলন।

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \qquad (4\text{-}13.5)$$

রাশিগুলিকে 'ব্যাপক ভরবেগ' (Generalized momenta) বলে। q_i রাশিটি দৈর্ঘ্য হইলে p_i হয় রৈখিক ভরবেগ; q_i কোণ হইলে p_i হয় কৌণিক ভরবেগ। q_i দৈর্ঘ্য না হইলে ব্যাপক বেগ, ব্যাপক বল বা ব্যাপক ভরবেগের মাত্রা (dimensions) আমাদের পূর্ব পরিচিত রাশিগুলির মাত্রার সমান হয় না।

4-14. লাগ্রাঁজের গতীয় সমীকরণ (Lagrange's equations of motion)। 1788 খৃষ্টাব্দে লাগ্রাঁজ গতীয় প্রশ্নের সমাধানের একটি নূতন উপায় বাহির করেন। ইহাতে গতীয়তন্ত্রের নির্দেশাংক, উহার উপর ক্রিয়াশীল বল ও দ্বন্দ্ব এবং উহার গতিশক্তি জানা থাকার দরকার হয়। বাধার বল সংক্রান্ত অসুবিধাগুলি এখানে আসে না। ইঞ্জিনীয়ারিং-এর প্রযুক্ত গতিবিজ্ঞান, কোয়াণ্টাম গতিবিজ্ঞান ও গাণিতিক পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন ক্ষেত্রে ইহার বহুল ও সার্থক প্রয়োগ হইয়াছে। নির্দেশতন্ত্র সুবিধা বুঝিয়া যে কোন রকম নেওয়া যায়।

আলোচ্য গতীয়তন্ত্রের যে কোন মুহূর্তের গতিশক্তি T ব্যাপক নির্দেশাংক ও ব্যাপক বেগে প্রকাশিত হইয়া থাকিলে লাগ্রাঁজের গতীয় সমীকরণের রূপ হয়

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \ (i=1, 2, 3, \cdots, n) \qquad (4\text{-}14.1)$$

প্রত্যেক ব্যাপক নির্দেশাংকের জন্য একটি করিয়া সমীকরণ হওয়ায় সমীকরণের মোট সংখ্যা n তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার সমান।

তন্ত্র সংরক্ষী হইলে উহার স্থিতিশক্তি $V = V(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ সকল নির্দেশাংকের ফলন, এবং $\delta W = -\delta V$ হইবে। এ ক্ষেত্রে

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (4\text{-}14.2)$$

লেখা যায়। V রাশিটিতে কোন $\dot{q}_i$ থাকে না। অতএব $\partial V/\partial \dot{q}_i = 0$ হয়। সংরক্ষী বলক্ষেত্রে এই কারণে 4-14.1 সমীকরণের রূপ হয়

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

বা $$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T-V) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T-V) = 0$$

বা $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (4\text{-}14.3)$$

$L = T - V$ রাশিটিকে 'লাগ্রাঁজিয়ান' (Lagrangian) বা গতীয় বিভব (Kinetic potential) বলে। ইহা তন্ত্রের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির প্রভেদ এবং ব্যাপক নির্দেশাংকে প্রকাশিত।

কার্টেজীয় নির্দেশাংককে ব্যাপক নির্দেশাংক ধরিলে দেখা যায় লাগ্রাঁজের সমীকরণ নিউটনের সমীকরণে পরিণত হইয়াছে। নিউটনের সমীকরণ

হইতেও লাগ্রাঞ্জের সমীকরণে আসা যায়। কাজেই নিউটন সূত্রের অতিরিক্ত কিছু লাগ্রাঞ্জের সূত্রে নাই। কিন্তু লাগ্রাঞ্জের সূত্র ব্যাপকতর ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়, এবং জটিল ক্ষেত্রে উহার প্রয়োগে সুবিধা বেশী। সহজ ক্ষেত্রে নিউটন সূত্রই সুবিধার।

লাগ্রাঁজ সমীকরণের প্রয়োগবিধি। (1) গতীয়তন্ত্র সংরক্ষী হইলে q_i ও $\dot{q}_i$ রাশিগুলির সাহায্যে উহার গতিশক্তি T এবং q_i রাশিগুলির সাহায্যে উহার স্থিতিশক্তি V নির্ণয় করিয়া $L=T-V$ রাশিটি বাহির করিতে হইবে। ইহার পর 4-14.3 গতীয় সমীকরণগুলি লিখিতে কোন অসুবিধা হয় না।

উদাহরণস্বরূপ গ্রহের গতির ক্ষেত্রে আমরা লাগ্রাঞ্জের সূত্র প্রয়োগ করিব। সূর্যকে স্থির কণা ও গ্রহকে চলন্ত কণা ধরা হইবে। ধ্রুবীয় নির্দেশাংক r, θ-কে ব্যাপক নির্দেশাংক ধরা যায়। কণার স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা দুই, কারণ গ্রহের গতি সমতলীয় ধরা হইতেছে।

তন্ত্রের গতিশক্তি $T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$। তন্ত্র সংরক্ষী এবং উহার স্থিতিশক্তি $V=-GMm/r=-km/r$। অতএব

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+km/r.$$

দেখা যায় $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$ এবং $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$

ও $\dfrac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2-\dfrac{km}{r^2}$ এবং $\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0.$

অতএব এ ক্ষেত্রে গতীয় সমীকরণ দুটি হইবে

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right)-\left(mr\dot{\theta}^2-\frac{km}{r^2}\right)=0$$

এবং $\dfrac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0$

ইহারা কেন্দ্রীয় বলক্ষেত্রের 3-18.2 ও 3-18.3 সমীকরণ। 3-18.2 সমীকরণের F এ ক্ষেত্রে $-km/r^2$।

(2) সকল ক্ষেত্রেই 4-14.1 সমীকরণ ব্যবহার করা চলে। Q_i রাশিগুলি পাইতে কল্পিত কার্য δW হিসাব করিয়া $Q_i=\partial W/\partial q_i$ সূত্র প্রয়োগ করিতে হয়। উপরে আলোচিত ক্ষেত্রে δr ও $\delta\theta$ কল্পিত সরণ হইলে

$$\delta W=(-km/r^2)\delta r+0.\delta\theta=-(km/r^2)\delta r.$$

9

$$\therefore \quad Q_r = \frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{km}{r^2} \text{ এবং } Q_\theta = 0.$$

এভাবেও আগের সমীকরণ দুটি পাওয়া যায়।

6-17 অনুচ্ছেদে প্রতিসম লাটিমের (symmetrical top) গতিতে লাগ্রাঁজ সমীকরণের প্রয়োগ দেখান হইয়াছে।

লাগ্রাঁজিয়ানে V আসিবার কারণ $Q_i = -\partial V/\partial q_i$ সম্পর্ক। সংরক্ষী তন্ত্রে V স্থিতিশক্তি। কিন্তু তন্ত্র সংরক্ষী না হইলেও সেখানে যদি এমন কোন ফলন U থাকে যাহাতে $Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$ হয় তাহা হইলে $L = T - U$ লইয়া 4-14.3 সমীকরণ প্রয়োগ করা চলে। U রাশিটি $\dot{q}_i$ বা t-র অপেক্ষকও হইতে পারে। বিদ্যুচ্চুম্বকীয় ক্ষেত্রে আহিত কণার গতি ইহার একটি উদাহরণ। এখানে U রাশিটি $\dot{q}_i$-এর উপর নির্ভর করে। লাগ্রাঁজিয়ান L-কে এই বিস্তৃত অর্থে ধরিতে হইবে।

4-15. হ্যামিল্টনের সূত্র (Hamilton's principle)। নিউটন সূত্রের চেয়ে ব্যাপকতর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য একটি গতীয় সূত্র হ্যামিল্টন উদ্ভাবন করেন। যে সকল ক্ষেত্রে স্থিতিশক্তি কেবল স্থানাংক ছাড়া সময়ের উপরেও নির্ভর করে, বা যেখানে স্থিতিশক্তি-জাতীয় স্থানাংকের কোন অপেক্ষক (potential function) গঠন করা সম্ভব নয়, সে রকম অনেক ক্ষেত্রেও হ্যামিল্টনের সূত্র প্রয়োগ করা যায়। সূত্রটি নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়ঃ মনে করা যাক $t=0$ মুহূর্তে তন্ত্রের কণাগুলির ব্যাপক নির্দেশাংক $q_0 = (q_{01}, q_{02}, \ldots)$ ও ব্যাপক বেগ $\dot{q}_0 = (\dot{q}_{01}, \dot{q}_{02}, \ldots)$ জানা আছে। আবার $t=\tau$ মুহূর্তে q_τ ও $\dot{q}_\tau$ গুলিও যেন জানা আছে। q, $\dot{q}$-গুলি সময়ের অপেক্ষক। সময়ের সহিত উহারা কিভাবে বদলায় তাহা গতীয় সমীকরণ সমাধান করিলে পাওয়া যায়। ধরা যাক এই সঠিক পরিবর্তনের ধরন আমাদের জানা নাই। কল্পনায় আমরা q-গুলি আমাদের ইচ্ছামত এমনভাবে বদলাইলাম যাহাতে $t=0$ মুহূর্তে q_0, $\dot{q}_0$ মান হইতে উহারা $t=\tau$ মুহূর্তে q_τ, $\dot{q}_\tau$ মানে পৌঁছায়, কিন্তু মাঝখানে আসল ও কল্পিত পথে সামান্য প্রভেদ থাকে। L আলোচ্য তন্ত্রের লাগ্রাঁজিয়ান। যেহেতু L, q ও $\dot{q}$-এর অপেক্ষক, এবং q ও $\dot{q}$-কে আমরা সময়ের ফলনরূপে প্রকাশ করিয়াছি অতএব আমাদের কল্পিত পথে আমরা

$$\int_0^\tau L\,dt$$

এই সমাকলটির মান বাহির করিতে পারি। বিভিন্ন কল্পিত পথে এই

সমাকলের মান বিভিন্ন হইবে। হ্যামিল্টনের সূত্রে বলা হয় যে সঠিক পথে এই সমাকলের মান অবম বা চরম হইবে। অর্থাৎ সঠিক পথ হইতে কাল্পনিক পথের প্রভেদ δ দ্বারা নির্দেশ করিলে,

$$\delta \int_0^\tau L\, dt = 0. \tag{4-15.1}$$

এই সূত্র হইতে লাগ্রাঞ্জের গতীর সমীকরণ (4-14.1) পাওয়া যায়। তন্ত্র সংরক্ষী হইলে $\int_0^\tau L dt$ রাশিটি অবম হয়। তখন উহার মান হয় $\int_0^\tau 2T\, dt$; এই রাশিটিকে 'কর্ম' (Action) বলে। সংরক্ষী তন্ত্রে লেখা যায়

$$\delta \int_0 L\, dt = \delta \int_0^T 2T\, dt = \delta A = 0 \tag{4-15.2}$$

ইহাকে 'অবম কর্মের সূত্র' (Principle of least action) বলে।

হ্যামিল্টনীয় ফলন (Hamiltonian function)। $\dot{q}_i$ রাশিগুলি দ্বারা কোন তন্ত্রের ব্যাপক বেগ, p_i দ্বারা ব্যাপক ভরবেগ ও L দ্বারা q_i ও $\dot{q}_i$ লইয়া গঠিত লাগ্রাঞ্জিয়ান বুঝাইলে

$$H = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \dot{q}_i - L \tag{4-15.3}$$

রাশিটিকে 'হ্যামিল্টনীয় ফলন' বা সংক্ষেপে ঐ তন্ত্রের 'হ্যামিল্টনীয়ান' (Hamiltonian) বলা হয়। তন্ত্র সংরক্ষী হইলে H ঐ তন্ত্রের মোট শক্তি অর্থাৎ গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফলের সমান হয়।

$$H = T + V = E \tag{4-15.4}$$

হ্যামিল্টনীয় ফলন হইতে তন্ত্রের নিম্নোক্ত গতীয় সমীকরণ দুটি পাওয়া যায় :

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \text{ ও } \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \tag{4-15.5}$$

এই দুটিকে গতিসংক্রান্ত 'বিহিত' বা 'ক্যানানিক্যাল' (canonical) সমীকরণ বলে। n স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার গতীয় তন্ত্রের ক্ষেত্রে লাগ্রাঁজের উপায়ে n সংখ্যক দ্বিতীয় ক্রমের (second order) অবকল সমীকরণ পাওয়া যায়। হ্যামিল্টনের উপায়ে উহার বদলে $2n$ সংখ্যক প্রথম ক্রমের সমীকরণ পাওয়া যায়। শেষোক্ত ক্ষেত্রে দেখা যায় যে কোন স্বাতন্ত্র্যের q_i ও p_i রাশি দুটি পরস্পর নিরপেক্ষ রাশির ন্যায় আচরণ করে।

কোন তন্ত্রে হ্যামিল্টনের সমীকরণ প্রয়োগে প্রথমে তন্ত্রের হ্যামিল্টনীয়ান বাহির করিতে হইবে। ইহা ব্যাপক নির্দেশাংক ও ব্যাপক ভরবেগের সাহায্যে প্রকাশিত থাকিবে। তন্ত্র সংরক্ষী হইলে $H = T + V = E =$ তন্ত্রের মোট শক্তির সমান হয়; কিন্তু এখানেও H এইভাবে প্রকাশিত থাকিবে। খুব সহজ একটি উদাহরণ হিসাবে আমরা সরল দোলকের কথা ধরিতে পারি। ইহার স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা এক এবং নির্দেশাংক x ও ভরবেগ $p = m\dot{x}$। এ ক্ষেত্রে হ্যামিল্টনীয়ান

$$H = T + V = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2}kx^2$$

4-15.5 সমীকরণ দুটি এক্ষেত্রে হইয়া দাঁড়ায়

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \text{এবং} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

ইহাদের প্রথমটি ভরবেগের সংজ্ঞা ($p = m\dot{x}$) ও দ্বিতীয়টি দোলকে প্রযোজ্য নিউটনের গতীয় সমীকরণ।

তন্ত্রের গতীয় সমীকরণ পাইবার উদ্দেশ্যে হ্যামিল্টনের বিহিত সমীকরণ দুটি বড় একটা প্রয়োগ করা হয় না। কিন্তু ইহা বহুপ্রকারের নির্দেশতন্ত্রে ব্যবহার করা যায়, এমন কি নির্দেশাংক মূল নির্দেশাংকের কোন অপেক্ষকও (function) হইতে পারে। কোয়াণ্টাম ও সাংখ্যিক বলবিজ্ঞান (Quantum mechanics and Statistical mechanics) হ্যামিল্টনীয় তত্ত্বের ভিত্তিতে গঠিত।

প্রশ্ন

1. ভরকেন্দ্র কাহাকে বলে? কোন কণাগোষ্ঠীর একটি মাত্র ভরকেন্দ্র থাকিবে প্রমাণ কর।

2. রৈখিক গতিতে কণাগোষ্ঠীর ভর উহার ভরকেন্দ্রে সংহত ধরা যায় প্রমাণ কর। (ত্বরণ ও ভরবেগ উভয়ই বিচার কর)

3. কোন স্থির বিন্দু সাপেক্ষে কোন কণাগোষ্ঠীর কৌণিক ভরবেগ ভরকেন্দ্রে অবস্থিত সমভর কণার ঐ বিন্দুসাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ, ও ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে সকল কণাগুলির কৌণিক ভরবেগের যোগফল, ইহা প্রমাণ কর।

4. কণাগোষ্ঠীর ক্ষেত্রে প্রযুক্ত টর্কের সহিত কৌণিক ভরবেগ পরিবর্তনের হারের সম্পর্ক বাহির কর। এই সম্পর্কে আসিতে অভ্যন্তরীণ বল সম্বন্ধে কি কল্পনা করা হইয়াছে পরিষ্কার করিয়া বল।

রৈখিক ও কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ আলোচনা কর।

5. কৌণিক ভরবেগের মত কণাগোষ্ঠীর গতিশক্তিও দুইটি গতিশক্তির যোগফল, ইহা দেখাও।

6. কল্পিত কার্য কাহাকে বলে? একটি উদাহরণের সাহায্যে কল্পিত কার্যের তত্ত্বটি বুঝাইয়া বল।

7. দাল'ম্বেরের সূত্রটি কি? উহার একটি প্রয়োগ দেখাও।

8. সমানীত ভর কাহাকে বলে? দুইটি কণা একে অন্যের উপর সমান ও বিপরীত বল প্রয়োগ করে। উহাদের গতীয় সমীকরণ এক কণার গতীয় সমীকরণে পরিণত কর ও ফল ব্যাখ্যা কর।

যুগ্মকণার উপর বাহ্যবল কি প্রকারের হইলে ফলের কোন পরিবর্তন হইবে না? ইহার একটি উদাহরণ দাও।

9. দুইটি কণা একে অন্যের উপর দূরত্বের বিষমবর্গীয় সমান ও বিপরীত বল প্রয়োগ করে। উহাদের ভরকেন্দ্র হইতে কণা দুইটির গতি কি প্রকার দেখাইবে আলোচনা কর।

10. গতীয়তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা ও ব্যাপক নির্দেশাংক বলিতে কি বুঝায় উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা কর।

ব্যাপক বল ও ব্যাপক ভরবেগ কাহাদের বলে?

11. লাগ্রাঞ্জের গতীয় সমীকরণ লেখ ও উহাতে ব্যবহৃত সংকেতগুলির অর্থ বুঝাইয়া বল। যে কোন একটি ক্ষেত্রে ইহার প্রয়োগ দেখাও।

12. হ্যামিল্টনের অবম কর্মের সূত্রটি কি? হ্যামিল্টনীয় ফলন কাহাকে বলে? যে কোন একটি ক্ষেত্রে এই ফলন গঠন করিয়া উহার সাহায্যে হ্যামিল্টনের বিহিত সমীকরণগুলি লেখ। সাধারণ ক্ষেত্রে এইরূপ সমীকরণের সংখ্যা কত হইবে?

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

ত্বরিত নির্দেশতন্ত্র

(Accelerated frames of reference)

5-1. জড়ত্বীয় ও অজড়ত্বীয় নির্দেশ ফ্রেম (Inertial and non-inertial frames)। কোন কণা, কণাগোষ্ঠী বা বস্তুসংহতির (system of bodies) গতি বর্ণনা করিতে হইলে সময়ের সহিত উহার অবস্থান কিভাবে বদলায় তাহা বলিতে হইবে। যে সকল রেখা বা তলের সাহায্যে এক বা একাধিক রাশি দিয়া উহার অবস্থান প্রভৃতি নির্দেশ করা যায় তাহাদের যৌথ-ভাবে আমরা 'নির্দেশ ফ্রেম' (Frame of reference) বা 'নির্দেশী কাঠামো' বলিয়া থাকি ; নির্দেশ ফ্রেম নানাভাবে নেওয়া যায়। উহার যে কোন একটিকে আমরা 'নির্দেশ তন্ত্র' (Coordinate system) বলিতে পারি।

ত্রিমাত্রিক দেশে (**Three dimensional space**) কোন কণার অবস্থান নির্দেশ করিতে তিনটি তলের দরকার হয়। তলগুলি পরস্পরের অভিলম্ব হইলে নির্দেশতন্ত্র 'সমকোণী' (**orthogonal**) বা 'বক্ররেখী' (**curvilinear**)। তলগুলি সমতল হইলে তন্ত্র আয়তাকার (**rectangular**)। সমতলগুলি পরস্পরকে সমকোণে ছেদ না করিলে সে তন্ত্র অসমকোণী (**non-orthogonal**)।

নির্দেশতন্ত্র সাপেক্ষে কণার অবস্থান বর্ণনা করিতে যে রাশিগুলির দরকার হয় তাহারা কণার নির্দেশাংক (**coordinates**)। যে দিকে সরিলে কণার নির্দেশাংকের (**coordinates**-এর) একটির মাত্র পরিবর্তন হয় তাহা নির্দেশতন্ত্রের অক্ষ (**co-ordinate axis**)। ত্রিমাত্রিক দেশে দুইটি নির্দেশতলের ছেদরেখাই নির্দেশ অক্ষ। ইহারা পরস্পর সমকোণে বা অন্য যে কোন কোণে থাকিতে পারে।

কণা কোন নির্দেশী তলে থাকিলে উহার একটি নির্দেশাংক শূন্য ; নির্দেশী অক্ষে থাকিলে দুইটি নির্দেশাংক শূন্য।

আমাদের আলোচনা তিনটি পরস্পর সমকোণী অক্ষ দিয়া গঠিত নির্দেশতন্ত্রে আবদ্ধ থাকিবে।

যে সকল নির্দেশতন্ত্র (coordinate systems) একে অন্য যে কোন একটি সাপেক্ষে স্থির (at rest) আছে, তাহাদের সকলকে একই জাতীয় নির্দেশ ফ্রেমের বলিয়া ধরা হয়। উহাদের মূলবিন্দু বিভিন্ন হইতে পারে, এবং একের অক্ষ অন্যের অক্ষের সঙ্গে যে কোন কোণে থাকিতে পারে। দুই নির্দেশতন্ত্রের মধ্যে আপেক্ষিক গতি থাকিলে উহারা বিভিন্ন ফ্রেমের বলিয়া ধরা হইবে।

যে নির্দেশতন্ত্রে কোন কণার ত্বরণ কেবল কণাগুলির পারস্পরিক ক্রিয়ার উপর নির্ভর করে তাহাকে 'জড়ত্বীয় ফ্রেম' (inertial frame) বলে। এরূপ ফ্রেমে নিউটনের গতীয় সূত্রগুলি প্রযোজ্য হয়।

যে নির্দেশ ফ্রেম কোন জড়ত্বীয় ফ্রেম সাপেক্ষে ত্বরিত (accelerated), তাহা সাপেক্ষে কোন কণার ত্বরণ অংশতঃ অন্যান্য কণার সহিত ক্রিয়াঘটিত, ও অংশতঃ এই ত্বরিত ফ্রেমের ত্বরণের জন্য। এরূপ ফ্রেমকে 'অজড়ত্বীয় ফ্রেম' (non-inertial frame) বলে। ইহার ত্বরণ রৈখিক (translational) বা আবর্তীয় (rotational) বা উভয় প্রকারের হইতে পারে।

ত্বরিত ফ্রেমের ত্বরণের জন্য 'অলীক' (fictitious) বল দেখা দেয়। এরূপ বল অন্যান্য কণার সহিত ক্রিয়াঘটিত নয় বলিয়াই ইহাদের অলীক বলা হয়।

প্রকৃতিতে যথার্থ জড়ত্বীয় ফ্রেম কোথাও পাওয়া যায় না। যে কোন প্রাকৃতিক ফ্রেমে বস্তুর গতি বেশী সময় ধরিয়া দেখিলে বোঝা যাইবে উহা অজড়ত্বীয়। উদাহরণস্বরূপ ফুকোর দোলকের (Foucault's pendulum ; 5-10 অনুচ্ছেদ) সুপরিচিত পরীক্ষাটির কথা ধরা যায়। খুব লম্বা ও ভারী দোলক অনেকক্ষণ ধরিয়া দুলিতে দিলে দেখা যাইবে উহার দোলনতল (plane of oscillation) আস্তে আস্তে ঘুরিয়া যাইতেছে। ঘুরিবার বেগ কেবল স্থানীয় অক্ষাংশের (latitude) উপর নির্ভর করে। এই ঘোরাকে কোন প্রকারে পৃথিবীর সহিত পারস্পরিক ক্রিয়া (interaction) ঘটিত বলিয়া ব্যাখ্যা করা যায় না। অভিকর্ষের জন্য দোলনতল পূর্ব হইতে পশ্চিমে ঘুরিতে পারে না। মাত্র কয়েকটি দোলন দেখিলে দোলনতল যে ঘুরিতেছে তাহা বোঝা যায় না। নিরীক্ষা এই সময়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকিলে ধরা চলে যে দোলকের গতি কেবল অভিকর্ষ দিয়া নির্ণীত ; এবং এ অবস্থায় ভূপৃষ্ঠে স্থির নির্দেশতন্ত্রকে জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্র মনে করা যায়।

কোন প্রাকৃতিক ফ্রেম জড়ত্বীয় না হইলেও এরূপ ফ্রেমের কল্পনা সুবিধার। বিন্দুকণা, ঘর্ষণহীন তল প্রভৃতি বলবিজ্ঞানের অন্যান্য সরলকারী কল্পনার (idealization) মত জড়ত্বীয় ফ্রেমও একটি সরলীকরণ।

উপরের অর্থে কোন ফ্রেম জড়ত্বীয় হইলে উহা সাপেক্ষে যে ফ্রেম সমবেগে চলিতেছে তাহাও জড়ত্বীয় হইবে ; পরের অনুচ্ছেদে ইহা প্রমাণ করা হইয়াছে। ইহাদের যে কোনটি স্থিতিতে আছে বলিয়া ধরা চলে কারণ গতি সর্বদাই আপেক্ষিক।

5-2. সচল অজড়ত্বীয় নির্দেশ ফ্রেমে নিউটনের গতীয় সমীকরণ (Newton's equation of motion in a moving non-inertial

frame of reference)। মনে কর O এবং O' দুইটি নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু এবং এই দুই তন্ত্রে কোন P বিন্দুর স্থান-ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{r}$ ও $\mathbf{r}'$। O সাপেক্ষে O'-এর স্থান-ভেক্টর $\mathbf{R}$, অর্থাৎ $\overline{OO'} \equiv \mathbf{R}$। তাহা হইলে

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} \tag{5-2.1}$$

O মূলবিন্দুর নির্দেশতন্ত্রকে জড়ত্বীয় ধরা যাক এবং O' তন্ত্র যেন উহা সাপেক্ষে $\mathbf{a}_R$ ত্বরণে চলিতেছে। P বিন্দু সচল হইলে দুই তন্ত্রে উহার বেগ $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ এবং $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$। 5-2.1 সমীকরণ t সাপেক্ষে অবকলিত করিয়া $\mathbf{v}$ ও $\mathbf{v}'$-এর সম্পর্ক পাওয়া যায়।

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_R \tag{5-2.2}$$

এখানে $\mathbf{v}_R$ দ্বারা O সাপেক্ষে O'-এর বেগ বুঝায়।

দুই ফ্রেমে P-র ত্বরণ $\mathbf{a}$ ও $\mathbf{a}'$-এর সম্পর্ক হইবে

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_R \tag{5-2.3}$$

জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্রে (O-তন্ত্রে) নিউটনের গতীয় সমীকরণ হইল

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

ত্বরিত নির্দেশতন্ত্রে উহা হইবে

$$m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} + m\mathbf{a}_R = \mathbf{F} \tag{5-2.4}$$

এখানে ধরা হইয়াছে $\mathbf{F}$ উভয়তন্ত্রে একই থাকিবে। $\mathbf{F}$ সাধারণতঃ দুইটি কণার পারস্পরিক দূরত্বের উপর নির্ভর করে। 5-2.1 হইতে দেখা যায় যে দুই কণার পারস্পরিক দূরত্ব উভয় তন্ত্রে একই থাকে। অতএব $\mathbf{F}$ অপরিবর্তিত থাকিবে।

O' বিন্দু O বিন্দু সাপেক্ষে সুষমবেগে চলিলে $\mathbf{a}_R = 0$ হইবে। এক্ষেত্রে উভয় তন্ত্রেই নিউটনের গতীয় সমীকরণ প্রযোজ্য হইবে। ইহা হইতে বোঝা যায় যে সকল নির্দেশতন্ত্র এক সাপেক্ষে অন্যে সুষম বেগে চলিতেছে তাহাদের যে কোন একটি জড়ত্বীয় হইলে অন্যগুলিও জড়ত্বীয় হইবে।

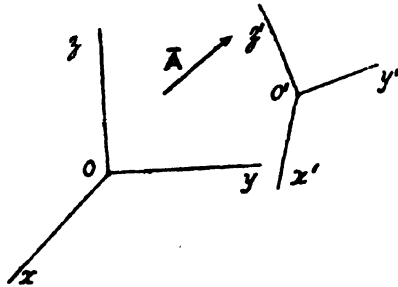
অলীক বল বা ছদ্ম বল। ফ্রেম্ ত্বরিত হইলে 5-2.4 হইতে লেখা যায়

$$m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_R \tag{5-2.5}$$

এই সমীকরণের রূপ জড়ত্বীয় ফ্রেমে নিউটনের সমীকরণের রূপেরই মত, কিন্তু F-এর বদলে ইহাতে $\mathbf{F}-m\mathbf{a}_R$ রহিয়াছে। $-m\mathbf{a}_R$ রাশিটিকে 'অলীক বল' বা 'ছদ্ম বল' (Fictitious force or pseudo-force) বলা হয়। ত্বরিত নির্দেশ ফ্রেমে গতীয় সমীকরণ নিউটনের সমীকরণের মতই লেখা যায়, কিন্তু প্রযুক্ত বলের সঙ্গে উপরের অলীক বল যোগ করিতে হইবে। অলীক বল সচল নির্দেশতন্ত্রের ত্বরণের জন্য ; উহা বস্তুর পারস্পরিক ক্রিয়াঘটিত নয়। ত্বরিত ফ্রেম অজড়ত্বীয়।

গাড়ী হঠাৎ চলিতে শুরু করিলে বা থামিলে আরোহী যে ধাক্কা অনুভব করেন তাহা এই প্রকার অলীক বলের ক্রিয়া। এখানে গাড়ীই হইল ত্বরিত ফ্রেম। উহাতে যে সকল ঘটনা ঘটে তাহা ব্যাখ্যা করিবার জন্য অলীক বলের দরকার হয়। গাড়ীর পাশের রাস্তাকে জড়ত্বীয় ফ্রেম ধরা যায়। গাড়ীর ঐ ঘটনা ব্যাখ্যা করার জন্য রাস্তায় দাঁড়ান দর্শকের ঐ বল অবতারণা করার দরকার হইবে না : তিনি ধাক্কাকে স্থিতিজাড্য বা গতি-জাড্যের (inertia of rest or motion) নিদর্শন বলিবেন।

ভূকম্পন মাপক যন্ত্রে এই অলীক বলের মনন কিভাবে ব্যবহার করা হয় তাহা 8.9 অনুচ্ছেদে আলোচিত হইয়াছে।

5-3. ঘূর্ণমান ফ্রেম (Rotating frame)। 5.1 চিত্রে x, y, z এবং x', y', z' দুইটি নির্দেশতন্ত্র ; উহাদের অক্ষ সমান্তরাল নয় এবং মূলবিন্দু

5.1 চিত্র

এক না হইতেও পারে। **A** কোন ভেক্টর হইলে উভয় তন্ত্রেই **A**-র মান সমান হইবে, কিন্তু উপাংশগুলি আলাদা হইবে। লেখা যায়

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k} \quad \text{(অচিহ্নিত নির্দেশতন্ত্রে)}\\ &= A_x'\mathbf{i}'+A_y'\mathbf{j}'+A_z'\mathbf{k}' \quad \text{(চিহ্নিত নির্দেশতন্ত্রে)}\end{aligned} \qquad (5\text{-}3.1)$$

ধরা যাক অচিহ্নিত নির্দেশতন্ত্র স্থির আছে এবং চিহ্নিত নির্দেশতন্ত্র উহা

সাপেক্ষে ω কৌণিক বেগে ঘুরিতেছে। স্থিরতন্ত্রে ঐকিক ভেক্টরগুলি বদলায় না বলিয়া উহাতে

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\dot{A}_x\mathbf{i}+\dot{A}_y\mathbf{j}+\dot{A}_z\mathbf{k} \tag{5-3.2}$$

ঘুরন্ত ফ্রেমে ঐকিক ভেক্টরগুলি স্থিরতন্ত্র সাপেক্ষে সময়ের সহিত বদলায় বলিয়া লিখিতে হইবে

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{d}{dt}(A_x'\mathbf{i}'+A_y'\mathbf{j}'+A_z'\mathbf{k}')$$
$$=\dot{A}_x'\mathbf{i}'+\dot{A}_y'\mathbf{j}'+\dot{A}_z'\mathbf{k}'+A_x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt}+A_y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt}+A_z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \tag{5-3.3}$$

$\dot{A}_x'\mathbf{i}'+\dot{A}_y'\mathbf{j}'+\dot{A}_z'\mathbf{k}'$ রাশিটি ঘুরন্ত নির্দেশতন্ত্র সাপেক্ষে সময়ের সহিত A-র পরিবর্তনের হার। এই হার আমরা $d'\mathbf{A}/dt$ দ্বারা বুঝাইব। d-র সঙ্গে ড্যাশ (′) চিহ্ন সর্বদাই ঘুরন্ত নির্দেশতন্ত্র সম্পর্কিত হার বুঝাইবে।

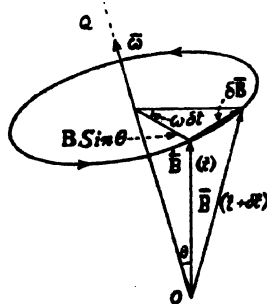
$$\frac{d'\mathbf{A}}{dt}=\dot{A}_x'\mathbf{i}'+\dot{A}_y'\mathbf{j}'+\dot{A}_z'\mathbf{k}' \tag{5-3.4}$$

ঘুরন্ত ফ্রেমের মৌলিক সূত্র। ঘুরন্ত ফ্রেম সংক্রান্ত দুইটি মৌলিক সূত্র আমরা এখানে প্রমাণ করিব।

1. ইহার প্রথমটিতে বলে যে

ঘুরন্ত ফ্রেমে স্থির কোন ভেক্টর B-র স্থির ফ্রেম সাপেক্ষে সময়ের সহিত পরিবর্তনের হার

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt}=\omega\times\mathbf{B}$$

মনে কর, ঘুরন্ত নির্দেশতন্ত্র OQ অক্ষে (5.2 চিত্র) ঘুরিতেছে, এবং B ও

5.2 চিত্র

ω-র মধ্যবর্তী কোণ θ। δt অবসরে B-র পরিবর্তন $\delta B=(B\sin\theta)(\omega\,\delta t)$। $\delta t\to0$ সীমায় $\delta\mathbf{B}$, ω এবং B দ্বারা নির্ণীত তলের অভিলম্ব হয় এবং উহার

অভিমুখ দক্ষিণ কর্ক স্ক্রু সূত্র (2-6.2 অনুচ্ছেদ) মানিয়া চলে (অর্থাৎ দক্ষিণাবর্ত কর্ক স্ক্রু ω হইতে B-র দিকে ঘুরাইলে উহা δB-র অভিমুখে আগাইবে)। অতএব

$$\left.\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right| = \lim_{\delta t\to 0} \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} = \omega\, B \sin\theta = |\,\omega\times\mathbf{B}\,|$$

$$\text{এবং}\quad \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \omega\times\mathbf{B} \tag{5-3.5}$$

2. 5-3.3 সমীকরণের $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$, ভেক্টরগুলিতে 5-3.5 সম্পর্ক প্রয়োগ করিলে দ্বিতীয় সূত্রটি পাই।

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + A_x'\,(\omega\times\mathbf{i}') + A_y'\,(\omega\times\mathbf{j}') + A_z'\,(\omega\times\mathbf{k}')$$

$$\frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \omega\times\mathbf{A} \tag{5-3.6}$$

এই সূত্রটি প্রয়োগ করিতে মনে রাখিতে হইবে ঘুরন্ত ফ্রেম সাপেক্ষে সময়ের সহিত A ভেক্টরটির পরিবর্তনের হার $d'\mathbf{A}/dt$, এবং কেবল ফ্রেম ঘুরিবার জন্য স্থির ফ্রেম সাপেক্ষে সময়ের সহিত উহার পরিবর্তনের হার $\omega\times\mathbf{A}$। এই দুই হারের যোগফল হইল স্থির ফ্রেম সাপেক্ষে A-এর পরিবর্তনের হার $d\mathbf{A}/dt$।

যদিও আমরা 5-3.5 ও 5-3.6 সমীকরণ দুইটিকে মৌলিক সূত্র বলিয়া উল্লেখ করিয়াছি, মাত্র 5-3.6-কে মৌলিক ধরা চলে কারণ 5-3.5 উহার মধ্যে নিহিত আছে। A স্থির ভেক্টর হইলে $d'\mathbf{A}/dt = 0$ হইবে ; তখন $d\mathbf{A}/dt = \omega\times\mathbf{A}$ এবং ইহাই 5-3.5 সমীকরণ।

5-3.6 সমীকরণের সংকারক রূপ। 5-3.6 সমীকরণে d/dt দ্বারা স্থির ফ্রেমে কাল সাপেক্ষে অবকলনরূপ গাণিতিক প্রক্রিয়া (mathematical operation) বুঝায়। d'/dt ঘুরন্ত ফ্রেম সাপেক্ষে অনুরূপ প্রক্রিয়া। d/dt, d'/dt সংকেত (symbol) দুটিই গাণিতিক সংকারক (mathematical operator)। $\omega\times$ (অর্থাৎ 'ওমেগা ক্রস') সংকেতটিকেও গাণিতিক সংকারক ধরিলে লেখা যায়

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \omega\times \tag{5-3.7}$$

5-3.7কে 5-3.6 সমীকরণের 'সংকারক' (operator) রূপ মনে করা যাইতে পারে। সংকারকগুলি যে কোন ভেক্টরের উপর ক্রিয়া করিতে পারে।

A ভেক্টর ঘূর্ণাক্ষ OQ-র সমান্তরাল হইলে উহা ω-রও সমান্তরাল হইবে। তখন $\omega \times \mathbf{A} = 0$ হইবে এবং $d\mathbf{A}/dt = d'\mathbf{A}/dt$ হইবে।

5-4. ঘুরন্ত ফ্রেমে বেগ ও ত্বরণ। মনে কর ঘুরন্ত ও স্থির ফ্রেমের মূলবিন্দু একই ; অক্ষ সমান্তরাল না হইতেও পারে। যে কোন P বিন্দুর স্থান-ভেক্টর $\mathbf{r}$ উভয় ফ্রেমে একই হইবে। 5-3.6 সমীকরণ অনুসারে স্থির ফ্রেমে P বিন্দুর বেগ

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \omega \times \mathbf{r} \quad ।$$

স্থির ফ্রেমে P বিন্দুর ত্বরণ

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \omega \times \mathbf{r}\right)$$

$$= \left(\frac{d'}{dt} + \omega \times\right)\left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \omega \times \mathbf{r}\right) \qquad \text{(5-3.7 সমীকরণ দেখ)}$$

$$= \frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d'}{dt}(\omega \times \mathbf{r}) + \omega \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$$

$$= \frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2\omega \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \frac{d'\omega}{dt} \times \mathbf{r} \qquad (5.4.1)$$

$d'^2\mathbf{r}/dt^2$ রাশিটি ঘুরন্ত ফ্রেম সাপেক্ষে P বিন্দুর ত্বরণ। $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ রাশিটিকে অভিকেন্দ্র ত্বরণ (centripetal acceleration) বলে। $2\omega \times (d'\mathbf{r}/dt)$ রাশিটিকে বলে কোরিওলি ত্বরণ (Coriolis acceleration)। $(d'\omega/dt) \times \mathbf{r}$ রাশিটির আলাদা কোন নাম নাই ; কৌণিক বেগ স্থির থাকিলে উহার মান হয় শূন্য। 5-4.1 সমীকরণকে অনেক সময় **কোরিওলির সূত্র (Coriolis theorem)** বলা হয়।

5-5. ঘুরন্ত ফ্রেমে নিউটনের গতীয় সূত্রের প্রয়োগ। স্থির ফ্রেমে (জড়ত্বীয় ফ্রেমে) নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের রূপ হইল $md^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F}$। গত অনুচ্ছেদের ঘুরন্ত ফ্রেমে ইহার রূপ হইবে

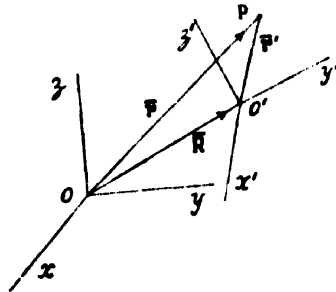
$$\mathbf{F}\left(= m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$$

$$= m\left\{\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2\omega \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \frac{d'\omega}{dt} \times \mathbf{r}\right\}$$

বা $$m\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m\,\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - 2\,m\omega \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} - m\,\frac{d'\omega}{dt} \times \mathbf{r} \qquad (5\text{-}5.1)$$

এই সমীকরণ হইতে দেখা যায়, প্রযুক্ত বলের (F) সঙ্গে কয়েকটি 'অলীক' বল যোগ করিলে ঘুরন্ত ফ্রেমে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের গাণিতিক রূপ স্থির ফ্রেমের রূপের মতই হয়। এই অলীক বলগুলি—$m\omega\times(\omega\times\mathbf{r})$, —$2m\omega\times(d'\mathbf{r}/dt)$ এবং $-m(d'\omega/dt)\times\mathbf{r}$। ইহাদের প্রথমটিকে 'অপকেন্দ্র বল' (centrifugal force), এবং দ্বিতীয়টিকে 'কোরিওলি বল' (coriolis force) বলে। আবর্তনের কৌণিক বেগ সুষম হইলে তৃতীয় বলটি থাকে না, এই বলের আলাদা কোন নাম নাই। বলগুলিকে 'অলীক' বলিবার কারণ 5-2.5 সমীকরণ সম্পর্কে আলোচিত হইয়াছে।

5-6. সরণবিশিষ্ট ঘুরন্ত ফ্রেম (Moving frame with simultaneous rotation and translation)। 5-4 অনুচ্ছেদে আমরা ঘুরন্ত ও স্থির ফ্রেমের মূলবিন্দু একই ধরিয়াছিলাম। ঘুরন্ত ফ্রেমের মূলবিন্দুর সরণ থাকিলে কি হইবে তাহা আমরা এই অনুচ্ছেদে আলোচনা করিব।

5-3 চিত্রে স্থির ফ্রেমের মূলবিন্দু O সাপেক্ষে কোন P বিন্দুর স্থান-

5.3 চিত্র

ভেক্টর $\mathbf{r}$, এবং চলন্ত ফ্রেমের মূলবিন্দু O' সাপেক্ষে উহা $\mathbf{r}'$। O সাপেক্ষে O'-এর স্থানভেক্টর $\mathbf{R}$, অর্থাৎ $\overline{OO'}\equiv\mathbf{R}$। এরূপ ক্ষেত্রে

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{R},$$

অতএব $$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}'}{dt}+\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\frac{d'\mathbf{r}'}{dt}+\omega\times\mathbf{r}'+\frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

এবং $$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt}+\omega\times\mathbf{r}'\right)+\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$

$$\left(\frac{d'}{dt}+\omega\times\right)\left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt}+\omega\times\mathbf{r}'\right)+\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$

$$=\frac{d'^2\mathbf{r}'}{dt^2}+\omega\times(\omega\times\mathbf{r}')+2\omega\times\frac{d'\mathbf{r}'}{dt}+\frac{d'\omega}{dt}\times\mathbf{r}'+\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\quad(5\text{-}6.1)$$

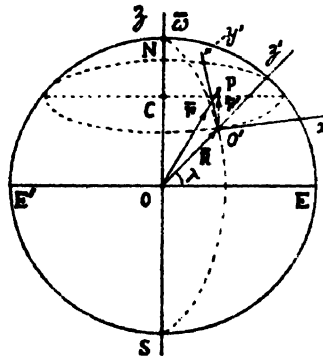
ঘুরন্ত ফ্রেমের মূলবিন্দুর সরণ থাকার জন্য ত্বরণে একটি অতিরিক্ত পদ ($d^2\mathbf{R}/dt^2$) যুক্ত হইয়াছে।

5-4.1 ও 5-6.1 সমীকরণের প্রভেদ মনে রাখা ভাল। প্রথমটিতে **r** উভয় ফ্রেমে একই। দ্বিতীয়টিতে **r**′ ঘুরন্ত ফ্রেমে স্থান ভেক্টর।

5-7. ঘুরন্ত ভূপৃষ্ঠে গতীয় সমীকরণ (Equation of motion on the rotating earth)। পৃথিবী নিজ উত্তর-দক্ষিণ অক্ষে পশ্চিম হইতে পূবে দৈনিক এক পাক ঘোরে। আবর্তনের কৌণিক বেগ সেকেণ্ডে $2\pi/86164 = 7.292 \times 10^{-5}$ রেডিয়ান। সাধারণ আলোচনায় আমরা যখন কোন নির্দেশতন্ত্রের কথা ভাবি তখন উহাকে প্রায়ই ভূপৃষ্ঠ সাপেক্ষে স্থির বলিয়া মনে করি। আসলে এরূপ নির্দেশতন্ত্র ভূপৃষ্ঠের সহিত ঘুরিতেছে। এই ঘোরা উপেক্ষা না করিলে ভূপৃষ্ঠে গতীয় সমীকরণের রূপ কি হইবে?

এই প্রশ্নের উত্তর বিচারে একটি স্থির নির্দেশতন্ত্র নেওয়া দরকার। কল্পনায় এরূপ একটি নেওয়া যাইতে পারে। উহার মূলবিন্দু O ভূকেন্দ্রে, z-অক্ষ পৃথিবীর আবর্তন অক্ষে উত্তর দিকে এবং অন্য দুটি অক্ষ (x, y) ইহার সমকোণে। এ তিনটি অক্ষ স্থির নক্ষত্রগুলি সাপেক্ষে স্থির থাকে মনে করিতে হইবে।

অন্য নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু O' নিরীক্ষার জায়গায় ভূপৃষ্ঠে আবদ্ধ। এই তন্ত্রের z'-অক্ষ খাড়া উপরের দিকে, x'-অক্ষ পৃথিবীর অক্ষাংশ রেখায় (line of latitude) পূব দিকে, এবং y'-অক্ষ দেশান্তর রেখায় (line of longitude) উত্তর দিকে নেওয়া যাক (5.4 চিত্র)। ইহাতে $x'y'$ তল O' বিন্দুতে অনুভূমিক তল, এবং অক্ষ তিনটি দক্ষিণ হস্তীয় হইবে।

মনে কর ভূপৃষ্ঠের কাছে কোন P বিন্দুতে (5.4 চিত্র) m ভরের একটি

5.4 চিত্র

কণা আছে এবং উহার ভার mg ছাড়া উহার উপর অন্য বল **F**-ও ক্রিয়া

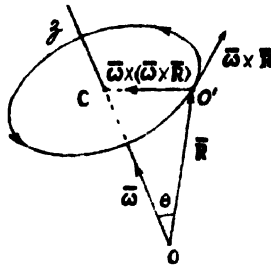
করে। ভূকেন্দ্র O সাপেক্ষে P-র স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$, O' সাপেক্ষে $\mathbf{r}'$, এবং $\overline{OO'} \equiv \mathbf{R}$ ধরা যাক। $\mathbf{R}$ পৃথিবীর ব্যাসার্ধ।

স্থির ফ্রেমে m কণার গতীয় সমীকরণ হইবে

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}$$

5-6.1 সমীকরণ হইতে $d^2\mathbf{r}/dt^2$-র মান লইয়া এই সমীকরণে বসাইলে $\mathbf{r}'$ ও $\mathbf{R}$ দিয়া গতীয় সমীকরণ পাইব। আলোচ্য ক্ষেত্রে ωর মান স্থির। অতএব 5-6.1 সমীকরণের $(d'\omega/dt) \times \mathbf{r}'$ পদটির মান শূন্য হইবে। এইভাবে পাই

$$m\frac{d'^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') - 2m\omega \times \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} - m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \qquad (5\text{-}7.1)$$

$d^2\mathbf{R}/dt^2$ রাশিটি O সাপেক্ষে O'-এর ত্বরণ। O' বিন্দু স্থির ফ্রেমের $O'C = R \sin\theta$ (5.5 চিত্র দেখ) ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে চলে। O' বিন্দুতে

5.5 চিত্র

অক্ষাংশ λ হইলে $\theta = \pi/2 - \lambda$। বৃত্তের কেন্দ্র C পৃথিবীর আবর্তন অক্ষের উপর। কাজেই O'-এর ত্বরণ অরীয় (radial) এবং উহার মান (3-7 অনুচ্ছেদের প্রশ্নটি দেখ)

$$\frac{\text{বেগের বর্গ}}{\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} = \frac{(\omega R \sin\theta)^2}{R\sin\theta} = \omega^2 R \sin\theta = |\omega \times (\omega \times \mathbf{R})|$$

5.5 চিত্র হইতে সহজেই বোঝা যাইবে $\omega \times (\omega \times \mathbf{R})$ ভেক্টরটির অভিমুখ পৃথিবীর আবর্তন অক্ষের দিকে ও অক্ষের অভিলম্বে। অতএব $d^2\mathbf{R}/dt^2$-র

বদলে আমরা $\omega \times (\omega \times \mathbf{R})$ লিখিতে পারি। $\omega \times (\omega \times \mathbf{r}')$ রাশিটির সঙ্গে ইহা যোগ করিলে যোগফল $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ হয়। ইহাতে 5-7.1 সমীকরণ হইয়া দাঁড়ায়

$$m\frac{d'^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - 2m\omega \times \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} \qquad (5\text{-}7.2)$$

ইহাই ঘুরন্ত ভূপৃষ্ঠে গতীয় সমীকরণ। ইহা হইতে দেখা যায় ভূপৃষ্ঠে স্থির দর্শকের কাছে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের রূপ অক্ষুণ্ণ রাখিতে হইলে প্রযুক্ত বলগুলির সহিত $-m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ এবং $-2m\omega \times (d'\mathbf{r}'/dt)$ অলীক বল দুইটি যোগ করিতে হইবে। ইহার প্রথমটি অপকেন্দ্র বল ও দ্বিতীয়টি কোরিওলি বল (5.5 অনুচ্ছেদ)।

এই অলীক বল দুইটির ক্রিয়া পরবর্তী দুই অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হইল।

5-8. পৃথিবীর আবর্তনের অপকেন্দ্র বল (Centrifugal force due to earth's rotation)। আগের অনুচ্ছেদের আলোচনা হইতে দেখা যায় আলোচ্য বিন্দুতে অপকেন্দ্র বল $-m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$-এর অভিমুখ পৃথিবীর ঘূর্ণাক্ষের অভিলম্বে অক্ষ হইতে বাহিরের দিকে। ইহার মান $m\omega^2 r \sin\theta$ বা, অক্ষাংশে বলিলে, $m\omega^2 r\cos\lambda$ কারণ $\theta = \pi/2 - \lambda$। $r' \ll R$ হইলে ইহাকে কার্যতঃ $m\omega^2 R\cos\lambda$ বলিয়া ধরা যায়। বিষুবরেখায় ($\lambda = 0$) ইহার মান সবচেয়ে বেশী। অক্ষাংশ বাড়িলে ইহা কমে, এবং মেরুতে ($\lambda = 90°$) ইহার মান শূন্য হয়। এ সংক্রান্ত আরও কিছু আলোচনা 8-1 অনুচ্ছেদে করা হইয়াছে।

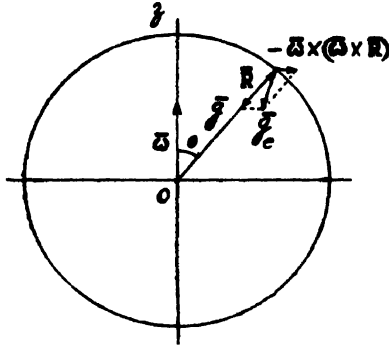
অপকেন্দ্র বলের ক্রিয়া বুঝিতে উহাকে $m\mathbf{g}$ বলের সঙ্গে জুড়িয়া লওয়া যায়। উহারা একত্রে

$$m\{\mathbf{g} - \omega \times (\omega \times \mathbf{r})\}.$$

কেবল পৃথিবীর আকর্ষণের জন্য m কণার ত্বরণ $\mathbf{g}$। কিন্তু অপকেন্দ্র বল থাকায় কার্যকর ত্বরণ

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{g} - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \qquad (5\text{-}8.1)$$

যে ত্বরণ আমরা মাপি তাহা $\mathbf{g}_e$। স্থির দোলকের দোলনসূত্র (ওলন দড়ি) $\mathbf{g}_e$-র ক্রিয়ারেখায় থাকে। পৃথিবীর উত্তর গোলার্ধে এই ক্রিয়ারেখা ভূকেন্দ্রের একটু দক্ষিণ দিয়া যায় (5.6 চিত্র)। ভূপৃষ্ঠে $\omega^2 R = 3.39$ cm/s² এবং $\mathbf{g}_e$ প্রায় 980 cm/s²। (8-1 অনুচ্ছেদ দেখ।)

শিক্ষার্থীর সুবিধা হইতে পারে মনে করিয়া অপকেন্দ্র বলের মৌলিক ব্যাপারটি এখানে আবার বলা হইল। 'যথার্থ' বা 'বাস্তব' বল বলিতে

5.6 চিত্র

আমরা বস্তুর পারস্পরিক ক্রিয়াঘটিত বল বুঝি। অপকেন্দ্র বল এ অর্থের বল নয়। ঘুরন্ত নির্দেশতন্ত্রে এই বল দেখা যায়। তন্ত্রের ঘূর্ণনই ইহার উৎপত্তির কারণ। স্থির নির্দেশতন্ত্রে ইহার অস্তিত্ব নাই।

দর্শক নিজে স্থির থাকিয়া যখন কোন কণাকে বৃত্তপথে ঘুরিতে দেখেন তখন তিনি কেবল অভিকেন্দ্র (centripetal) বলের অস্তিত্বই টের পান। ঘুরন্ত কণার কৌণিক বেগে ঘুরিতেছে এমন কোন নির্দেশতন্ত্র হইতে দেখিলে তিনি কণাকে সাম্যে দেখিবেন। ইহার ব্যাখ্যায় তিনি বলিবেন বাস্তব অভিকেন্দ্র বলকে নিশ্চয়ই সমান ও বিপরীত কোন বল নিষ্ক্রিয় করিতেছে। ইহাই অপকেন্দ্র বল।

ঘুরন্ত নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের গতীয় সূত্রের রূপ অক্ষুণ্ণ রাখিতে অপকেন্দ্র বলের অবতারণা করিতে হয়। ঘুরন্ত নির্দেশতন্ত্র অজড়ত্বীয়। নিউটনের সূত্রের মূলরূপ কেবল জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্রে প্রযোজ্য।

5-9. কোরিওলি বল (Coriolis force)। ঘুরন্ত নির্দেশতন্ত্রে অপকেন্দ্র বলের মত আর একটি অলীক বল দেখা দেয়। উহা কোরিওলি বল এবং উহার মান

$$= -2m\omega \times \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = 2m\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} \times \omega = 2m\mathbf{v}' \times \omega \qquad (5\text{-}9.1)$$

ঘূর্ণন না থাকিলে, অর্থাৎ $\omega = 0$ হইলে, বা নির্দেশতন্ত্রে আলোচ্য কণা স্থির থাকিলে, অর্থাৎ $\mathbf{v}' = 0$ হইলে, কোরিওলি বল দেখা দেয় না। কণার

বেগ $\mathbf{v}'$ ঘূর্ণন অক্ষের সমান্তরাল হইলে $\mathbf{v}'\times\omega=0$ হয় ; তখনও কোরিওলি বলের মান শূন্য।

বলের অভিমুখ কণার বেগ ও ঘূর্ণাক্ষ দিয়া নির্ণীত তলের অভিলম্বে। ডান হাতের বুড়া আঙুল সোজা রাখিয়া অন্য আঙুলগুলি উহাকে ঘেরিয়া মুঠা করিলে, মুঠা করা আঙুলের অভিমুখ যদি $\mathbf{v}'$ হইতে ω-র দিকে হয়, তাহা হইলে বুড়া আঙুল কোরিওলি বলের ক্রিয়ামুখ দেখাইবে।

ভূপৃষ্ঠের কাছে সচল কোন কণার বেগ ভেক্টর পৃথিবীর উত্তর-দক্ষিণ মেরুরেখার অভিলম্ব তলে থাকিলে উহার উপর কোরিওলি বলের মান অন্যদিকে বেগের তুলনায় সবচেয়ে বেশী হইবে। বেগ $\mathbf{v}'$ এবং $\mathbf{v}'$ ও ω-র মধ্যবর্তী কোণ θ হইলে বলের মান $2m\omega v'\sin\theta$। $\omega=2\pi/86164=7\cdot292\times10^{-5}$ rad/s হওয়ায় সাধারণ বেগে বলের মান খুব কম। বেগ 100 m/s হইলেও কোরিওলি ত্বরণের চরম মান $1\cdot45$ cm/s^2। অভিকর্ষজ ত্বরণ g-র তুলনায় ইহা নগণ্য, প্রায় $10^{-3}g$।

5-7 অনুচ্ছেদে উল্লিখিত x', y', z' অক্ষে (x'-অক্ষ অনুভূমিক পূবে, y'-অক্ষ অনুভূমিক উত্তরে ও z'-অক্ষ খাড়া উপরের দিকে) কোরিওলি ত্বরণের উপাংশ সহজেই বাহির করা যায় ; স্থানীয় অক্ষাংশ λ হইলে এই তিন অক্ষে ω-র উপাংশ যথাক্রমে 0, $\omega\cos\lambda$ এবং $\omega\sin\lambda$। $\mathbf{v}'$-এর উপাংশ যথাক্রমে $\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'$। অতএব

$$2\mathbf{v}'\times\omega=2\begin{vmatrix} & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ & \dot{y}' & \\ 0 & \omega\cos\lambda & \omega\sin\lambda \end{vmatrix}$$

এবং কোরিওলি ত্বরণের উপাংশ

পূব দিকে $2\omega(\dot{y}'\sin\lambda-\dot{z}'\cos\lambda)$

উত্তর দিকে $-2\omega\dot{x}'\sin\lambda$ অর্থাৎ দক্ষিণ দিকে $2\omega\dot{x}'\sin\lambda$)

এবং উপরের দিকে $2\omega\dot{x}'\cos\lambda$

উত্তর গোলার্ধে λ পজিটিভ ও দক্ষিণ গোলার্ধে λ নিগেটিভ ধরিতে হইবে।

উল্লম্ব পতনে কোরিওলি বলের ক্রিয়া। মনে কর, কোন কণা স্থিতি হইতে পৃথিবীর টানে খাড়া নিচের দিকে অবাধে পড়িতেছে। এক্ষেত্রে $\dot{x}'=\dot{y}'=0$ এবং $\dot{z}'$ নিগেটিভ রাশি। ইহাতে কোরিওলি ত্বরণের পূবদিকের

উপাংশ ছাড়া অন্য দুইটির মান শূন্য হইবে, অর্থাৎ কোরিওলি ত্বরণ পূর্বদিকে ঘটিবে। t সময় ধরিয়া কণা অবাধে পড়িলে $\dot{z}' = -gt$। অতএব কোরিওলি ত্বরণ $a_{cor} = 2\omega gt \cos\lambda$। ইহাকে দুইবার t সাপেক্ষে সমাকলন করিলে কোরিওলি বলের জন্য পূর্বদিকে সরণ x'_c পাওয়া যাইবে।

$$x'_c = \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda.$$

h উচ্চতা হইতে কণা পড়িলে $t = \sqrt{2h/g}$। অতএব

$$x'_c = \tfrac{1}{3}\omega g\,(2h/g)^{\frac{3}{2}} \cos\lambda = \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega\sqrt{\frac{h^3}{g}}\cos\lambda$$

দেখা যায় বিষুব অঞ্চলে বিক্ষেপ সবচেয়ে বেশী। এই স্থানে কণা 100 m উঁচু হইতে পড়িলে উহার পূর্বদিকের বিক্ষেপ হইবে প্রায় 2.2 cm। বায়ুর বেগ ও বাধার জন্য মাপন শক্ত হইলেও পরীক্ষায় বিক্ষেপ প্রমাণিত হইয়াছে।

কোরিওলি বল সামান্য হইলেও অনেকগুলি ঘটনায় উহার পরিচয় পাওয়া যায়। উত্তর গোলার্ধে উত্তর-দক্ষিণে কোন গোলা ছুড়িলে উহার কোরিওলি ত্বরণ $v' \times \omega$-র আনুপাতিক বলিয়া গোলা নিজ গতিমুখের দক্ষিণে বিক্ষিপ্ত হইবে। বায়ুর বাধা উপেক্ষা করিলে ত্বরণ স্থিরমান ধরা যায়। অতএব বিক্ষেপ গোলার গতিকালের (time of flight) বর্গের সমানুপাতিক হইবে। উত্তর গোলার্ধে যে সকল নদী উত্তর-দক্ষিণে প্রবাহিত হয়, তাহার স্রোতের উপর কোরিওলি বল ক্রিয়া করায় জল নিজ স্রোতমুখের দক্ষিণে সরে। ইহাতে নদীর ডান পার ভাঙ্গে বেশী এবং খাড়া হয়। দক্ষিণ গোলার্ধে ক্রিয়া বিপরীত দিকে হয়।

অ্যাটল্যাণ্টিক মহাসাগরে গালফ স্ট্রীম (Gulf stream) দক্ষিণ হইতে উত্তরে প্রবাহিত হয় বলিয়া কোরিওলি বলের ক্রিয়ায় উহা পূবে সরে। ইহাতে ইউরোপের পশ্চিম অঞ্চল অনেকটা উষ্ণ থাকিতে পারে, কারণ গালফ স্ট্রীম বিষুব অঞ্চল হইতে উষ্ণ জল নিয়া আসে। কোরিওলি বল না থাকিলে ইউরোপের পশ্চিম অঞ্চলে শীত আরও বেশী হইত।

আবহাওয়া বিজ্ঞানের ক্ষেত্রেও কোরিওলি বলের ক্রিয়া দেখা যায়। প্রবহমান জলস্রোতের মত বায়ুস্রোতও ইহার ক্রিয়ায় বিক্ষিপ্ত হয়। এই কারণেই উত্তর গোলার্ধে ঘূর্ণিঝড় বামাবর্তে (anticlockwise) ও দক্ষিণ গোলার্ধে দক্ষিণাবর্তে ঘোরে। উত্তর গোলার্ধে উত্তর-পূর্ব বায়ুস্রোত,

এবং দক্ষিণ গোলার্ধে দক্ষিণ-পশ্চিম বায়ুস্রোত একই কারণে দেখা দেয়। নিচে কোরিওলি বলের আর একটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

5-10. ফুকোর দোলক (Foucault's pendulum)। ফরাসী বৈজ্ঞানিক ফুকো তাঁহার সুবিখ্যাত দোলকের পরীক্ষার সাহায্যে গ্রহনক্ষত্রের গতিবিচার ছাড়াই পৃথিবীর নিজ অক্ষে আবর্তনের কথা প্রমাণ করিয়াছিলেন। এই পরীক্ষার জন্য অনেক সময় ধরিয়া দুলিতে পারে এমন একটি দোলক চাই। কাজেই দোলক বেশ লম্বা এবং উহার পিণ্ড ভারী হওয়া দরকার। ফুকোর প্রথম পরীক্ষায় দোলকের দৈর্ঘ্য 2 মিটার এবং পিণ্ডের ভার 5 kg ছিল। প্যারিসে 1851 খৃষ্টাব্দে সকলের সম্মুখে পরীক্ষার জন্য তিনি যে দোলক ব্যবহার করিয়াছিলেন তাহার দৈর্ঘ্য ছিল 67 মিটার। দোলকপিণ্ড ছিল 28 kg ওজনের একটি কামানের গোলা। ইংলণ্ডে সাউথ কেনসিংটন সায়েন্স মিউজিয়ামে যে ফুকো দোলকটি আছে তাহা 79 ফুট লম্বা এবং উহার পিণ্ড 30 পাউণ্ড ওজনের সীসা ভরা একটি পিতলের গোলক।

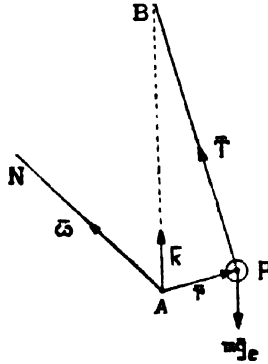
লম্বা, ভারী দোলক কোন উল্লম্ব তলে দোলাইয়া দিলে ক্রমশঃ দেখা যাইবে দোলনতল পারিপার্শ্বিক সাপেক্ষে উল্লম্ব অক্ষে আস্তে আস্তে ঘুরিয়া যাইতেছে। সম্পূর্ণ এক পাক ঘুরিতে 24 ঘণ্টার বেশী সময় লাগে। প্যারিসের অক্ষাংশে ইহা প্রায় 32 ঘণ্টা। উত্তর গোলার্ধে উপর হইতে নিচের দিকে তাকাইলে দোলনতল দক্ষিণাবর্তে (clockwise) ঘুরিতে দেখা যায়। দক্ষিণ গোলার্ধে ইহার বিপরীত।

দোলকের উপর পৃথিবীর আকর্ষণজনিত বল খাড়াভাবে নিচের দিকে ক্রিয়া করে। দোলনতলের অভিলম্বে ক্রিয়া করার মত 'বাস্তব' বল এখানে কিছু নাই। অথচ দোলনতল ঘুরিয়া যায়। ইহা কোরিওলি বলের ক্রিয়ায় হয়। পারিপার্শ্বিক দিয়া গঠিত নির্দেশতন্ত্র পৃথিবীর সহিত ঘোরে বলিয়াই কোরিওলি বলের আগম হয়।

কোরিওলি সূত্র (5-4.1 সমীকরণ) দুইবার প্রয়োগ করিয়া দোলনতলের ঘুরিবার কৌণিক বেগ সংক্ষেপে বাহির করা যায়। ইহাতে দোলকের গতীয় সমীকরণ সমাধান করার দরকার হয় না। দোলকের উপর ক্রিয়াশীল বল ও অন্যান্য সংশ্লিষ্ট রাশিগুলি 5.7 চিত্রে দেখান হইয়াছে। ভূপৃষ্ঠে আবদ্ধ নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু হইল দোলকের ঝুলনবিন্দু Bর খাড়া নিচে দোলকপিণ্ডের সাম্য অবস্থান বিন্দু A। দোলনের বিস্তার কম থাকিলে পিণ্ডের স্থানভেক্টর $\overline{AP}=\mathbf{r}$ কার্যতঃ অনুভূমিক তলেই থাকিবে। পৃথিবীর কৌণিক বেগ ভেক্টর ω AN রেখায়। দোলকের সুতায় টান $\mathbf{T}$

এবং পিণ্ডের উপর অভিকর্ষীয় বল $m\mathbf{g}_e$ হইলে, দোলকের গতীয় সমীকরণ 5-7.2 ও 5-8.1 সমীকরণ অনুসারে

$$m\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{T}+m\mathbf{g}_e-2m\,\omega\times\frac{d'\mathbf{r}}{dt} \qquad (5\text{-}10.1)$$

সমীকরণের শেষ পদটি না থাকিলে ইহা স্থির নির্দেশতন্ত্রে সরল দোলকের গতীয় সমীকরণ হইত।

5.7 চিত্র

পিণ্ডের বেগ $d'\mathbf{r}/dt=\mathbf{v}'$ AP রেখায়। অতএব কোরিওলি বল ω ও $\mathbf{r}$ দিয়া নির্ণীত তলের অভিলম্বে। ইহাকে খাড়া ও অনুভূমিক দুই উপাংশে ভাগ করা যায়। কোরিওলি বলের মান খুব ছোট বলিয়া $m\mathbf{g}_e$-র তুলনায় আমরা উহার খাড়া উপাংশ উপেক্ষা করিতে পারি। অনুভূমিক উপাংশ দোলনতলের অভিলম্বে। ইহার ক্রিয়ায় দোলনতল স্থির না থাকিয়া ঘুরিবে।

দোলনতলে আবদ্ধ কোন নির্দেশতন্ত্র AB অক্ষে ঘুরিবে এবং উহা সাপেক্ষে দোলনতল স্থির থাকিবে, অর্থাৎ এইরূপ ঘুরন্ত নূতন নির্দেশতন্ত্রে কোরিওলি বলের কোন অনুভূমিক উপাংশ থাকিবে না। এই নির্দেশতন্ত্র আমরা তারকা চিহ্ন (*) দিয়া বুঝাইব এবং AB অক্ষে উহার কৌণিক বেগ ধরিব ω^*। AB অক্ষে $\mathbf{k}$ ঐকিক ভেক্টর হইলে এই কৌণিক বেগ ভেক্টর $\omega^*\mathbf{k}$ হইবে।

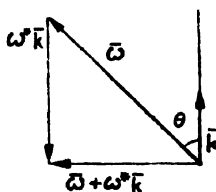
নূতন নির্দেশতন্ত্রে সময়ের সহিত কোন ভেক্টরের পরিবর্তনের হার d^*/dt দিয়া বুঝাইলে 5-3.6 সমীকরণ অনুসারে

$$\frac{d'\mathbf{r}}{dt}=\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}+\omega^*\mathbf{k}\times\mathbf{r}$$

এবং $$\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2}+\omega^*\mathbf{k}\times(\omega^*\mathbf{k}\times\mathbf{r})+2\omega^*\mathbf{k}\times\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}$$

5-10.1 সমীকরণে $d^{*2}\mathbf{r}/dt^2$-র মান বসাইলে পাই

$$m\frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{T}+m\mathbf{g}_e-m\omega^{*2}\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{r})-2m\omega^*\mathbf{k}\times\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}$$
$$-2m\omega\times\left(\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}+\omega^*\mathbf{k}\times\mathbf{r}\right)$$
$$=\mathbf{T}+m\mathbf{g}_e-m\omega^{*2}\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{r})-2m\omega\times(\omega^*\mathbf{k}\times\mathbf{r})$$
$$-2m(\omega+\omega^*\mathbf{k})\times\frac{d^*\mathbf{r}}{dt} \quad\cdots\quad (5\text{-}10.2)$$

ভেক্টর ত্রিধা গুণফলের নিয়ম অনুসারে (2-7.3 অনুচ্ছেদ দেখ) 5-10.2র ডানদিকের তৃতীয় ও চতুর্থ পদ k ও r দ্বারা নির্ণীত উল্লম্বতলে থাকে। T এবং $m\mathbf{g}_e$ উল্লম্বতলের বল। কাজেই 5-10.2 সমীকরণের ডানদিকের প্রথম চারটি পদই উল্লম্বতলের বল ; ইহাদের কাহারও অনুভূমিক উপাংশ নাই। শেষ পদের $d^*\mathbf{r}/dt$ কার্যতঃ AP রেখায়, এবং ইহা অনুভূমিক। $\omega+\omega^*\mathbf{k}$ রাশিটি অনুভূমিক হইলে শেষ পদটিও উল্লম্বতলে থাকিবে। তখন দ্বিতীয় নির্দেশতন্ত্রে দোলকের উপর দোলনতলের অভিলম্ব কোন বল ক্রিয়া করিবে না।

5.8 চিত্র

k উল্লম্ব বলিয়া $\omega+\omega^*\mathbf{k}$ রাশিটি অনুভূমিক হইবার শর্ত হইবে

$$\mathbf{k}.(\omega+\omega^*\mathbf{k})=0.$$

ω এবং kর মধ্যবর্তী কোণ θ হইলে 5.8 চিত্র হইতে দেখা যাইবে উপরের শর্ত অনুসারে

$$\omega^*=-\omega\cos\theta \qquad (5\text{-}10.3)$$

A বিন্দুর অক্ষাংশ (latitude) λ হইলে $\theta=\pi/2-\lambda$ এবং

$$\omega^*=-\omega\sin\lambda \qquad (5\text{-}10.4)$$

ω^* রাশিটিই পারিপার্শ্বিক সাপেক্ষে ফুকো দোলকের দোলনতল ঘুরিবার কৌণিক বেগ। উত্তর গোলার্ধে নিচের দিকে তাকাইলে ইহার আবর্তন দক্ষিণাবর্তী (clockwise) দেখাইবে কারণ কৌণিক বেগ ভেক্টরের দিক্ $-\mathbf{k}$ (এবং ইহার মান $\omega \sin \lambda$)। দোলনতল পূর্ণ এক পাক ঘুরিতে সময় লাগিবে

$$T = \frac{2\pi}{\omega^*} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = \frac{24}{\sin \lambda} \text{ ঘণ্টা।}$$

প্রশ্ন

1. জড়ত্বীয় ও অজড়ত্বীয় নির্দেশফ্রেম কাহাকে বলে ?

প্রমাণ কর যে, যে সকল নির্দেশতন্ত্র একে অন্যের সাপেক্ষে সুষম বেগে চলিতেছে তাহাদের একটি জড়ত্বীয় হইলে অন্যগুলিও জড়ত্বীয় হইবে।

2. 'বাস্তব' বল ও 'অলীক' বলে প্রভেদ কি ? অলীক বলের ক্রিয়া কোন্ অবস্থায় দেখা দেয় উদাহরণ দিয়া বুঝাইয়া বল।

3. স্থির ফ্রেমে ও ঘুরন্ত ফ্রেমে কোন ভেক্টরের সময়ের সহিত পরিবর্তনের হারের সম্পর্ক বাহির কর।

উহার সাহায্যে দুই ফ্রেমে ত্বরণের সম্পর্ক (কোরিওলি সূত্র) নির্ণয় কর।

4. ঘুরন্ত ফ্রেমে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র প্রয়োগ করিয়া অলীক বলগুলির ধর্ম আলোচনা কর।

5. ঘুরন্ত ভূপৃষ্ঠে কোন কণার গতীয় সমীকরণ কি হইবে ? উহার অলীক বলগুলির ক্রিয়া আলোচনা কর।

6. ভূপৃষ্ঠে কোন বস্তুর উপর অপকেন্দ্র বল কোথা হইতে আসে ? উহার ক্রিয়ার কি কি ফল বুঝাইয়া বল। নিরক্ষ রেখায় ও মেরুতে উহার মান কত ?

(সংকেত—8.1 অনুচ্ছেদ দেখিয়া লও।)

7. ভূপৃষ্ঠের কাছে চলন্ত বস্তুর উপর কোরিওলি বলের ক্রিয়া আলোচনা কর। h উচ্চতা হইতে ভূপৃষ্ঠে অবাধে পড়িতে কোন বস্তু গতির সমকোণে কোন্ দিকে কতটা সরিবে হিসাব কর।

8. ফুকোর দোলকের পরীক্ষা বর্ণনা কর। দোলনতল ঘুরিবে কেন এবং কোন্ দিকে ঘুরিবে ব্যাখ্যা কর। সম্পূর্ণ একপাক ঘুরিতে উহা কত সময় লইবে বাহির কর।

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ

দৃঢ়বস্তুর গতিবিজ্ঞান
(Dynamics of Rigid Bodies)

6-1. সূচনা। যে কণাগোষ্ঠীতে কণাগুলির পারস্পরিক দূরত্ব সর্বদা স্থির থাকে তাহাকে দৃঢ়বস্তু বলে। যথার্থ দৃঢ়বস্তু কল্পনা মাত্র, কারণ বল-প্রয়োগে যে কোন বস্তুর আকার বা আয়তনের পরিবর্তন হয়। এইরূপ বিকার সংক্রান্ত আলোচনা নবম পরিচ্ছেদে করা হইয়াছে। এখানে অপ্রশমিত বল বা টর্ক প্রয়োগে ব্যাপ্তিবিশিষ্ট (extended) দৃঢ়বস্তুর গতি কি প্রকার হইবে তাহা আমরা আলোচনা করিব। এই আলোচনায় ধরা হইবে বস্তুর উপাদানভূত কণাগুলির মধ্যে দূরত্ব গতিকালে বদলায় না। যে কোন কঠিন বস্তু সম্বন্ধে ইহা মোটামুটি প্রযোজ্য।

দৃঢ়বস্তুর গতিবিজ্ঞান বলবিজ্ঞানের এক বৃহৎ অংশ এবং ইহার প্রয়োগও ব্যাপক। এ পরিচ্ছেদে আমরা এই গতি সংক্রান্ত কিছু মৌলিক আলোচনা করিব ও কয়েকটি সহজ ক্ষেত্রে উহাদের প্রয়োগ দেখাইব।

দৃঢ়বস্তু মূলতঃ কণাগোষ্ঠী বলিয়া চতুর্থ পরিচ্ছেদে কণাগোষ্ঠী সংক্রান্ত যে সকল সূত্র প্রমাণিত হইয়াছে সেগুলি দৃঢ়বস্তুতেও প্রযোজ্য। ইহাদের মধ্যে দুইটি বিশেষ করিয়া মনে রাখা দরকার। ইহার প্রথমটি ভরকেন্দ্রের গতিসংক্রান্ত (4-2 অনুচ্ছেদ)। ইহাতে বলে বাহ্য বলের ক্রিয়াবিচারে দৃঢ়বস্তুর ভর উহার ভরকেন্দ্রে সংহত ধরা চলে। 4-2.6 সমীকরণ, অর্থাৎ

$$M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}=\mathbf{F} \qquad (6\text{-}1.1)$$

দৃঢ়বস্তুতে প্রযোজ্য। M বস্তুর ভর, $\mathbf{R}$ উহার ভরকেন্দ্রের স্থানভেক্টর ও $\mathbf{F}$ প্রযুক্ত সকল বলের ভেক্টর সমষ্টি।

দ্বিতীয়টি কৌণিক ভরবেগ সংক্রান্ত (4.5 অনুচ্ছেদ)। ইহাতে বলে কোন বিন্দু সাপেক্ষে কোন দৃঢ়বস্তুর মোট কৌণিক ভরবেগের সময়ের সহিত পরিবর্তনের হার বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বাহ্য বলের ঐ বিন্দু সাপেক্ষ ভ্রামকের (বা টর্কের) সমান। এই উক্তি (4-5.2) সমীকরণের বিষয়বস্তু। সমীকরণটি হইল

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{N} \qquad (6\text{-}1.2)$$

L আলোচ্য কোন স্থির বিন্দু সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুর মোট ভেক্টর কৌণিক ভরবেগ, এবং N একই বিন্দু সাপেক্ষে প্রযুক্ত বলের মোট ভেক্টর ভ্রামক। বিশেষ কোন অক্ষে আবর্তনের ক্ষেত্রে উপরের সমীকরণে L এবং N-এর ঐ অক্ষে উপাংশ লইতে হইবে।

কৌণিক বেগ সম্বন্ধে 3-8 অনুচ্ছেদে যে সকল কথা বলা হইয়াছে সেগুলি আর একবার দেখিয়া নেওয়া ভাল। কোন অক্ষে আবর্তনকালে দৃঢ়বস্তুর কৌণিক বেগ ভেক্টর $\tilde{\omega}$ ঐ অক্ষে নেওয়া হয় এবং আবর্তনের দিকের সঙ্গে উহার দক্ষিণ হস্তীয় সম্পর্ক থাকে ইহা স্পষ্টভাবে মনে রাখা দরকার। আবর্তন অক্ষের কোন বিন্দু Oকে মূল বিন্দু ধরিয়া দৃঢ়বস্তুর কোন কণার স্থান ভেক্টর যদি r হয়, তাহা হইলে ঐ কণার বেগ v-র সহিত r এবং আবর্তনের কৌণিক বেগ $\tilde{\omega}$-র সম্পর্ক

$$\mathbf{v} = \tilde{\omega} \times \mathbf{r} \tag{6-1.3}$$

3-8.3 সমীকরণে ইহা আলোচিত হইয়াছে। অন্যান্য ভেক্টরের মত $\tilde{\omega}$কেও উপাংশে ভাগ করা যায়।

আলোচনার সরলতা বা জটিলতার বিচারে দৃঢ়বস্তুর গতির আলোচনা তিন অংশে ভাগ করা যায়—(১) স্থির অক্ষে আবর্তন, (২) স্থির বিন্দু সাপেক্ষে আবর্তন ও (৩) অবাধ গতি।

দৃঢ়বস্তুর অবস্থান ও বিন্যাস প্রকাশ করিবার জন্য মোট ছয়টি নির্দেশাংকের প্রয়োজন হয়। তিনটি নির্দেশাংকে উহার যে কোন বিন্দুর (সাধারণতঃ ভরকেন্দ্রের) অবস্থান নির্দিষ্ট হয় ও অন্য তিনটি নির্দেশাংকে ঐ বিন্দু সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুটির কৌণিক বিন্যাস (orientation) নির্দিষ্ট হয়। অতএব দৃঢ়বস্তুর স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা হইবে ছয়। দৃঢ়বস্তুর একটি বিন্দু স্থির রাখিলে স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা হয় তিন, দুইটি স্থির রাখিলে হয় এক, ও সরলরেখায় অবস্থিত নয় এরূপ তিনটি বিন্দু স্থির রাখিলে কোন স্বাতন্ত্র্যই থাকে না অর্থাৎ স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা শূন্য হয়।

(১) স্থির অক্ষে আবর্তন। কোন দৃঢ়বস্তু দুইটি স্থির বিন্দু O এবং O' সাপেক্ষে ঘুরিতে থাকিলে, উহা সর্বদাই OO' অক্ষে আবর্তিত হয়। তখন গতির স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা মাত্র এক। নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু O-তে এবং Z-অক্ষ OO' রেখায় লইলে, এবং এই অক্ষে কৌণিক বেগ $\tilde{\omega}$ হইলে, O বিন্দু সাপেক্ষে বস্তুটির মোট কৌণিক ভরবেগ

$$\mathbf{L} = \Sigma \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \Sigma \mathbf{r} \times m(\tilde{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{6-1.4}$$

ভেক্টর ত্রিধা গুণনের (vector triple product) নিয়ম অনুসারে (2-7.3 অনুচ্ছেদ দেখ) ইহা

$$= \Sigma m(\mathbf{r}.\mathbf{r})\tilde{\omega} - \Sigma m(\mathbf{r}.\tilde{\omega})\,\mathbf{r} \tag{6-1.5}$$

$\tilde{\omega}$ এবং r-এর মধ্যবর্তী কোণ θ দিয়া বুঝাইলে, OO' অর্থাৎ Z-অক্ষে I-এর উপাংশ L_z-এর মান

$$L_z = \Sigma mr^2\omega - \Sigma mr^2\omega\cos^2\theta$$
$$= \Sigma m\omega r^2\sin^2\theta = \Sigma m\omega(x^2+y^2) = I\omega \tag{6-1.6}$$

$I = \Sigma m(x^2+y^2)$ রাশিটিকে OO' অক্ষ সাপেক্ষে বস্তুটির 'জাড্য-ভ্রামক' বা আবর্তন জাড্য (moment of inertia) বলে। $r^2\sin^2\theta = x^2+y^2$ রাশিটি আবর্তন অক্ষ (Z-অক্ষ) হইতে m ভরের কণার দূরত্বের বর্গ।

O এবং O' বিন্দুকে স্থির রাখিবার জন্য বাধাজনিত যে বল ক্রিয়া করে তাহাদের OO' অক্ষে কোন ভ্রামক থাকে না। অতএব এক্ষেত্রে বস্তুটির আবর্তনের সমীকরণ হয়

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = N_z \tag{6-1.7}$$

দৃঢ়বস্তুর গতি আলোচনায় এই অংশই সবচেয়ে সরল। কিন্তু এখানে ইহা আলাদা করিয়া আলোচনা করার দরকার নাই কারণ দ্বিতীয় অংশের (স্থির বিন্দু সাপেক্ষে আবর্তনের) সূত্রগুলিতে অক্ষ স্থির ধরিলেই ইহার সব কিছু জানা যাইবে। তাছাড়া, পদার্থবিজ্ঞানের সাধারণ স্নাতক স্তরের (Pass course-এর) পুস্তকে এই আলোচনা থাকে*।

কেবল স্থির অক্ষে আবর্তনের ক্ষেত্রেই রৈখিক গতির সঙ্গে আবর্তগতির সূত্রগুলির রূপগত মিল দেখা যায়।

(২) **স্থির বিন্দু সাপেক্ষে আবর্তন।** বস্তুটির গতির সময় বস্তুটি সাপেক্ষে স্থির কোন বিন্দু যদি সর্বদা স্থিরই থাকে, তাহা হইলে বস্তুটি ঐ বিন্দুগামী যে কোন অক্ষে আবর্তিত হইতে পারে। ঐ অক্ষ সময়ের সঙ্গে বদলায়; উহাকে আমরা 'চঞ্চল' বা 'সাময়িক' অক্ষ (Instantaneous axis) বলিব। লাটিমের আলের উপর উহার আবর্তন এরূপ গতির একটি সুপরিচিত উদাহরণ। গাইরোস্কোপের (gyroscope) আবর্তন আর একটি উদাহরণ: উহার স্থিরবিন্দু গাইরোস্কোপের ভরকেন্দ্র।

*উদাহরণ স্বরূপ লেখকের 'পদার্থের ধর্ম' নামক সাধারণ স্নাতক স্তরের পুস্তকের পঞ্চম পরিচ্ছেদ দেখা যাইতে পারে।

এই প্রকার গতিতে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা তিন। বস্তুটির অবস্থান উহার কোন রেখার দিক্-বিন্যাসের সাহায্যে বুঝান যায়। নির্দ্ধিধায় (uniquely) এই বিন্যাস বুঝাইতে পরস্পর নিরপেক্ষ তিনটি কোণের সাহায্য নেওয়া যায়। 6-14 অনুচ্ছেদে বর্ণিত অয়লারীয় কোণগুলি (Eulerian angles) এই-রূপ তিনটি কোণ। আমাদের আলোচনা প্রধানতঃ এই অংশে আবদ্ধ থাকিবে।

(৩) অবাধ গতি। অবাধ গতিতে দৃঢ়বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা ছয়। উহাদের তিনটি সরণের ও তিনটি ঘূর্ণনের বলিয়া ধরা যায়। এরূপ গতির যে কোন মুহূর্তে গতিটি ভরকেন্দ্রের সরণ এবং ভরকেন্দ্রগামী কোন চঞ্চল অক্ষে আবর্তনের যোগফল। সরণে 6-1.1 এবং ঘূর্ণনে 6-1.2 সমীকরণ প্রযোজ্য। টেনিস বল, ক্রিকেট বল, পৃথিবী, ছুড়িয়া-মারা লাঠি প্রভৃতির গতির কথা ভাবিলে এই প্রকার গতির সরলতম প্রকৃতি বোঝা যাইবে। আমরা এখানে কেবল পৃথিবীর আবর্তন সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করিব।

6-2. জাড্য-ভ্রামক ও জাড্য গুণফল (Moments of inertia and products of inertia)। দৃঢ়বস্তুর আবর্তন বিচারে জাড্য-ভ্রামক ও জাড্য গুণফল নামে দুইটি রাশি গুরুত্বপূর্ণ। কোন অক্ষে কোন দৃঢ়বস্তুর জাড্য-ভ্রামক বলিতে ঐ অক্ষ হইতে বস্তুর প্রতি কণার দূরত্বের বর্গ ও কণার ভরের গুণফলের সমষ্টি বুঝায়। বস্তুর কোন কণার ভর m এবং আলোচ্য অক্ষ হইতে কণার দূরত্ব d হইলে ঐ অক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক

$$I = \Sigma md^2 \tag{6-2.1}$$

এই যোগে বস্তুর সমস্ত কণাগুলি ধরিতে হইবে।

জাড্য গুণফল রাশিটি ধরা হয় দুইটি অক্ষ সাপেক্ষে। কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে m ভরের কোন কণার স্থানাংক x, y, z হইলে mxy, myz mzx রাশি তিনটি x-y, y-z এবং z-x অক্ষযুগ্ম সাপেক্ষে ঐ কণার জাড্য গুণফল। দৃঢ়বস্তুকে অনেকগুলি কণায় ভাগ করিয়া লইলে উহার

$$\text{জাড্য গুণফল} = \Sigma mxy,\ \Sigma myz,\ \Sigma mzx \tag{6-2.2}$$

এখানেও যোগে সব কণাগুলি ধরিতে হইবে।

ধরা যাক, কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে কোন দৃঢ়বস্তুর m ভরের কণার স্থানাংক x, y, z, এবং এই নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু O। x, y ও z অক্ষ হইতে ঐ কণার দূরত্ব যথাক্রমে $(y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}, (z^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ ও $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$। এই তিন

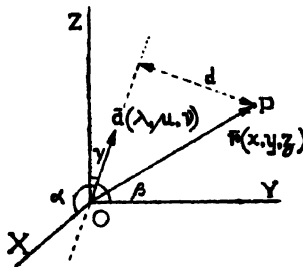
অক্ষে বস্তুটির জাড্য ভ্রামক যথাক্রমে I_{xx}. I_{yy} ও I_{zz} ধরিলে সংজ্ঞা অনুসারে

$$I_{xx}=\Sigma m(y^2+z^2)\ ;\ I_{yy}=\Sigma m(z^2+x^2)\ ;$$
$$I_{zz}=\Sigma m(x^2+y^2) \qquad (6\text{-}2.3)$$

I_{yz}, I_{zx}, I_{xy} যথাক্রমে y-z, z-x ও x-y অক্ষযুগ্মে জাড্য গুণফল হইলে সংজ্ঞা অনুসারে

$$I_{yz}=\Sigma myz\ ;\ I_{zx}=\Sigma mzx\ ;\ I_{xy}=\Sigma mxy \qquad (6\text{-}2.4)$$

দৃঢ়বস্তুর পদার্থ অবিচ্ছিন্ন (continuous) থাকিলে যোগফলের বদলে সমাকল লইতে হইবে, অর্থাৎ $I_{xx}=\int(y^2+z^2)dm$ ইত্যাদি হইবে। সমাকলন সমগ্র বস্তুটি ব্যাপিয়া হইবে।

6-3. যে কোন সমকৌণিক নির্দেশতন্ত্রে যে কোন অক্ষে জাড্য ভ্রামকের মান (Moment of inertia about any axis in an arbitraary rectangular coordinate system)। আলোচ্য অক্ষের যে কোন বিন্দুকে মূল বিন্দু ধরিয়া যেভাবে ইচ্ছা সমকৌণিক নির্দেশতন্ত্র লও (6-1 চিত্র)। মনে কর আলোচ্য অক্ষ ও নির্দেশতন্ত্রের x, y, z অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ যথাক্রমে α, β, γ এবং $\cos\alpha=\lambda$, $\cos\beta=\mu$ ও $\cos\gamma=\nu$। λ, μ, ν সংখ্যা তিনটিকে আলোচ্য অক্ষের 'দিক্-কোসাইন' (direction cosines) বলে। অক্ষে ঐকিক ভেক্টর **a** হইলে λ, μ, ν নির্দেশতন্ত্রের তিন অক্ষে **a**-র উপাংশ।

6.1 চিত্র

মনে কর বস্তুর কোন কণার ভর m এবং উহার স্থানভেক্টর $\overline{OP}=\mathbf{r}$।

গৃহীত নির্দেশতন্ত্রে r-এর উপাংশ x, y, z P-তে অবস্থিত কণার স্থানাংক। P হইতে অক্ষের দূরত্ব

$$d = |\mathbf{r} \times \mathbf{a}|.$$

x, y ও z অক্ষে $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$-র উপাংশ ভেক্টর গুণনের নিয়ম অনুসারে পাওয়া যায়।

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(\nu y - \mu z) + \mathbf{j}(\lambda z - \nu x) + \mathbf{k}(\mu x - \lambda y)$$

$$\therefore \quad d^2 = |\mathbf{r} \times \mathbf{a}|^2 = (\nu y - \mu z)^2 + (\lambda z - \nu x)^2 + (\mu x - \lambda y)^2$$

অতএব সংজ্ঞা অনুসারে আলোচ্য অক্ষে কণাসমষ্টির জাড্য ভ্রামক

$$I = \Sigma m d^2 = \Sigma m\{(\nu y - \mu z)^2 + (\lambda z - \nu x)^2 + (\mu x - \lambda y)^2\}$$
$$= \Sigma m\{(y^2 + z^2)\lambda^2 + (z^2 + x^2)\mu^2 + (x^2 + y^2)\nu^2$$
$$- 2\mu\nu yz - 2\nu\lambda zx - 2\lambda\mu xy\}$$
$$= \lambda^2 I_{xx} + \mu^2 I_{yy} + \nu^2 I_{zz} - 2\mu\nu I_{yz} - 2\nu\lambda I_{zx} - 2\lambda\mu I_{xy} \qquad (6\text{-}3.1)$$

এখানে $I_{xx}, I_{yy}, \cdots, I_{xy}$ রাশিগুলি 6.2 অনুচ্ছেদে উল্লিখিত জাড্য ভ্রামক ও জাড্য গুণফল। এই ছয়টি রাশির মান জানা থাকিলে যে কোন অক্ষে দৃঢ়বস্তুটির জাড্য ভ্রামক 6-3.1 সমীকরণের সাহায্যে বাহির করা যায়।

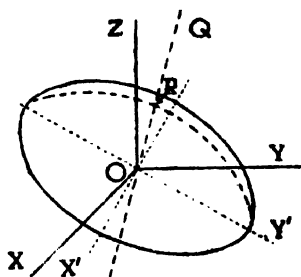
ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ (Radius of gyration)। জাড্য ভ্রামকের মাত্রা (dimensions) ML^2। অতএব I রাশিটিকে বস্তুর ভর $M(=\Sigma m)$ এবং উপযুক্ত কোন দৈর্ঘ্য k-এর বর্গের গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়, অর্থাৎ সকল ক্ষেত্রেই লেখা যায়

$$I = Mk^2 \qquad (6\text{-}3.2)$$

এই সম্পর্ক দ্বারা নির্ণীত k দৈর্ঘ্যকে আলোচ্য অক্ষে (I যে অক্ষে নেওয়া হইয়াছে) বস্তুটির 'ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ' বলে। আলোচ্য অক্ষ হইতে k দূরত্বে বস্তুর সমান ভরের কোন কণা রাখিলে ঐ অক্ষে এইকণার যে জাড্য ভ্রামক হইত, বস্তুটির জাড্য ভ্রামকও তাহাই। আলোচ্য অক্ষে বস্তুটির আবর্তনে বস্তুটির আচরণ k দূরত্বে অবস্থিত কণাটির মত। ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ' কল্পনের (concept) সাহায্যে প্রদত্ত কোন অক্ষে বিস্তার-বিশিষ্ট বস্তুর বিস্তারের কথা না ভাবিয়া উহাকে কণারূপে ধরা যায়।

6-4. জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌ (Ellipsoid of inertia) । কোন স্থির-বিন্দু O সাপেক্ষে কোন দৃঢ়বস্তু আবর্তিত হইতে থাকিলে আবর্তনের চঞ্চল অক্ষ সর্বদাই O বিন্দু দিয়া যাইবে, কিন্তু অক্ষের দিক্‌ বদলাইবে। O বিন্দুগামী এইরূপ বিভিন্ন অক্ষে বস্তুর জাড্য ভ্রামক সাধারণতঃ বিভিন্ন হইবে। I-এর বদলে $1/\sqrt{I}$ রাশিটির সাহায্যে এইরূপ বিভিন্ন অক্ষে I-এর পরিবর্তন সহজ জ্যামিতিক উপায়ে বর্ণনা করা যায়। আলোচ্য অক্ষ OQ (6.2 চিত্র) হইলে OQ বরাবর $OR = 1/\sqrt{I}$ মানের একটি ধ্রুবান্তর রেখা (radius vector) চিহ্নিত কর। এখানে I OQ অক্ষে বস্তুটির জাড্য ভ্রামক (6-3.1 সমীকরণ)। $\overline{OR}$ ভেক্টরের উপাংশ

$$x = \lambda.OR,\ y = \mu.OR,\ z = \nu.OR.$$

6-3.1 সমীকরণের উভয় দিক $OR^2 (= 1/I)$ দিয়া গুণ করিলে পাই

6.2 চিত্র

$$I.OR^2 = OR^2(\lambda^2 I_{xx} + \mu^2 I_{yy} + \nu^2 I_{zz} - 2\mu\nu I_{yz} - 2\nu\lambda I_{zx} - 2\lambda\mu I_{xy})$$

বা $$I.(1/I) = I_{xx}.(\lambda.OR)^2 + I_{yy}(\mu.OR)^2 + I_{zz}(\nu.OR)^2$$
$$- 2I_{yz}(\mu\, OR)(\nu.OR) - 2I_{zx}(\nu.OR)(\lambda\, OR)$$
$$- 2I_{xy}(\lambda.OR)(\mu.OR)$$

বা $$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy = 1 \quad (6\text{-}4.1)$$

উপরের সমীকরণ R বিন্দুর সঞ্চার পথ (locus)। ইহা দ্বিতীয় ক্রমের (second degree) একটি তল। $I = \Sigma md^2$ রাশিটি সর্বদাই পজিটিভ, এবং উহার মান শূন্য হয় না। অতএব $OR (= 1/\sqrt{I})$-এর মান সর্বদাই বাস্তব (real) এবং পজিটিভ। এই কারণে উক্ত তল বদ্ধতল (closed surface) হইবে। 6-4.1 সমীকরণ দিয়া বর্ণিত বদ্ধতল

প্রকৃতিতে ইলিপ্‌সয়ড্‌ ; উহাকে O-বিন্দু সাপেক্ষ 'জাড্য-ইলিপ্‌সয়ড্‌' বলে। O বিন্দু উহার কেন্দ্র। বস্তুটি সাপেক্ষে O বিন্দুর অবস্থান বদলাইলে অন্য ইলিপ্‌সয়ড্‌ পাওয়া যাইবে। O-র সহিত ইলিপ্‌সয়ড্‌ের উপরস্থ কোন বিন্দু R যোগ করিলে OR অক্ষে জাড্য ভ্রামকের মান পাওয়া যাইবে, কারণ $OR=1/\sqrt{I}$ বা $I=1/OR^2$।

6-5. জাড্যের মুখ্য অক্ষ ও মুখ্য ভ্রামক (Principal axes and principal moments of inertia)। প্রত্যেক ইলিপ্‌সয়ড্‌ের কেন্দ্র (O বিন্দু অর্থাৎ নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু) দিয়া পরস্পরের সমকোণে এমন তিনটি অক্ষ টানা যায় যেগুলি ইলিপ্‌সয়ড্‌ের তলকে সমকোণে ছেদ করে। এই অক্ষ তিনটিকে OX', OY' ও OZ' দ্বারা নির্দেশ করিলে, এবং এই অক্ষ সাপেক্ষে ইলিপ্‌সয়ড্‌ের উপরস্থ কোন বিন্দুর স্থানাংক x', y', z' হইলে, এই তিনটি অক্ষ দিয়া নির্ণীত নির্দেশতন্ত্রে ইলিপ্‌সয়ড্‌ের সমীকরণ হয় [বিশ্লেষণী জ্যামিতি (Analytical geometry) গ্রন্থে ইহার প্রমাণ পাওয়া যাইবে],

$$I_1x'^2+I_2y'^2+I_3z'^2=1 \qquad (6\text{-}5.1)$$

এখানে I_1, I_2, I_3 যথাক্রমে OX', OY', OZ' অক্ষে বস্তুটির জাড্য ভ্রামক। এই তিনটিকে O বিন্দুতে বস্তুটির 'মুখ্য জাড্য ভ্রামক' (Principal moments of inertia) বলে। OX', OY', OZ' অক্ষ তিনটিকে O বিন্দুতে বস্তুটির 'জাড্যের মুখ্য অক্ষ' (Principal axes of inertia) বলে।

মুখ্য অক্ষ দিয়া নির্ণীত নির্দেশতন্ত্রে আলোচ্য অক্ষের দিক্‌কোসাইন λ', μ', ν' হইলে, 6-3.1 সমীকরণের রূপ হয়

$$I=\lambda'^2I_1+\mu'^2I_2+\nu'^2I_3 \qquad (6\text{-}5.2)$$

যেহেতু $\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2=1$, অতএব I কখনও I_1, I_2, I_3 এই তিন মুখ্য জাড্য ভ্রামকের গরিষ্ঠটি অপেক্ষা বড় বা লঘিষ্ঠটি অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না। অতএব বলা যায় যে, এক মুখ্য অক্ষে জাড্য ভ্রামক সবচেয়ে বেশী এবং অন্য এক অক্ষে সবচেয়ে কম।

মুখ্য অক্ষে জাড্য গুণফলগুলির মান শূন্য হয়। পরস্পর সমকোণী দুই সমতলে যদি কোন বস্তুর প্রতিফলন প্রতিসাম্য (reflection বা mirror symmetry) থাকে (অর্থাৎ ঐরূপ সমতলের এক পাশের অংশ অন্য পাশের অংশের প্রতিফলনে গঠিত প্রতিবিম্বের মত হয়), তাহা হইলে সমতল দুটির ছেদরেখা এক মুখ্য অক্ষ। অন্য দুটি মুখ্য অক্ষ দুই সমতলে, ছেদরেখার অভিলম্বে। এরূপ ক্ষেত্রে জাড্য গুণফলগুলির মান শূন্য কেন হয়, তাহা সহজেই বোঝা যায়। প্রতিসাম্যের একটি তল x-অক্ষের অভিলম্বে

হইলে প্রত্যেক x, y, z কণার অনুরূপ $-x, y, z$ কণা থাকিবে। ইহাতে Σmxy ও $\Sigma mxz=0$ হইবে। অন্য তল y-অক্ষের অভিলম্ব হইলে প্রতি x, y, z কণার অনুরূপ $x, -y, z$ কণা থাকিবে। ইহাতে $\Sigma myz=0$ হইবে। মুখ্য অক্ষের এই সকল ধর্মের সাহায্যে প্রতিসম বস্তুর মুখ্য অক্ষ নির্ণয় করা সহজ হয়।

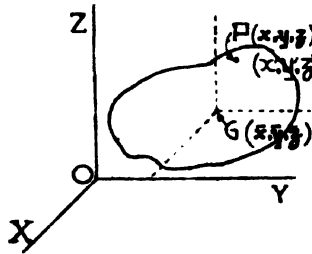
উদাহরণ স্বরূপ একটি সুষম গোলকের কথা ভাবা যাইতে পারে। উহা নিজ কেন্দ্রে আবর্তিত হইতে থাকিলে প্রতিসাম্যের জন্য কেন্দ্রগামী যে কোন অক্ষে উহার জাড্য ভ্রামক একই। অতএব এক্ষেত্রে জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ডের ধ্রুবান্তর রেখা OR $(=1/\sqrt{I})$-এর মান সব দিকেই সমান। ইহার অর্থ ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌টি এক্ষেত্রে গোলীয় তল (spherical surface)। এজন্য গোলকের পরস্পর সমকোণী যে কোন তিনটি ব্যাসকে মুখ্য অক্ষ ধরা যায়।

আলোচ্য আবর্তন বিন্দু O গোলকের কেন্দ্রে না হইয়া গোলকের পৃষ্ঠে থাকিলে, গোলকের কেন্দ্র এবং O যোগ করিয়া যে অক্ষ ঐ অক্ষে পরস্পর সমকোণী দুই সমতলে বস্তুটির প্রতিফলন প্রতিসাম্য থাকিবে। অতএব এই অক্ষ একটি মুখ্য অক্ষ। অন্য দুই মুখ্য অক্ষ O বিন্দুতে ইহার লম্বতলে থাকিবে। প্রতিসাম্যের জন্য এই তলের সকল অক্ষে জাড্য ভ্রামক সমান। অতএব ইহাদের যে কোন সমকোণী দুইটিকে অন্য দুই মুখ্য অক্ষ বলিয়া ধরা যায়। এক্ষেত্রে জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ডের আকার হইবে দীর্ঘাক্ষ উপগোলক (prolate spheroid), অর্থাৎ কোন উপবৃত্তকে তাহার দীর্ঘ অক্ষে ঘুরাইয়া দিলে যে তল হয় তাহাই। ইলিপ্‌সয়্‌ডের কেন্দ্র হইবে গোলকের পৃষ্ঠস্থ O বিন্দু এবং উহার দীর্ঘ অক্ষ O বিন্দুগামী ব্যাস বরাবর হইবে, কারণ এই অক্ষে জাড্য ভ্রামক সবচেয়ে কম।

6-7 অনুচ্ছেদে কয়েকটি ক্ষেত্রে জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌ নির্ণয় ও তাহার প্রয়োগ দেখান হইয়াছে।

6-6. (ক) সমান্তরাল অক্ষ ও (খ) অভিলম্ব অক্ষের সূত্র (Parallel and perpendicular axes theorems)।

(ক) মনে কর কোন স্বেচ্ছিক মূলবিন্দু O বিশিষ্ট সমকোণী ত্রিমাত্রিক নির্দেশতন্ত্রে M ভরের কোন দৃঢ়বস্তুর ভরকেন্দ্র Gর স্থানাংক $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ (6.3 চিত্র)। একই নির্দেশতন্ত্রে বস্তুর P বিন্দুতে অবস্থিত m ভরের কোন কণার স্থানাংক x, y, z। G বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া আগের

নির্দেশতন্ত্রের অক্ষের সমান্তরালে তিনটি অক্ষ কল্পনা কর। এই নূতন নির্দেশতন্ত্রে m কণার স্থানাংক যেন x', y', z'। তাহা হইলে

6.3 চিত্র

$$x=\bar{x}+x',\ y=\bar{y}+y',\ z=\bar{z}+z'.$$

O বিন্দুগামী X-অক্ষে বস্তুটির জাড্য ভ্রামক

$$I=\Sigma m(y^2+z^2)=\Sigma m\{(\bar{y}+y')^2+(\bar{z}+z')^2\}$$
$$=\Sigma m(\bar{y}^2+\bar{z}^2)+\Sigma m'y'^2+z'^2)+2\Sigma m\bar{y}y'+2\Sigma m\bar{z}z'$$
$$=M(\bar{y}^2+\bar{z}^2)+I_G+2\bar{y}\Sigma my'+2\bar{z}\Sigma mz'$$

এখানে $I_G=\Sigma m(y'^2+z'^2)$ রাশিটি OX-অক্ষের সমান্তরাল G বিন্দুগামী GX' অক্ষে বস্তুটির জাড্য ভ্রামক। ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞা অনুসারে (4-1.4 সমীকরণ) $\Sigma my'=\Sigma mz'=0$। অতএব

$$I=I_G+M(\bar{y}^2+\bar{z}^2)=I_G+Ma^2 \qquad (6\text{-}6.1)$$

$a(=\bar{y}^2+\bar{z}^2)^{1/2}$ রাশিটি OX অক্ষ হইতে বস্তুটির ভরকেন্দ্র Gর দূরত্ব।

6-6.1 সমীকরণে দেখা যায়, যে কোন অক্ষ (OX-অক্ষ) সাপেক্ষে কোন বস্তুর জাড্য ভ্রামক (I) বস্তুর ভরকেন্দ্রগামী সমান্তরাল (GX') অক্ষে উহার জাড্য ভ্রামক (I_G) এবং দুই অক্ষের দূরত্বের বর্গের (a^2-এর) সহিত বস্তুর ভরের (M-এর) গুণফলের (Ma^2-এর) যোগফলের সমান। ইহাকে **জাড্য ভ্রামকের সমান্তরাল অক্ষের সূত্র** বলে।

বস্তুর ভর কণারূপে উহার ভরকেন্দ্রে সংহত থাকিলে আলোচ্য অক্ষে এই জাড্য ভ্রামক হইত Ma^2।

সমান্তরাল অক্ষে জাড্য গুণফলের সম্পর্ক কি হইবে তাহা $I_{yz}=\Sigma myz$ দিয়া হিসাব করা যায়।

$$I_{yz}=\Sigma myz=\Sigma m(\bar{y}+y')(\bar{z}+z')$$
$$=\Sigma m\bar{y}\bar{z}+\Sigma my'z'+\bar{z}\Sigma my'+\bar{y}\Sigma mz'-M\bar{y}\bar{z}+I_{y'z'}.$$
$$(6\text{-}6.2)$$

কারণ $\Sigma my'=\Sigma mz'=0$।

এখানে $I_{y'z'}=\Sigma my'z'$ G বিন্দুগামী Gy' ও Gz' অক্ষযুগ্ম সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য গুণফল বুঝায়। 6-6.2 সমীকরণ **জাড্য গুণফল সংক্রান্ত সমান্তরাল অক্ষের সূত্র** সংকেতে প্রকাশ করে। $M\bar{y}\bar{z}$ রাশিটি বস্তুর ভর-কেন্দ্রে অবস্থিত সমভর কণার প্রদত্ত অক্ষযুগ্মে জাড্য গুণফল। $I_{y'z'}$ রাশিটি প্রদত্ত অক্ষযুগ্মের সমান্তরাল ভরকেন্দ্রগামী অক্ষযুগ্মে বস্তুটির জাড্য গুণফল।

(খ) মনে কর বস্তুর কণাগুলি একই সমতলে অবস্থিত, অর্থাৎ বস্তুটি সমতল পাত (lamina)। এক্ষেত্রে $z=0$ ধরিলে জাড্য ভ্রামক ও জাড্য গুণফলের সংজ্ঞা অনুসারে পাই (6.2 অনুচ্ছেদ দেখ)।

$$I_{xx}=\Sigma my^2,\ I_{yy}=\Sigma mx^2,\ I_{zz}=\Sigma m(x^2+y^2)$$
$$I_{yz}=0,\ I_{zx}=0,\ I_{xy}=\Sigma mxy$$

অতএব
$$I_{zz}=I_{xx}+I_{yy} \qquad (6\text{-}6.3)$$

ইহার অর্থ, পাতের সমতলে দুইটি সমকোণী অক্ষ $(x,\ y)$ লইলে এই দুই অক্ষে পাতের জাড্য ভ্রামকের যোগফল $(I_{xx}+I_{yy})$ ঐ দুই অক্ষের ছেদবিন্দুগামী অভিলম্ব z-অক্ষে পাতের জাড্য ভ্রামকের (I_{zz}) সমান হইবে। ইহাকে পাতের জাড্য ভ্রামক সংক্রান্ত **অভিলম্ব অক্ষের সূত্র** বলে।

6-7. কয়েকটি প্রতিসমবস্তুর জাড্য ভ্রামক (Moments of inertia of some symmetrical bodies)। বস্তু সমসত্ত্ব (homogeneous) পদার্থে গঠিত ও সরল জ্যামিতিক আকারের হইলে অনেক ক্ষেত্রে সমাকলনের সাহায্যে উহার জাড্য ভ্রামক সহজেই হিসাব করা যায়। নিচে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

Z

6.4 চিত্র

(১) সোজা, সরু দণ্ড (Thin straight rod)।

(ক) অক্ষ ভরকেন্দ্রে, দণ্ডের অভিলম্বে। ভরকেন্দ্র Gকে মূলবিন্দু, দণ্ডের সমান্তরালে x-অক্ষ ও আলোচ্য অক্ষকে z-অক্ষ ধরা যাক (6.4 চিত্র)।

G হইতে x ও $x+\delta x$ দূরত্বের মধ্যবর্তী δx অংশকে z-অক্ষ হইতে x দূরত্বে অবস্থিত বলিয়া ধরা যায়। দণ্ডের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর ρ হইলে এই অংশের ভর $\rho\delta x$ এবং x-অক্ষে উহার জাড্য ভ্রামক $x^2\rho\delta x$। সমস্ত দণ্ডকে এইরূপ ছোট ছোট টুকরা করিয়া উহাদের সবগুলির জাড্য ভ্রামক যোগ করিলে মোট জাড্য ভ্রামক পাওয়া যাইবে। দণ্ডের দৈর্ঘ্য l হইলে নির্ণেয় জাড্য ভ্রামক

$$I = \sum_{x=-l/2}^{x=l/2} x^2\rho\delta x$$

δxকে ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর করিলে $\delta x \to 0$ সীমায় উপরের যোগফল একটি নিশ্চিত সমাকলে (definite integral) পরিণত হয়। তখন

$$I = \int_{x=-l/2}^{x=l/2} x^2\rho dx = \rho \left| \frac{x^3}{3} \right|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\rho l^3}{12} = \frac{1}{12}Ml^2 \qquad (6\text{-}7.1)$$

কারণ $\rho l = M$ দণ্ডের ভর।

এক্ষেত্রে ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ (6-3.2 সমীকরণ) $k = l/\sqrt{12}$।

(খ) অক্ষ দণ্ডের এক প্রান্তে, দণ্ডের অভিলম্বে। মূলবিন্দু দণ্ডের অক্ষীয় প্রান্তে লইয়া আগের মত যুক্তির সাহায্যে পাই

$$I = \int_{x=0}^{x=l} x^2\rho dx = \tfrac{1}{3}Ml^2 \qquad (6\text{-}7.2)$$

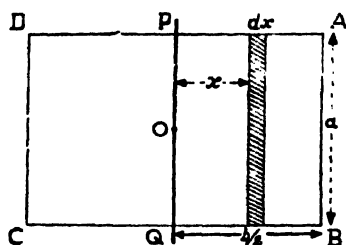
ইহা আগের মানের চারগুণ। এখানে $k = l/\sqrt{3}$। সমান্তরাল অক্ষের সূত্র প্রয়োগ করিয়াও এই ফল পাওয়া যাইত, কারণ প্রান্তবিন্দু A হইলে
I (অর্থাৎ I_A) $= I_G + M\ (AG)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2$।

অক্ষ দণ্ডের অন্য কোন বিন্দুগামী হইলে নিশ্চিত সমাকলের সীমা ঠিক মত লইয়া, বা সমান্তরাল অক্ষের সূত্র প্রয়োগ করিয়া জাড্য ভ্রামক বাহির করা যায়।

প্রশ্ন। (1) এক কিলোগ্রাম ওজনের এক মিটার লম্বা একটি সুষম দণ্ডের ঘূর্ণাক্ষ উহার এক প্রান্ত হইতে ভিতরের দিকে 20 cm দূরে দণ্ডের অভিলম্বে। এই অক্ষে জাড্য ভ্রামক কত? [উত্তর: 0·1733 kg m²]

(2) কোন সরু সুষম দণ্ডের ঘূর্ণাক্ষ উহার ভরকেন্দ্রগামী এবং দণ্ডের সহিত α কোণে অবস্থিত। এই অক্ষে জাড্য ভ্রামক কত? [উত্তর: $(1/12)\ Ml^2\sin^2\alpha$]

(২) আয়ত পাত (Rectangular lamina)

(ক) অক্ষ এক বাহুর সমান্তরাল ও কেন্দ্রগ। 6.5 চিত্রের $ABCD$ আলোচ্য পাত এবং O উহার কেন্দ্র। PQ অক্ষ AB বাহুর সমান্তরাল ও কেন্দ্রগ। $AB=a$ ও $BC=b$। PQর সমান্তরালে পাতটিকে অনেক-গুলি সরু সরু ফালিতে ভাগ কর। PQ হইতে x দূরত্বে চওড়ায় dx একখানা ফালি নাও। পাতের ভর M হইলে এই ফালির ভর $(M/b)dx$।

6.5 চিত্র

ফালির সব কণাগুলিই PQ হইতে সমান দূরত্বে। অতএব PQ অক্ষে এই ফালির জাড্য ভ্রামক $(M/b)x^2dx$। $x=-b/2$ হইতে $x=b/2$ পর্যন্ত এইরূপ রাশিগুলি যোগ করিলে নির্ণেয় জাড্য ভ্রামক I পাওয়া যাইবে। অতএব

$$I=\int_{-b/2}^{b/2}(M/b)x^2dx=\frac{M}{b}\cdot\frac{b^3}{12}=\frac{1}{12}Mb^2 \qquad (6\text{-}7.3)$$

অক্ষ PQ BC বাহুর সমান্তরাল হইলে অনুরূপে পাওয়া যাইত

$$I=\frac{1}{12}Ma^2$$

(খ) অক্ষ পাতের কিনারায়। অক্ষ CD কিনারায় থাকিলে আগের মত পাতকে ফালিতে ভাগ করিয়া ফালিগুলির জাড্য ভ্রামক $x=0$ হইতে $x=b$ পর্যন্ত যোগ করিতে হইবে। অতএব এক্ষেত্রে

$$I=\int_0^b(M/b)x^2dx=\tfrac{1}{3}Mb^2 \qquad (6\text{-}7.4)$$

অক্ষ BC কিনারায় হইলে $I = \frac{1}{3}Ma^2$ হইত। সমান্তরাল অক্ষের সূত্র প্রয়োগ করিয়াও এই ফলগুলি পাওয়া যাইত।

অক্ষ পাতের কোন কিনারার সমান্তরালে অন্য কোথাও থাকিলে নিশ্চিত সমাকলের যথাযথ সীমা লইয়া বা সমান্তরাল অক্ষের সূত্রের সাহায্যে জাড্য ভ্রামক পাওয়া যাইবে।

প্রশ্ন। 20 cm×10 cm মাপের 240 g ওজনের একখানা পাতের আবর্তন অক্ষ উহার হ্রস্ব কিনারা হইতে 5 cm দূরে পাতের সমতলে। এই অক্ষে জাড্য ভ্রামক কত? [উত্তর : 14000 g cm²]

(গ) অক্ষ কেন্দ্রগ ও পাতের তলের অভিলম্বে। পাতের অভিলম্ব অক্ষ সম্বন্ধীয় সূত্রের সাহায্যে ইহা পাওয়া যায়। পাতের কিনারার সমান্তরাল ও কেন্দ্রগ দুই সমকোণী অক্ষে জাড্য ভ্রামক উপরের (ক) অংশ অনুসারে $(^1/_{12})Ma^2$ ও $(^1/_{12})Mb^2$। অতএব অভিলম্ব অক্ষের সূত্র অনুসারে নির্ণেয় জাড্য ভ্রামক

$$I = (1/12)M\,(a^2 + b^2) \qquad (6\text{-}7.5)$$

এই অক্ষ সমান্তরালে অন্য কোথাও সরাইয়া লইলে সমান্তরাল অক্ষের সূত্র প্রয়োগে নূতন অক্ষে জাড্য ভ্রামক পাওয়া যাইবে। অক্ষ পাতের এক কোণায় পাতের তলের অভিলম্বে হইলে পাতের কেন্দ্র O হইতে এই অক্ষের দূরত্ব $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ বলিয়া নির্ণেয়

$$I = (1/12)\,M\,(a^2 + b^2) + (1/4)M\,(a^2 + b^2)$$
$$= (1/3)\,M\,(a^2 + b^2) \qquad (6\text{-}7.6)$$

পাতের এক কোণে দুই কিনারার দুই অক্ষে জাড্য ভ্রামক $(\frac{1}{3})\,Ma^2$ ও $(\frac{1}{3})\,Mb^2$। এই দুই অক্ষ সমকোণী। ঐ বিন্দুতে অভিলম্ব অক্ষের সূত্র প্রয়োগ করিয়াও নির্ণেয় রাশি পাওয়া যাইত।

(ঘ) পাতের কেন্দ্রে জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌। উপরে আলোচিত পাতের কেন্দ্রগ তিনটি অক্ষেই পাত প্রতিসম। অতএব এই তিনটি অক্ষে পাতের জাড্য গুণফলের মান শূন্য হইবে, এবং জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ডের মুখ্য অক্ষের ধর্মানুসারে এই অক্ষ তিনটিই ইলিপ্‌সয়্‌ডের মুখ্য অক্ষ হইবে। এই তিন অক্ষে $I_1 = (^1/_{12})Mb^2$, $I_2 = (^1/_{12})Ma^2$ ও $I_3 = (^1/_{12})M(a^2 + b^2)$। I_3 সবচেয়ে বড় বলিয়া উল্লম্ব অক্ষে পাতের কেন্দ্র O হইতে ইলিপ্‌সয়্‌ডের দূরত্ব সবচেয়ে কম হইবে।

পাতের কেন্দ্রে জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌ জানা থাকায় কেন্দ্রগামী অন্য যে কোন অক্ষে পাতের জাড্য ভ্রামক জানা যাইতে পারে। অক্ষের দিক্‌

কোসাইন λ, μ, ν হইলে 6-5.2 সমীকরণ প্রয়োগে ইহা পাওয়া যায়। উদাহরণ স্বরূপ পাতের তলে উহার যে কোন কর্ণে (diagonal) জাড্য ভ্রামক I_d কত হইবে বাহির করা যাক। 1 অক্ষ a কিনারার সমান্তরাল ও 2 অক্ষ bর সমান্তরাল হইলে

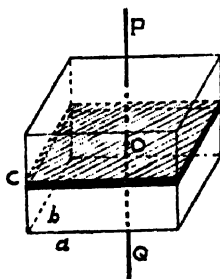
$$\lambda = \frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}, \mu = \frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ এবং } \nu = 0$$

অতএব নির্ণেয় জাড্য ভ্রামক

$$I_d = \lambda^2 I_1 + \mu^2 I_2 + \nu^2 I_3 = \frac{a^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{12} M b^2 + \frac{b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{12} M a^2$$

$$= \frac{M}{6} \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2} \qquad (6\text{-}7.7)$$

(ঙ) আয়তাকার বস্তু (Rectangular parallelepiped)। বস্তুটি পাত না হইয়া উহার বেধ (thickness) থাকিলে, কেন্দ্রগামী ও কিনারার সমান্তরাল কোন অক্ষে জাড্য ভ্রামক উপরের (গ) অংশের সাহায্যে পাওয়া যায়। ধরা যাক অক্ষ PQ বস্তুর বেধ c-র সমান্তরাল (6.6 চিত্র) এবং অন্য বাহু দুইটি a ও b। বস্তুটিকে PQ অক্ষের অভিলম্বে অনেকগুলি সরু সরু আয়ত পাতে ভাগ কর। PQ অক্ষে ইহার যে কোন পাতের জাড্য ভ্রামক = পাতের ভর $\times (a^2+b^2)/12$। অতএব বস্তুটির ভর M হইলে PQ অক্ষে উহার মোট জাড্য ভ্রামক

$$I_c = (1/12)\, M\, (a^2+b^2) \qquad (6\text{-}7.8)$$

6.6 চিত্র

অনুরূপে দেখা যায় কেন্দ্রগ a-র সমান্তরাল অক্ষে জাড্য ভ্রামক I_a এবং b-র সমান্তরাল কেন্দ্রগ অক্ষে জাড্য ভ্রামক I_b যথাক্রমে

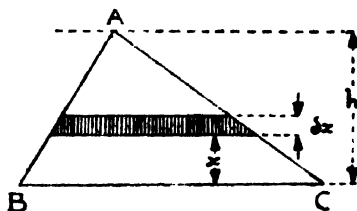
$$I_a = (1/12)\, M\, (b^2+c^2) \text{ এবং } I_b = (1/12)\, M\, (c^2+a^2)$$

এই তিন অক্ষেই বস্তুটি প্রতিসম বলিয়া ঐ তিন অক্ষই কেন্দ্র O বিন্দুতে জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ডের মুখ্য অক্ষ। ইলিপ্‌সয়্‌ডের তিন মুখ্য অক্ষের দৈর্ঘ্যের অনুপাত $(b^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} : (c^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} : (a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$

প্রশ্ন। (1) সমসত্ত্ব ঘনকের কেন্দ্রে জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌ গোলাকার ইহা প্রমাণ কর। ঘনকের বিপরীত কোনা যোগকারী রেখায় (space diagonal) জাড্য ভ্রামক কত ?

(2) a, b, c বাহুবিশিষ্ট আয়তাকার সমসত্ত্ব বস্তুর বিপরীত কোনা যোগকারী রেখায় উহার জাড্য ভ্রামক বাহির কর।

[সংকেত : ইহার মুখ্য জাড্য ভ্রামক উপরে দেওয়া আছে। a, b, c অক্ষ সাপেক্ষে আলোচ্য অক্ষের দিক্‌কোসাইন যথাক্রমে a/d, b/d ও c/d এবং $d^2=a^2+b^2+c^2$]

(৩) ত্রিভুজাকার পাত ; অক্ষ যে কোন বাহু। M ভরের সুষম ত্রিভুজাকার পাত ABCর (6.7 চিত্র) BC অক্ষে জাড্য ভ্রামক বাহির

6.7 চিত্র

করিতে ত্রিভুজকে BCর সমান্তরালে সরু সরু ফালিতে ভাগ কর। BC হইতে x দূরত্বে δx প্রস্থের ফালি ধরা যাক। BC বাহুর দৈর্ঘ্য a হইলে চিত্র হইতে দেখা যাইবে এই ফালির দৈর্ঘ্য $a(h-x)/h$। পাতের একক বর্গক্ষেত্রের ভর σ হইলে ফালির ভর $\sigma a(h-x)\delta x/h$। BC অক্ষ হইতে ফালির সব কণাই x দূরত্বে। অতএব ফালির জাড্য ভ্রামক $\sigma a(h-x)x^2\delta x/h$ এবং সম্পূর্ণ পাতের জাড্য ভ্রামক

$$I=\frac{\sigma a}{h}\int_0^h (hx^2-x^3)dx$$

$$=\frac{1}{12}\sigma a h^3=\frac{1}{6}Mh^2 \qquad (6\text{-}7.9)$$

(8) গোল পাত।

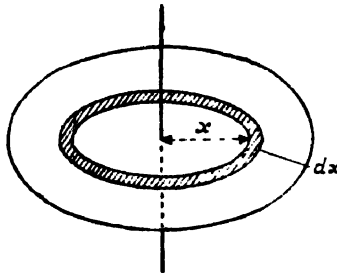
(ক) পাত সরু বলয় ; অক্ষ বলয়ের কেন্দ্রে বলয়তলের অভি-

লম্বে। এরূপ বলয়ের সব কণাগুলি অক্ষ হইতে একই দূরত্বে আছে ধরা যায়। বলয়ের ভর M এবং ব্যাসার্ধ R হইলে

$$I = \Sigma mR^2 = MR^2 \tag{6-7.10}$$

কোন ব্যাস বরাবর জাড্য ভ্রামক I_d পাইতে পাতের অভিলম্ব অক্ষের সূত্র প্রয়োগ করা যায়। প্রতিসাম্যের জন্য সকল ব্যাসে I_d সমান। উপরের I পাতের যে কোন দুই অভিলম্ব ব্যাসে জাড্য ভ্রামকের যোগফলের সমান। অতএব

$$2I_d = I \text{ বা } I_d = \tfrac{1}{2}MR^2 \tag{6-7.11}$$

(খ) গোল পাত ; অক্ষ উহার কেন্দ্রে পাতের অভিলম্বে। পাতের ভর M ও ব্যাসার্ধ R হইলে উহার প্রতি বর্গক্ষেত্রের ভর $\sigma = M/\pi R^2$। পাতকে অনেকগুলি সমকেন্দ্রিক বলয়ে ভাগ করিয়া লও। উহার যে কোন একটির ব্যাসার্ধ r এবং $r+dr$ ধরিলে (6.8 চিত্র) এই বলয়ের ভর

6.8 চিত্র

$dm = 2\pi r dr \sigma$ এবং প্রদত্ত অক্ষে ইহার জাড্য ভ্রামক $2\pi\sigma r^3 dr$। সবগুলি বলয়ের জাড্য ভ্রামক যোগ করিলে নির্ণেয় I পাওয়া যাইবে। অতএব

$$I = 2\pi\sigma \int^R r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \tfrac{1}{2}MR^2 \tag{6-7.12}$$

অভিলম্ব অক্ষের সূত্র প্রয়োগে দেখা যায় যে কোন ব্যাসে জাড্য ভ্রামক I_d ইহার অর্ধেক, অর্থাৎ

$$I_d = \tfrac{1}{4}MR^2 \tag{6-7.13}$$

অক্ষ উপরের কোন অক্ষের সমান্তরাল ও অন্যত্র হইলে সমান্তরাল অক্ষের সূত্র প্রয়োগে নির্ণেয় রাশি পাওয়া যাইবে। অক্ষ পাতের অভিলম্বে উহার

কিনারা দিয়া গেলে $I = \frac{1}{4}MR^2 + MR^2 = \frac{5}{4}MR^2$ হইবে। অক্ষ পাতের কোন স্পর্শক বরাবর হইলে $I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$।

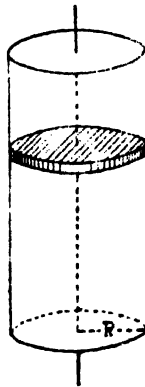
(গ) চওড়া বলয়। বলয়ের ভিতরের ব্যাসার্ধ R_1 ও বাহিরের ব্যাসার্ধ R_2 হইলে (খ) অংশের যুক্তি প্রয়োগ করিয়া পাওয়া যায়

$$I = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\sigma r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{R_2^4 - R_1^4}{4}$$

পাতের ভর M হইলে $\sigma = M/\pi(R_2^2 - R_1^2)$। অতএব

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \qquad (6\text{-}7.14)$$

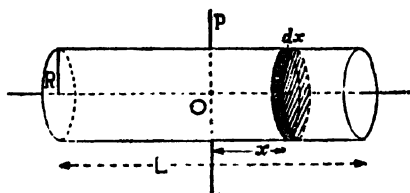
যে কোন ব্যাসে জাড্য ভ্রামক ইহার অর্ধেক।

(৫) বেলন। (ক) অক্ষ বেলনের অক্ষ। বেলনের অক্ষের অভিলম্বে বেলনকে অনেকগুলি সরু সরু পাতে ভাগ কর। যে কোন পাতের ব্যাসার্ধ R বেলনের ব্যাসার্ধ (6.9 চিত্র)। পাতের ভর dm ধরিলে প্রদত্ত পাতের জাড্য ভ্রামক $\frac{1}{2}R^2dm$। সম্পূর্ণ বেলনের জাড্য ভ্রামক I এই সকল পাতগুলির জাড্য ভ্রামকের যোগফলের সমান। বেলনের ভর M হইলে

6.9 চিত্র

$$I = \frac{1}{2}\Sigma R^2 dm = \frac{1}{2}MR^2 \qquad (6\text{-}7.15)$$

বস্তুটি নলের মত হইলে এবং উহার ভিতরের ব্যাসার্ধ R_1 ও বাহিরের ব্যাসার্ধ R_2 হইলে অনুরূপে পাওয়া যায়

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \qquad (6\text{-}7.16)$$

(খ) অক্ষ বেলনের কেন্দ্রগ ও উহার অক্ষের অভিলম্বে। 6.10 চিত্রের PQ অক্ষে বেলনের জাড্য ভ্রামক চাই। বেলনকে উহার নিজ অক্ষের অভিলম্বে অনেকগুলি সরু সরু গোল পাতে ভাগ কর। এই রকম যে কোন একখানা পাতের বেধ dx এবং PQ হইতে উহার দূরত্ব x হইলে, পাতের ভর $m=\pi R^2 dx.\rho$ (ρ = বেলনের ঘনত্ব $=M/\pi R^2 L$)। PQর সমান্তরাল ব্যাসে পাতের জাড্য ভ্রামক $mR^2/4$ (6-7.13 সমীকরণ)

6.10 চিত্র

এবং PQ অক্ষে ভ্রামক $mR^2/4+mx^2$। নির্ণেয় I PQ অক্ষে সব পাত-গুলির জাড্য ভ্রামকের যোগফল। বেলনের দৈর্ঘ্য L হইলে

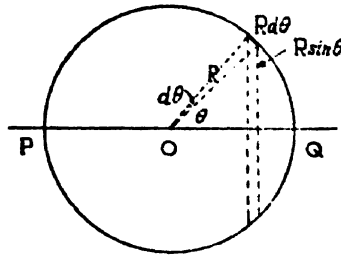
$$I=\Sigma(mR^2/4+mx^2)=\int_{-L/2}^{L/2}\left(x^2+\frac{R^2}{4}\right)\pi R^2\rho.dx$$

$$=\pi R^2\rho\left(\frac{L^3}{12}+\frac{R^2L}{4}\right)=M\left(\frac{L^2}{12}+\frac{R^2}{4}\right) \qquad (6\text{-}7.17)$$

প্রশ্ন। সুষম, সমসত্ত্ব বেলনের কেন্দ্রস্থ জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌ বর্ণনা কর। বেলনের ব্যাসে ও দৈর্ঘ্যে কি সম্পর্ক থাকিলে জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌ আকারে গোলীয় হইবে ? [উত্তর : $R^2=L^2/3$]

(৬) গোলক। (ক) গোলীয় পাত বা খোলক (Spherical shell) ; অক্ষ যে কোন ব্যাস। খোলকের ভর M এবং ব্যাসার্ধ R হইলে উহার ক্ষেত্রফল $4\pi R^2$ ও প্রতি একক বর্গক্ষেত্রের ভর $\sigma=M/4\pi R^2$। যে কোন ব্যাস PQর অভিলম্বে খোলককে অনেকগুলি সরু সরু বলয়ে ভাগ কর (6.11 চিত্র)। এই রকম কোন বলয়ের ব্যাসার্ধ $R\sin\theta$ হইলে চওড়ায় উহা $Rd\theta$ এবং উহার ভর $2\pi R\sin\theta.Rd\theta.\sigma$ $=2\pi\sigma R^2\sin\theta d\theta$। 6-7.10 সমীকরণ অনুসারে PQ অক্ষে এই বলয়ের জাড্য ভ্রামক=উহার ভর×(ব্যাসার্ধ)²

$$=2\pi\sigma R^2\sin\theta\, d\theta\times(R\sin\theta)^2=2\pi\sigma R^4\sin^3\theta\, d\theta$$

$\theta=0$ হইতে $\theta=\pi$ পর্যন্ত এই রকম রাশিগুলি যোগ করিলে নির্ণেয় I পাওয়া যাইবে। অতএব

6.11 চিত্র

$$I=2\pi\,\sigma\,R^4\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta=2\pi\,\sigma\,R^4.\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}\,MR^2$$

(6-7.18)

(খ) নিরেট গোলক; অক্ষ যে কোন ব্যাস। গোলককে সরু সরু বহু সংখ্যক সমকেন্দ্রিক খোলকে ভাগ কর। উহার কোনটির ব্যাস r ও $r+dr$ ধর। ρ গোলকের ঘনত্ব হইলে এই খোলকের ভর $m=4\pi r^2 dr.\rho$। উপরের সমীকরণ অনুসারে যে কোন ব্যাসে এই খোলকের জাড্য ভ্রামক

$dI=\frac{2}{3}$ খোলকের ভর$\times$(ব্যাসার্ধ)$^2=(8\pi/3)\rho r^4 dr$।

অতএব নির্ণেয় জাড্য ভ্রামক

$$I=\Sigma\,dI=\frac{8\pi\rho}{3}\int_0^R r^4 dr=\frac{8\pi\rho}{3}.\ \frac{R^5}{5}=\frac{2}{5}\ MR^2 \qquad (6\text{-}7.19)$$

এখানে গোলকের ভর $M=(4/3)\pi R^3\rho$।

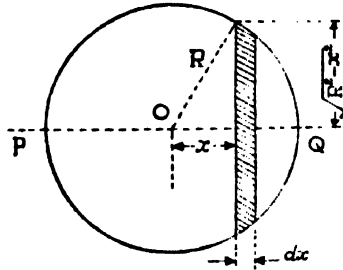
গোলক ফাঁপা এবং উহার ভিতরের ব্যাসার্ধ R_1 ও বাহিরের ব্যাসার্ধ R_2 হইলে অনুরূপে পাইতাম

$$I=\Sigma\,dI=\frac{8\pi\rho}{3}\int_{R_1}^{R_2} r^4 dr=\frac{8\pi\rho}{15}\,(R_2{}^5-R_1{}^5)$$

$$=\frac{2}{5}M\ \frac{R_2{}^5-R_1{}^5}{R_2{}^3-R_1{}^3} \qquad (6\text{-}7.20)$$

এখানে $M=(4/3)\,\pi\rho\,(R_2{}^3-R_1{}^3)=$ গোলকের ভর।

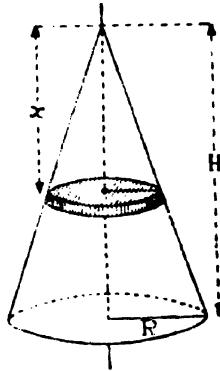
অক্ষ কোন স্পর্শক বরাবর হইলে সমান্তরাল অক্ষের সূত্র প্রয়োগে নির্ণেয় রাশি পাওয়া যাইবে। নিরেট গোলকের ক্ষেত্রে ইহা $\frac{2}{5}MR^2+MR^2 = (7/5)MR^2$।

প্রশ্ন। নিরেট গোলককে কোন ব্যাসের অভিলম্বে অনেকগুলি সরু সরু পাতলা গোল পাতে ভাগ করিয়া ঐ ব্যাসে ইহার যে কোন পাতের জাড্য ভ্রামক dI বাহির কর, এবং এই dI গুলি যোগ করিয়া ঐ ব্যাসে গোলকের I নির্ণয় কর (6.12 চিত্র দেখ)।

6.12 চিত্র

[সংকেত : কেন্দ্র হইতে x দূরত্বে পাতের ব্যাসার্ধ $\sqrt{R^2-x^2}$। $dI=\frac{1}{2}\pi\rho\,(R^2-x^2)^2dx$। $x=-R$ হইতে $x=R$ পর্যন্ত এইরূপ রাশিগুলি যোগ করিলে I পাওয়া যাইবে।]

(৭) লম্ববৃত্তীয় শঙ্কু (Right circular cone)। পরস্পর ছেদী দুই সরলরেখার একটিকে স্থির রাখিয়া অন্যটি উহার চারিদিকে পুরা এক পাক ঘুরাইয়া দিলে যে তল উৎপন্ন হয় তাহাকে শঙ্কু বলে। স্থির রেখাটি শঙ্কুর অক্ষ। অক্ষের অভিলম্ব কোন তল দিয়া শঙ্কুকে সীমাবদ্ধ করিলে এই তল বৃত্তাকার হইবে। এইরূপ শঙ্কুকে লম্ব-বৃত্তীয় শঙ্কু বলে। শঙ্কুর অক্ষ ও জনক রেখার মধ্যবর্তী কোণ α হইলে শঙ্কুর শীর্ষকোণ হইবে 2α। শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ R ও শঙ্কুর উচ্চতা H হইলে $\tan\alpha=R/H$। শঙ্কুর আয়তন $\frac{1}{3}\pi R^2H$।

(ক) অক্ষ শঙ্কুর অক্ষ। শঙ্কুর অক্ষের অভিলম্বে উহাকে অনেকগুলি সরু সরু পাতলা গোল পাতে ভাগ কর (6.13 চিত্র)। শঙ্কুর শীর্ষকে মূলবিন্দু ধরিয়া উহার অক্ষকে x অক্ষ মনে কর। শীর্ষ হইতে x দূরত্বের পাতের ব্যাসার্ধ Rx/H। শঙ্কুর ঘনত্ব ρ ও পাতের বেধ dx হইলে পাতের ভর $=\pi(Rx/H)^2dx.\rho$। আলোচ্য অক্ষে পাতের জাড্য ভ্রামক $dI=$

$\frac{1}{2}$ ভর×(ব্যাসার্ধ)$^2 = \frac{1}{2}\pi\rho\ (Rx/H)^4\ dx$ । $x=0$ হইতে $x=H$ পর্যন্ত এই রাশিগুলি যোগ করিলে নির্ণেয় জাড্য ভ্রামক I_a পাওয়া যাইবে ।

6.13 চিত্র

$$I_a = \tfrac{1}{2}\pi\rho \left(\frac{R}{H}\right)^4 \int^H x^4 dx = \frac{\pi}{10}\rho\ R^4 H = \frac{3}{10}\ MR^2$$

(6-7.21)

(খ) অক্ষ শঙ্কুর শীর্ষে ও শঙ্কুর অক্ষের অভিলম্বে। শঙ্কুকে আগের মত গোল পাতে ভাগ করিয়া লইলে পাতের নিজ ব্যাসে জাড্য ভ্রামক $\frac{1}{4}$ ভর×(ব্যাসার্ধ)$^2 = \frac{1}{4}\pi\rho\ (Rx/H)^4 dx$ । আলোচ্য অক্ষে পাতের জাড্য ভ্রামক dI সমান্তরাল অক্ষের সূত্র প্রয়োগে পাওয়া যায় ।

$$dI = \tfrac{1}{4}\pi\rho\ (Rx/H)^4 dx + \pi\rho\ (Rx/H)^2 dx.x^2$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi\rho\ (R/H)^2\ (R^2/H^2 + 4)\ x^4 dx$$

$x=0$ হইতে $x=H$ পর্যন্ত এই রাশিগুলি যোগ করিলে নির্ণেয় জাড্য ভ্রামক I_a পাওয়া যায় ।

$$I_a = \tfrac{1}{4}\pi\rho\ (R/H)^2\ (R^2/H^2 + 4)\ H^5/5$$
$$= \tfrac{3}{20}\ M\ (R^2 + 4H^2) = I_a\ (\tfrac{1}{2} + 2H^2/R^2) \qquad (6\text{-}7.22)$$

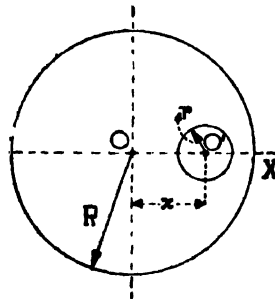
জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌। প্রতিসাম্যের জন্য শঙ্কুর শীর্ষবিন্দুতে শঙ্কুর অক্ষ এবং এই অক্ষের অভিলম্বে যে কোন দুইটি সমকোণী অক্ষ—এই তিনটি অক্ষ ঐ বিন্দুতে শঙ্কুর জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ডের মুখ্য অক্ষ। জাড্য ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌ শীর্ষবিন্দুতে উপগোলক (spheroid)। মুখ্য জাড্য ভ্রামক $I_1 = I_2 = I_a$ এবং $I_3 = I_a$ ।

শঙ্কুর জনক রেখায় জাড্য ভ্রামক কত হইবে ? জনক রেখা ও মুখ্য অক্ষ 3-র তলে 1-অক্ষ লইলে 2-অক্ষের সহিত জনক রেখা 90° কোণে থাকিবে। শঙ্কুর জনক রেখার দৈর্ঘ্য $L=(H^2+R^2)^{\frac{1}{2}}$, এবং ইহার দিক কোসাইন $\lambda=R/L$, $\mu=0$, $\nu=H/L$। অতএব 6-5.2 সমীকরণ অনুসারে নির্ণেয় জাড্য ভ্রামক

$$I_g=(R^2/L^2)\,I_a+(H^2/L^2)\,I_a$$

প্রশ্ন। প্রমাণ কর যে লম্ববৃত্তীয় শঙ্কুর উচ্চতা উহার ভূমির ব্যাসের অর্ধেক হইলে উহার শীর্ষবিন্দুতে জাড্য ইলিপ্‌সয়ড্‌ গোলীয় (spherical) হইবে।

(৮) বস্তুর এক অংশের জাড্য ভ্রামক। কোন বস্তুর এক অংশের জাড্য ভ্রামক পাইতে সম্পূর্ণ বস্তুটির জাড্য ভ্রামক হইতে অন্য অংশের জাড্য ভ্রামক বাদ দিলে আলোচ্য অংশের জাড্য ভ্রামক পাওয়া যাইবে। সবগুলি ভ্রামকই অবশ্য প্রদত্ত অক্ষে লইতে হইবে। নিচে দুটি ক্ষেত্রে ইহার প্রয়োগ দেখান হইল।

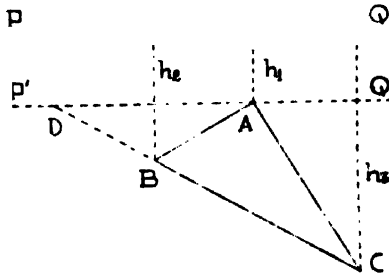
(ক) ফাঁপা গোলক। ধরা যাক ρ ঘনত্ব ও R ব্যাসার্ধের নিরেট একটি গোলকের r ব্যাসার্ধের গোল একটি অংশ নাই, এবং দুই অংশের কেন্দ্রের দূরত্ব $OO'=x$ (6.14 চিত্র)। O বিন্দুগামী এবং x-এর অভিলম্ব কোন অক্ষে ফাঁপা গোলকের জাড্য ভ্রামক কত হইবে ?

6.14 চিত্র

নিরেট গোলকের ভর $M=(4/3)\,\pi R^3\rho$। ফাঁপা অংশ ভরা থাকিলে উহার ভর হইত $m=(4/3)\,\pi r^3\rho$। প্রদত্ত অক্ষ বড় গোলকের ব্যাস। ঐ অক্ষে নিরেট গোলকের জাড্য ভ্রামক $I_s=\frac{2}{5}\,MR^2$। ফাঁপা অংশ নিরেট হইলে দত্ত অক্ষে ইহার জাড্য ভ্রামক হইতে $I_h=\frac{2}{5}\,mr^2+mx^2$। অতএব নির্ণেয় জাড্য ভ্রামক

$$I=I_s-I_h=\frac{2}{5}\,(MR^2-mr^2)-mx^2$$

প্রশ্ন। 6.14 চিত্রের OO' অক্ষে ফাঁপা গোলকের জাড্য ভ্রামক কত ? [উত্তর : $(2/5)(MR^2 - mr^2)$] ।

(খ) ত্রিভুজের সমতলে যে কোন অক্ষে উহার জাড্য ভ্রামক। 6.15 চিত্রের PQ অক্ষে M ভরের সুষম ত্রিভুজাকার পাত ABCর জাড্য ভ্রামক বাহির করিতে হইবে। Aর মধ্য দিয়া PQর সমান্তরাল $P'Q'$ রেখা টান। CB বর্ধিত করিয়া $P'Q'$কে D বিন্দুতে ছেদ কর। PQ অক্ষ হইতে A, B ও C বিন্দুর দূরত্ব যথাক্রমে h_1, h_2 ও h_3 ধর। $P'Q'$ হইতে ইহাদের দূরত্ব হইবে $0, h_2 - h_1$ ও $h_3 - h_1$।

মনে কর ACB ত্রিভুজের সঙ্গে ABD অংশটিও থাকিয়া একই রকম সুষম ত্রিভুজাকার পাত ACD গঠন করিয়াছে। ACD অংশের ভর M_1 ও ABD অংশের ভর M_2 ধরা যাক। তাহা হইলে

6.15 চিত্র

$$M_1 - M_2 = M \text{ এবং } M_1/M_2 = (h_3 - h_1)/(h_2 - h_1)$$

কারণ উভয় ত্রিভুজের ভূমি AD। অতএব

$$M_1 = M(h_3 - h_1)/(h_3 - h_2)$$

$$\text{এবং } M_2 = M(h_2 - h_1)/(h_3 - h_2)$$

6-7.9 সমীকরণ অনুসারে $P'Q'$ অক্ষে ACD ও ABD ত্রিভুজের জাড্য ভ্রামক যথাক্রমে

$$I'_{M_1} = \tfrac{1}{6}M_1(h_3 - h_1)^2 = \tfrac{1}{6}M\frac{(h_3 - h_1)^3}{h_3 - h_2}$$

$$I'_{M_2} = \tfrac{1}{6}M_2(h_2 - h_1)^2 = \tfrac{1}{6}M\frac{(h_2 - h_1)^3}{h_3 - h_2}.$$

$P'Q'$ অক্ষে ABC ত্রিভুজের জাড্য ভ্রামক I'_M ইহাদের প্রভেদ।

$$I'_M = I'_{M_1} - I'_{M_2}$$
$$= \tfrac{1}{6}M\{3h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_2h_3 - 3h_3h_1 - 3h_1h_2\}$$

PQ অক্ষে *ABC*-র জাড্য ভ্রামক পাইতে প্রথমে আমরা *ABC*র ভরকেন্দ্র *G*-গামী *P'Q'*-এর সমান্তরাল অক্ষে *ABC*-র জাড্য ভ্রামক $(I'_M)_G$ বাহির করিতে পারি। পরে সমান্তরাল অক্ষের সূত্র আবার প্রয়োগ করিয়া *PQ* অক্ষে নির্ণেয় জাড্য ভ্রামক *I* পাইব। *P'Q'* অক্ষ হইতে *G*-র দূরত্ব $\frac{1}{3}(h_2+h_3-2h_1)$। *PQ* অক্ষ হইতে *G*-র দূরত্ব $\frac{1}{3}(h_1+h_2+h_3)$। অতএব

$$(I'_M)_G = I'_M - \tfrac{1}{9} M (h_2+h_3-2h_1)^2$$

এবং $$I_M = (I'_M)_G + \tfrac{1}{9} M (h_1+h_2+h_3)^2$$
$$= I'_M + \tfrac{1}{9} M \{(h_1+h_2+h_3)^2 - (h_2+h_3-2h_1)^2\}$$

সরল করিলে পাই

$$I_M = \tfrac{1}{6} M\{h_1^2+h_2^2+h_3^2+h_2h_3+h_3h_1+h_1h_2\}$$
$$= \tfrac{1}{3} M[\{(h_2+h_3)/2\}^2 + [(h_3+h_1)/2]^2 + [(h_1+h_2)/2]^2\}$$

ABC ত্রিভুজের প্রতি বাহুর মধ্য বিন্দুতে $\frac{1}{3}M$ ভরের একটি করিয়া কণা থাকিলে *PQ* অক্ষে উহাদের জাড্য ভ্রামক I_M এর সমান হইত, কারণ *PQ* হইতে এই কণাগুলির দূরত্ব $\frac{1}{2}(h_2+h_3)$, $\frac{1}{2}(h_3+h_1)$, $\frac{1}{2}(h_1+h_2)$। কাজেই জাড্য ভ্রামক আলোচনায় ত্রিভুজকে তিন বাহুর মধ্য বিন্দুতে রাখা $\frac{1}{3}M$ ভরের তিনটি কণার সমান বলিয়া মনে করা যায়। 6-7.9 সমীকরণে লব্ধ ফল এই উক্তির সঙ্গে মিলাইয়া দেখা যাইতে পারে।

6-8. স্থির বিন্দু সাপেক্ষে ঘূরন্ত দৃঢ়বস্তুর মোট কৌণিক ভরবেগ (Total angular momentum of a rigid body rotating about a point)। স্থির বিন্দু *O* সাপেক্ষে বস্তুর *m* ভরের কোন কণার স্থান ভেক্টর **r** এবং বেগ ভেক্টর **v** ধরা যাক। তাহা হইলে *O* বিন্দু সাপেক্ষে বস্তুটির মোট কৌণিক ভরবেগ

$$\mathbf{L} = \Sigma(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})$$

আলোচ্য মুহূর্তে বস্তুটির কৌণিক বেগ ভেক্টর $\tilde{\omega}$ হইলে, $\mathbf{v} = \tilde{\omega} \times \mathbf{r}$ বলিয়া

$$\mathbf{L} = \Sigma\, \mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \Sigma\, [\mathbf{r} \times (m\, \tilde{\omega} \times \mathbf{r})]$$

ভেক্টর ত্রিধা গুণনের নিয়ম অনুসারে (2-7.3 অনুচ্ছেদ) ইহা হইতে পাই

$$\mathbf{L} = \Sigma m\, [\,(\mathbf{r}.\mathbf{r})\, \tilde{\omega} - (\mathbf{r}.\tilde{\omega})\, \mathbf{r}\,] \qquad (6\text{-}8.1)$$

সমকোণী নির্দেশতন্ত্রে ভেক্টরগুলির উপাংশ নিচের মত ধরা যাক :

$\mathbf{L}=[L_x, L_y, L_z]$; $\mathbf{r}=[x, y, z]$; $\tilde{\omega}=[\omega_x, \omega_y, \omega_z]$.

তাহা হইলে

$$\mathbf{r}.\mathbf{r}=x^2+y^2+z^2 \text{ এবং } \mathbf{r}.\tilde{\omega}=x\omega_x+y\omega_y+z\omega_z$$

6-8.1 সমীকরণের উভয় পাশে যে কোন অক্ষে উপাংশের মান সমান হইবে। অতএব

$$\begin{aligned} L_x &= \Sigma m\,(x^2+y^2+z^2)\,\omega_x - \Sigma m\,(x\omega_x+y\omega_y+z\omega_z)\,x \\ &= \omega_x \Sigma m\,(y^2+z^2) - \omega_y \Sigma mxy - \omega_z \Sigma mzx \\ &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \end{aligned} \qquad (6\text{-}8.2a)$$

অনুরূপে $L_y = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z$ (6-8.2b)

ও $L_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$ (6-8.2c)

এখানে $I_{xx}, \cdots, I_{xy}, \cdots$, রাশিগুলির মান 6-2.3 ও 6-2.4 সমীকরণে যেমন দেওয়া আছে সেইরকম। I_{xx} I_{yy}, I_{zz} যথাক্রমে x, y ও z-অক্ষে জাড্য ভ্রামক। I_{xy} রাশিটি জাড্য গুণফল এবং স্পষ্টতঃই $I_{xy}=I_{yx}$। I_{yz} ও I_{zx} সম্বন্ধেও ইহা প্রযোজ্য।

6-8.2 সমীকরণগুলি হইতে দেখা যায় L-র অক্ষ সাধারণতঃ $\tilde{\omega}$র অক্ষের, অর্থাৎ চঞ্চল অক্ষের, সমান্তরাল নয়, কারণ $\omega_y=\omega_z=0$ হইলেও L_y এবং L_zএর মান শূন্য হয় না। জাড্যের মুখ্য অক্ষে জাড্য গুণফল $I_{xy}=I_{yz}=I_{zx}=0$ হয়। কেবল এই ক্ষেত্রেই L ও $\tilde{\omega}$র অক্ষ মিলিয়া যায়। জাড্যের মুখ্য অক্ষ তিনটি 1, 2, 3 সংখ্যা দিয়া বুঝাইলে 6-8.2 সমীকরণগুলি হইতে পাই

$$L_1=I_1\omega_1,\ L_2=I_2\omega_2,\ L_3=I_3\omega_3 \qquad (6\text{-}8.3)$$

$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ তিনটি মুখ্য অক্ষে ঐকিক ভেক্টর হইলে

$$\mathbf{L}=I_1\omega_1\mathbf{a}_1+I_2\omega_2\mathbf{a}_2+I_3\omega_3\mathbf{a}_3 \qquad (6\text{-}8.4)$$

6-8.2 সমীকরণ তিনটি সংক্ষেপে নিচের মত লেখা যায় :

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}8.5)$$

এই রূপকে মেইট্রিক্স্ রূপ (matrix form) বলে। ডানদিকের I_{ij} $(i, j=x, y, z)$ রাশি নয়টির এই 'সজ্জা'কে (array) জাড্য-মেইট্রিক্স্ (inertia matrix) বলে। L ও $\tilde{\omega}$ ভেক্টর দুটি এই নয়টি রাশি দিয়া সম্পর্কিত।

দুইটি ভেক্টর উপরোক্ত রূপ নয়টি রাশি দিয়া সম্পর্কিত হইলে ঐ রাশি নয়টিকে একটি দ্বিতীয় জাতির টেনসরের উপাংশ (components of a tensor of rank two) বলে (2-12 অনুচ্ছেদ দেখ)।

দ্বিতীয় জাতির কোন টেনসর T-র উপাংশগুলি সাধারণতঃ T_{ij} রূপে লেখা হয়। ($i=x, y, z$; $j=x, y, z$; $x, y\ z$ অক্ষের বদলে 1, 2, 3 লেখার প্রথাও প্রচলিত)। এ ক্ষেত্রে জাড্য টেনসর (Inertia tensor) L ও $\bar{\omega}$ ভেক্টর দুইটির সম্পর্ক দেখায় বলিয়া লেখা যায় $\mathbf{L}=\mathbf{I}\bar{\omega}$; এখানে I জাড্য টেনসর।

$$\mathbf{I}=\begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

6-2 অনুচ্ছেদে দেওয়া I_{xy} রাশিগুলির সংজ্ঞা একটু বদলাইলে অর্থাৎ $I_{xy}=-\Sigma mxy$ ইত্যাদি লিখিলে জাড্য টেনসরের রূপের সঙ্গে 6-8.5 সমীকরণের অভিন্নতা স্পষ্ট দেখা যায়। ইহার জন্য I_{ij} রাশিগুলির সংজ্ঞা নিচের মত লেখা চলে :

$$I_{ij}=\sum_{i,j} m(r^2\delta_{ij}-x_i x_j) \tag{6-8.6}$$

সংজ্ঞায় $r-m$ ভরের কণার স্থান ভেক্টর। δ_{ij} সংকেতটিকে 'ক্রনেকার ডেল্টা' (Kronecker delta) বলে। $i=j$ হইলে $\delta_{ij}=1$; $i\neq j$ হইলে $\delta_{ij}=0$। (তত্ত্বীয় পদার্থবিদ্যায় (Theoretical Physics-এ) ক্রনেকার ডেল্টার সঙ্গে পাঠকের ঘন পরিচয় হইবে।)

$I_{ij}=I_{ji}$ হইলে I টেনসরকে প্রতিসম (symmetrical) বলা হয়। জাড্য টেনসর প্রতিসম। অক্ষের দিক্ বদলাইলে উপাংশগুলির মানও বদলায়।]

6-9. দৃঢ়বস্তুর আবর্তনের গতিশক্তি (Kinetic energy of a rotating rigid body)। মনে কর কোন দৃঢ়বস্তু কোন অক্ষে আবর্তিত হইতেছে এবং এই অক্ষে উহার সাময়িক কৌণিক বেগ $\tilde{\omega}$। অক্ষস্থ কোন O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরা যাক। P বিন্দুতে অবস্থিত m ভরের কণার স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}\equiv\overline{OP}$ হইলে উহার বেগ $\mathbf{v}=\tilde{\omega}\times\mathbf{r}$ এবং গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\tilde{\omega}\times\mathbf{r})^2$। অতএব সমগ্র বস্তুটির মোট গতিশক্তি

$$T=\tfrac{1}{2}\Sigma m(\tilde{\omega}\times\mathbf{r})^2 \tag{6-9.1}$$

O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া ত্রিমাত্রিক সমকৌণিক নির্দেশতন্ত্র (x, y, z) কল্পনা করা যাক। ইহার তিন অক্ষে $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ঐকিক ভেক্টর, এবং এই অক্ষ তিনটি সাপেক্ষে আবর্তন অক্ষের (অর্থাৎ $\tilde{\omega}$ র অভিমুখের) দিক্ কোসাইন λ, μ, ν হইলে

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \text{ এবং } \tilde{\omega} = \omega(\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k})\text{ ।}$$

অতএব

$$\tilde{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \lambda\omega & \mu\omega & \nu\omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

দেখা যায়, $\tilde{\omega} \times \mathbf{r}$-এর তিনটি উপাংশ $\omega(\mu z - \nu y)$, $\omega(\nu x - \lambda z)$ এবং $\omega(\lambda y - \mu x)$ । অতএব

$(\tilde{\omega} \times \mathbf{r})^2 = (\tilde{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\tilde{\omega} \times \mathbf{r}) = \omega^2 (\mu z - \nu y)^2 + \omega^2 (\nu x - \lambda z)^2 + \omega^2(\lambda y - \mu x)^2$ ।

$$\therefore \quad T = \tfrac{1}{2} \Sigma m (\tilde{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \tfrac{1}{2}\omega^2 \Sigma m \{ (\mu z - \nu y)^2 + (\nu x - \lambda z)^2 + (\lambda y - \mu x)^2 \}$$

$$= \tfrac{1}{2}\omega^2\{\lambda^2 \Sigma m (y^2 + z^2) + \mu^2 \Sigma m (z^2 + x^2) + \nu^2 \Sigma m (x^2 + y^2) - 2\mu\nu \Sigma myz - 2\nu\lambda \Sigma mzx - 2\lambda\mu \Sigma mxy\}$$

$$= \tfrac{1}{2} \omega^2 (\lambda^2 I_{xx} + \mu^2 I_{yy} + \nu^2 I_{zz} - 2\mu\nu I_{yz} - 2\nu\lambda I_{zx} - 2\lambda\mu I_{xy}) \qquad (6\text{-}9.2)$$

6-3-1 সমীকরণ অনুসারে উপরের ডানদিকের ব্রাকেটের ভিতরের অংশ আবর্তন অক্ষে বস্তুটির জাড্য ভ্রামক I । অতএব

$$T = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \qquad (6\text{-}9.3)$$

কল্পিত নির্দেশতন্ত্রে $\tilde{\omega}$র উপাংশগুলি $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ও লেখা যাইত। ইহা করিলে λ, μ, ν ব্যবহারের দরকার হইত না, কারণ $\omega_x = \lambda\omega$, $\omega_y = \mu\omega$, $\omega_z = \nu\omega$ । 6-9.2 সমীকরণে $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ব্যবহার করিলে পাই

$$T = \tfrac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 - 2I_{yz} \omega_y\omega_z - 2I_{zx} \omega_z\omega_x - 2 I_{xy} \omega_x \omega_y) \qquad (6\text{-}9.4)$$

কল্পিত নির্দেশতন্ত্রের অক্ষগুলি O বিন্দুতে বস্তুটির জাড্যের মুখ্য অক্ষে লইলে জাড্য গুণফলগুলির মান শূন্যে পরিণত হইত। তখন পাইতাম

$$T=\tfrac{1}{2}(I_1\omega_1{}^2+I_2\omega_2{}^2+I_3\omega_3{}^2) \qquad (6\text{-}9.5)$$

I_1, I_2, I_3 O বিন্দুতে মুখ্য জাড্য ভ্রামক ও ω_1, ω_2, ω_3 জাড্যের মুখ্য অক্ষে $\tilde{\omega}$র উপাংশ।

6-8.3 সমীকরণে পাইয়াছি জাড্যের মুখ্য অক্ষে $L_1=I_1\omega_1$, $L_2=I_2\omega_2$, $L_3=I_3\omega_3$। এই মানগুলি 6-9.5 সমীকরণে বসাইলে পাই

$$T=\tfrac{1}{2}(L_1\omega_1+L_2\omega_2+L_3\omega_3)=\tfrac{1}{2}\,\mathbf{L}.\,\tilde{\omega} \qquad (6\text{-}9.6)$$

তিনটি ভেক্টরের স্কেলার ত্রিধা গুণনের (scalar triple product; 2-7.2 অনুচ্ছেদ দেখ) সাহায্য লইলে $\mathbf{L}.\,\tilde{\omega}=2T$ সম্পর্কটি খুব সংক্ষেপে প্রমাণ করা যায়। কারণ

$$\mathbf{L}.\,\tilde{\omega}=\Sigma\,(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})\,.\,\tilde{\omega}.$$

সমীকরণের ডানদিক একটি স্কেলার ত্রিধা গুণফল। এই গুণনের নিয়ম অনুসারে ভেক্টর তিনটির চক্রীয় ক্রম (cyclic order) না বদলাইয়া ক্রস (×) ও ডট (●) বিনিময় করা যায়। অতএব

$$\mathbf{L}.\tilde{\omega}=\Sigma\,(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})\,.\,\tilde{\omega}=\Sigma\,(\tilde{\omega}\times\mathbf{r})\,.\,m\mathbf{v}=\Sigma\,\mathbf{v}.m\mathbf{v}$$
$$=\Sigma\,mv^2=2T.$$

6-10. অয়লারের গতীয় সমীকরণ (Euler's dynamical equations)। এই সমীকরণগুলির সাহায্যে কোন স্থিরবিন্দু সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুর আবর্তন আলোচনা করা যায়। মনে কর আলোচ্য O বিন্দু বস্তুটি সাপেক্ষে এবং কোন স্থির নির্দেশতন্ত্র সাপেক্ষেও স্থির। O বিন্দুতে বস্তুটির জাড্যের মুখ্য অক্ষ তিনটিকে OX, OY, OZ বলা যাক। বস্তু সাপেক্ষে এই অক্ষ তিনটি স্থির এবং ইহারা পরস্পর সমকোণে। বস্তুটির সঙ্গে ইহারা ঘোরে। এই তিন অক্ষে $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ যথাক্রমে ঐকিক ভেক্টর। আবর্তনের চঞ্চল অক্ষ সর্বদাই O বিন্দু দিয়া যায়। ধরা যাক চঞ্চল অক্ষে কৌণিক বেগ $\tilde{\omega}$, এবং জাড্যের মুখ্য অক্ষে ইহাদের উপাংশ ω_1, ω_2, ω_3।

6-8.3 সমীকরণে দেখান হইয়াছে এ অবস্থায় বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ

$$\mathbf{L}=I_1\omega_1\mathbf{a}_1+I_2\omega_2\mathbf{a}_2+I_3\omega_3\mathbf{a}_3 \qquad (6\text{-}10.1)$$

I_1, I_2, I_3 O বিন্দু সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য ভ্রামক। 5-3.7 সমীকরণে দেখান হইয়াছে যে O বিন্দুতে স্থির নির্দেশতন্ত্র সাপেক্ষে কোন ভেক্টরের সময়ের সহিত পরিবর্তনের হার d/dt দ্বারা, এবং বস্তুটির সহিত আবর্তনশীল জাড্যের মুখ্য অক্ষ দ্বারা গঠিত নির্দেশতন্ত্র সাপেক্ষে সময়ের সহিত পরিবর্তনের হার d'/dt দ্বারা বুঝাইলে এই দুই হারে সম্পর্ক হয়

$$\frac{d}{dt}=\frac{d'}{dt}+\tilde{\omega}\times$$

বস্তুটির মোট কৌণিক বেগ L-এ এই সম্পর্ক প্রয়োগ করিলে পাই

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\frac{d'\mathbf{L}}{dt}+\tilde{\omega}\times\mathbf{L} \tag{6-10.2}$$

$d'\omega_1/dt=\dot{\omega}_1$ ইত্যাদি লিখিলে 6-10.1 সমীকরণ হইতে পাই

$$\frac{d'\mathbf{L}}{dt}=I_1\dot{\omega}_1\mathbf{a}_1+I_2\dot{\omega}_2\mathbf{a}_2+I_3\dot{\omega}_3\mathbf{a}_3.$$

তাছাড়া

$$\tilde{\omega}\times\mathbf{L}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ L_1 & L_2 & L_3\end{vmatrix}$$

$$=(\omega_2L_3-\omega_3L_2)\mathbf{a}_1+(\omega_3L_1-\omega_1L_3)\mathbf{a}_2+(\omega_1L_2-\omega_2L_1)\mathbf{a}_3.$$

5-1.2 সমীকরণ অনুসারে (বা 4-5.2 সমীকরণও বলা যাইতে পারে)

$$d\mathbf{L}/dt=\mathbf{M}=M_1\mathbf{a}_1+M_2\mathbf{a}_2+M_3\mathbf{a}_3$$

এখানে M দ্বারা বাহ্যবলগুলির O বিন্দু সাপেক্ষ ভ্রামক বুঝায়। জাড্যের মুখ্য অক্ষে ইহার উপাংশ M_1, M_2, M_3। অতএব 6-10.2 সমীকরণে এই সকল মান বসাইলে পাই

$$M_1\mathbf{a}_1+M_2\mathbf{a}_2+M_3\mathbf{a}_3=I_1\dot{\omega}_1\mathbf{a}_1+I_2\dot{\omega}_2\mathbf{a}_2+I_3\dot{\omega}_3\mathbf{a}_3$$
$$+(\omega_2L_3-\omega_3L_2)\mathbf{a}_1+(\omega_3L_1-\omega_1L_3)\mathbf{a}_2+(\omega_1L_2-\omega_1L_1)\mathbf{a}_3$$

সমীকরণের দুই পাশে $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$-র গুণকগুলি (coefficients) সমান হইবে। অতএব

$$M_1=I_1\dot{\omega}_1+(\omega_2L_3-\omega_3L_2)\qquad\text{ইত্যাদি।}$$

$L_1 = I_1\omega_1$, $L_2 = I_2\omega_2$, $L_3 = I_3\omega_3$ বলিয়া তিন উপাংশের তিনটি সমীকরণ হইয়া দাঁড়ায়

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3 \\ M_2 &= I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1 \\ M_3 &= I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}10.3)$$

এই সমীকরণ তিনটিকে **অয়লারের গতীয় সমীকরণ** বলে। মনে রাখা দরকার ইহাদের সংশ্লিষ্ট 1, 2, 3 অক্ষ O বিন্দুতে বস্তুর জাড্যের তিনটি মুখ্য অক্ষ এবং এই অক্ষগুলি বস্তুটি সাপেক্ষে স্থির থাকিয়া উহার সহিত $\vec{\omega}$ বেগে ঘোরে। O বিন্দু বস্তুর স্থির ভরকেন্দ্র বা বস্তুটি সাপেক্ষে স্থির অন্য কোন বিন্দুও হইতে পারে।

সমীকরণগুলির সর্বক্ষেত্রীয় সমাধান (general solution) বাহির করা যায় না। কিন্তু নিম্নোক্ত দুইটি বিশেষ ক্ষেত্রে ইহাদের সাহায্যে গতি-সংক্রান্ত অনেক তথ্য পাওয়া যায়ঃ

(১) বাহ্যবলের ভ্রামকের মান শূন্য ($M = 0$), এবং

(২) জাড্যের দুইটি মুখ্য ভ্রামকের মান সমান (ধর $I_1 = I_2$), এবং স্থিরবিন্দু জাড্যের তৃতীয় মুখ্য অক্ষে (অর্থাৎ I_3-র অক্ষে) অবস্থিত।

আমরা কেবল প্রথম ক্ষেত্রে অয়লারের সমীকরণের প্রয়োগ দেখাইব।

6.11. বাহ্যবলের প্রভাব মুক্ত দৃঢ়বস্তুর আবর্তন (Rigid body rotation under no forces)। বাহ্যবল ক্রিয়া না করিলে বস্তুর ভরকেন্দ্র স্থির থাকিবে বা সুষম বেগে সরলরেখায় চলিতে থাকিবে। আবর্তনের উপর এরূপ সরণের কোন ক্রিয়া নাই বলিয়া আমরা আবর্তন আলোচনায় ভরকেন্দ্র স্থির বলিয়া ধরিতে পারি। এখানে এই ভরকেন্দ্রই গত অনুচ্ছেদের আলোচনার স্থিরবিন্দু O। বাহ্যবল না থাকায় $M_1 = M_2 = M_3 = 0$। অতএব এক্ষেত্রে অয়লারের সমীকরণগুলি নিচের রূপ নেয়ঃ

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3 &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1 &= 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}11.1)$$

(i) বলমুক্ত আবর্তনে আবর্তনের গতিশক্তি স্থিরমান। উপরের

সমীকরণ তিনটিকে যথাক্রমে ω_1, ω_2 ও ω_3 দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলগুলি যোগ করিলে পাই

$$I_1\dot{\omega}_1\omega_1 + I_2\dot{\omega}_2\omega_2 + I_3\dot{\omega}_3\omega_3 = 0$$

$$\text{বা}\quad \frac{d}{dt}\left(I_1\omega_1{}^2 + I_2\omega_2{}^2 + I_3\omega_3{}^2\right) = 0$$

অতএব $I_1\omega_1{}^2 + I_2\omega_2{}^2 + I_3\omega_3{}^2 =$ অচর রাশি $= 2T$ (6-9.5 সমীকরণ)। দেখা যায় বলমুক্ত আবর্তনে আবর্তনের গতিশক্তি স্থির থাকে। ইহা এমনিতে বোঝা যায়, কারণ বল ক্রিয়া না করিলে গতিশক্তির পরিবর্তন হয় না।

6-5.1 সমীকরণ $(I_1x'^2 + I_2y'^2 + I_3z'^2 = 1)$-এর সহিত উপরের $I_1\omega_1{}^2 + I_2\omega_2{}^2 + I_3\omega_3{}^2 = 2\,T$ সমীকরণ তুলনা করিলে দেখা যাইবে উভয়ের রূপ এক। দ্বিতীয় সমীকরণে x, y, z রাশিগুলির বদলে $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ আছে এবং উহার T স্থির পজিটিভ রাশি। অতএব দ্বিতীয় সমীকরণও একটি ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌ বোঝায়। ইহাকে **'মোমেণ্টাল ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌' (Momental ellipsoid)** বা **'পয়ঁসোর ইলিপ্‌সয়্‌ড্‌' (Poinsot's ellipsoid)** বলে। ইলিপ্‌সয়্‌ডের কেন্দ্র হইতে উহার পৃষ্ঠের যে কোন বিন্দু পর্যন্ত টানা ধ্রুবান্তর রেখা বা দূরক (radius vector) কৌণিক বেগ $\bar{\omega}$-এর যে মান নির্দেশ করে তাহাতে বস্তুটির গতিশক্তি (T) ও কৌণিক ভরবেগ (L) একই থাকে।

(ii) বলমুক্ত আবর্তনে কৌণিক ভরবেগ অচর থাকে। 6-11.1 সমীকরণগুলিকে যথাক্রমে $I_1\omega_1$, $I_2\omega_2$ ও $I_3\omega_3$ দিয়া গুণ করিয়া গুণফলগুলি যোগ করিলে পাই

$$I_1{}^2\dot{\omega}_1\omega_1 + I_2{}^2\dot{\omega}_2\omega_2 + I_3{}^2\dot{\omega}_3\omega_3 = 0$$

$$\text{বা}\quad \frac{d}{dt}\left(I_1{}^2\omega_1{}^2 + I_2{}^2\omega_2{}^2 + I_3{}^2\omega_3{}^2\right) = 0$$

অর্থাৎ $I_1{}^2\omega_1{}^2 + I_2{}^2\omega_2{}^2 + I_3{}^2\omega_3{}^2 = L_1{}^2 + L_2{}^2 + L_3{}^2 = L^2$ অচর রাশি।

$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$ সম্পর্কটি হইতে ইহা আরও সহজে পাওয়া যায়। বাহ্য বল না থাকায় $\mathbf{M} = 0$; অতএব $\mathbf{L}$ স্থির রাশি। উহার মান ও দিক্‌ উভয়ই অচর।

(iii) বলমুক্ত আবর্তনে চঞ্চল অক্ষের সঞ্চার পথ (Locus of instantaneous axis)। এই সঞ্চার পথ দুইভাবে বর্ণনা করা যায়—(১) ত্রিমাত্রিক দেশে (বা স্থির নির্দেশতন্ত্রে), এবং (২) বস্তুটি সাপেক্ষে।

বলমুক্ত আবর্তনে আবর্তনের গতিশক্তি T এবং কৌণিক ভরবেগের মান L স্থির থাকিলেও আবর্তনের চঞ্চল অক্ষ সময়ের সহিত বদলাইতে পারে। L-এর অভিমুখে ঐকিক ভেক্টর $\mathbf{l}_1$ হইলে $\tilde{\omega}.\mathbf{L}=2T$ সমীকরণ হইতে দেখা যায়

$$\tilde{\omega}.\mathbf{l}_1=2T/L=\text{স্থির রাশি}$$

অর্থাৎ L-এর অভিমুখে $\tilde{\omega}$-র অভিক্ষেপ স্থিরমান। আবর্তন O বিন্দু সাপেক্ষে এবং $\overline{OP}=\tilde{\omega}$ হইলে উপরের সম্পর্ক হইতে দেখা যায় P বিন্দু সর্বদাই l-এর অভিলম্ব কোন অচর তলে থাকিবে। অতএব বলা চলে যে $\tilde{\omega}$র অভিমুখের, অর্থাৎ আবর্তনের চঞ্চল অক্ষের, সঞ্চার পথ O বিন্দুকে শীর্ষে রাখিয়া শঙ্কুর আকারে হইবে। $\tilde{\omega}$র মান স্থির থাকিলে উপরোক্ত অচর তলে শঙ্কুর ছেদ বৃত্তাকার হইবে। এই শঙ্কুকে 'দেশশঙ্কু' (space cone) বলে এবং ইহার অক্ষ কৌণিক ভরবেগের অচর অভিমুখ।

বস্তুটি সাপেক্ষে চঞ্চল অক্ষের সঞ্চার পথ আর একটি শঙ্কু. ইহা প্রমাণ করা যায়। এই শঙ্কুর শীর্ষবিন্দুও O, এবং ইহার অক্ষ O বিন্দুতে জাড্যের মুখ্য অক্ষের একটি। এই শঙ্কুকে 'দেহশঙ্কু' (body cone) বলে। দেশশঙ্কু ও দেহশঙ্কু পরস্পরকে যে রেখায় স্পর্শ করে উহাই চঞ্চল অক্ষ। স্থিরবিন্দু সাপেক্ষে কোন দৃঢ়বস্তুর আবর্তন দেশশঙ্কুর গা ঘেঁষিয়া দেহশঙ্কুর গড়ানে গতি (rolling motion) রূপে বর্ণনা করা যায়। $I_1=I_2\neq I_3$ ধরিয়া দেহশঙ্কু গণনা 6-12.1 অনুচ্ছেদে করা হইয়াছে। মুখ্য জাড্য ভ্রামকগুলি অসমান হইলে গণনা জটিল হয়।

(iv) মুখ্য অক্ষ সাপেক্ষে আবর্তনের স্থায়িত্ব (Persistence of rotation about principal axis)। দৃঢ়বস্তুর বলমুক্ত আবর্তনে চঞ্চল অক্ষ বস্তুর ভরকেন্দ্রে জাড্যের কোন মুখ্য অক্ষের সঙ্গে মিলিয়া গেলে ঐ অক্ষে আবর্তন স্থায়ী হইবে; চঞ্চল অক্ষ আর বদলাইবে না, স্থির থাকিবে।

চঞ্চল অক্ষ কোন মুখ্য অক্ষের সঙ্গে মিলিয়া গেলে $\omega_1, \omega_2, \omega_3$র দুইটি রাশির মান শূন্য হইবে। তখন 9-11.1 সমীকরণ হইতে পাইব

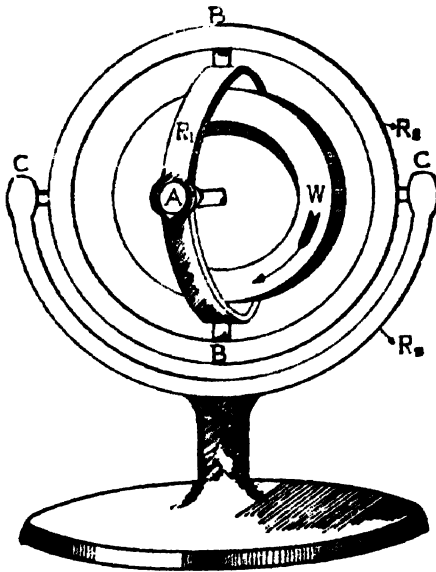
$$I_1\dot{\omega}_1=I_2\dot{\omega}_2=I_3\dot{\omega}_3=0$$

অর্থাৎ $\dot{\omega}_1=\dot{\omega}_2=\dot{\omega}_3=0$ বা $\dot{\tilde{\omega}}=0$

অতএব $\tilde{\omega}$ ভেক্টরটি অচর (constant) ভেক্টর হইবে।

কোন চাকা নিজ তলের অভিলম্ব কেন্দ্রগ অক্ষে আবর্তিত হইতে থাকিলে এই অক্ষে আবর্তন অক্ষুণ্ণ রাখিতে প্রয়াস পাইবে। গাইরো-কম্পাসের ক্রিয়া এই তথ্যের উপর নির্ভর করে।

6-12. গাইরোস্কোপ (Gyroscope)। আবর্তীয় প্রতিসাম্য (rotational symmetry) বিশিষ্ট কোন দৃঢ়বস্তু উহার প্রতিসম অক্ষস্থ কোন স্থিরবিন্দু সাপেক্ষে ঘুরিতে থাকিলে উহাকে আমরা প্রতিসম লাটিম (symmetrical top) বলি। স্থিরবিন্দু বস্তুটির ভরকেন্দ্র হইলে তখন উহাকে সাধারণতঃ গাইরোস্কোপ বলা হয়। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে কৌণিক ভর-বেগ কেবল ভরকেন্দ্রগামী অক্ষে আবর্তনের জন্য হইয়া থাকে। অনেকে প্রতিসম লাটিমকেও গাইরোস্কোপ বলেন।

গাইরোস্কোপের (6-16 চিত্রের W) ঘূর্ণাক্ষ (A) একটি আংটার (R_1) ব্যাস বরাবর থাকে। উহার অভিলম্ব অন্য এক ব্যাস (BB) বরাবর আংটাটি অন্য একটি আংটায় (R_2) বল-বেয়ারিং-এর (ball bearing) উপর থাকে। ইহাতে ঘূর্ণাক্ষ অনুভূমিক তলে যে কোন দিকে থাকিতে পারে। দ্বিতীয় আংটা (R_2)-কে তৃতীয় আর একটি আংটায় (R_3) অনুভূমিক CC ব্যাসে অনুরূপ অবলম্বনের উপর রাখিলে ঘূর্ণাক্ষ ন্যূনতম

6.16 চিত্র

ঘর্ষণে যে কোন দিকে ফিরিতে পারে, অথচ ভরকেন্দ্রের স্থান পরিবর্তন হয় না। ইহাতে ভরকেন্দ্রে অভিকর্ষজনিত কোন ভ্রামকও ক্রিয়া করে না। গাইরোস্কোপের এই প্রকার মণ্ডকে জিম্‌ব্যাল্‌স্ (gimbals) বলে।

প্রতিসাম্যের জন্য ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে মুখ্য জাড্য ভ্রামকের দুইটি সমমান হয়। প্রতিসাম্য অক্ষে জাড্য ভ্রামক I_3 হইলে আমরা ধরিব $I_1 = I_2 \neq I_3$।

আবর্তন বলমুক্ত হওয়ায় বাহ্যভ্রামক M-এর উপাংশ $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ হইবে, এবং $I_1 = I_2$ হওয়ায় অয়লারের সমীকরণগুলি (6-10.3) হইয়া দাঁড়াইবে

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2\,\omega_3 = 0 \qquad (5\text{-}12.1a)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\,\omega_1 = 0 \qquad (6\text{-}12.1b)$$

$$I_3\,\dot{\omega}_3 \qquad = 0 \qquad (6\text{-}12.1c)$$

আবর্তন বলমুক্ত বলিয়া 6-11 অনুচ্ছেদের সকল সিদ্ধান্তগুলিই এখানে প্রযোজ্য হইবে, অর্থাৎ এ ক্ষেত্রে

(*i*) গাইরোস্কোপের গতিশক্তি T স্থিরমান হইবে।

(*ii*) কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর **L** অচর রাশি হইবে, অর্থাৎ উহার মান ও দিক্ উভয়ই স্থির থাকিবে।

(*iii*) আবর্তনের চঞ্চল অক্ষ প্রতিসম অক্ষের সঙ্গে মিলিয়া গেলে ঐ অক্ষেই আবর্তন হইতে থাকিবে ; ত্রিমাত্রিক দেশে অক্ষের দিক্ বদলাইবে না। এই অবস্থায় গাইরোস্কোপ স্থান হইতে স্থানান্তরে লইয়া গেলেও উহার আবর্তন অক্ষ ত্রিমাত্রিক দেশে একই দিক্ নির্দেশ করিবে। এই কারণে গাইরোস্কোপ দিক্ নির্দেশক কম্পাস হিসাবে ব্যবহার করা যায়।

6-12.1. প্রতিসম অক্ষের গতি। আবর্তন পুরাপুরি প্রতিসম অক্ষে না হইলে $\omega_1 = \omega_2 = 0$ হইবে না। তখন প্রতিসম অক্ষ স্থির থাকিবে না। নিচে ইহার গতি আলোচনা করা হইল।

6-12.1(*c*) সমীকরণ হইতে দেখা যায় $\dot{\omega}_3 = 0$ বা ω_3 = স্থির মান রাশি। ধরা যাক

$$\omega_3\,(I_3 - I_1)/I_1 = \Omega \qquad (6\text{-}12.2)$$

Ω রাশিটির মানও স্থির।

6-12.1 (*a*) ও (*b*) সমীকরণের দুটি হইতে পাই

$$\dot{\omega}_1 + \frac{I_3 - I_1}{I_1}\,\omega_2\,\omega_3 = 0 \;\text{ বা }\; \dot{\omega}_1 + \Omega\,\omega_2 = 0 \qquad (6\text{-}12.3a)$$

$$\text{এবং }\; \dot{\omega}_2 - \frac{I_3 - I_1}{I_1}\,\omega_3\,\omega_1 = 0 \;\text{ বা }\; \dot{\omega}_2 - \Omega\,\omega_1 = 0$$

(6-12.3*b*)

6-12.3 সমীকরণ দুটি প্রথম ক্রমের অবকলীয় সহ-সমীকরণ (simultaneous first-order differential equations)। ইহাদের প্রথমটি একবার অবকলনের পর পাওয়া যায় $\ddot{\omega}_1+\Omega\dot{\omega}_2=0$, বা $\ddot{\omega}_1+\Omega^2\omega_1=0$ অর্থাৎ $\omega_1=\omega_0\cos(\Omega t+\phi_0)$। প্রথম সমীকরণে এই মান বসাইলে আমরা পাই $\omega_2=\omega_0\sin(\Omega t+\phi_0)$। সময় গণনার প্রাথমিক মুহূর্ত এমনভাবে লওয়া যাইতে পারে যে $\phi_0=0$ হয়। অতএব আমরা লিখিতে পারি

$$\omega_1=\omega_0\cos\Omega t,\ \omega_2=\omega_0\sin\Omega t \tag{6-12.4}$$

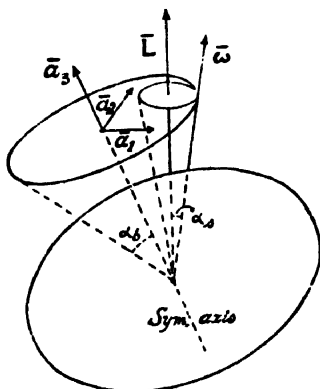
6.17 চিত্র

দেহশঙ্কু (Body cone)। ধরা যাক I_1, I_2 ও I_3 অক্ষে a_1, a_2, a_3 যথাক্রমে ঐকিক ভেক্টর। 6-12.4 সমীকরণ হইতে দেখা যায় $\omega_1 a_1+\omega_2 a_2$ ভেক্টরটির মান $\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}=\omega_0$ = স্থিররাশি, এবং উহা প্রতিসম অক্ষে Ω কৌণিক বেগে ঘোরে (6.17 চিত্র)। ω_3র মান স্থির বলিয়া মোট কৌণিক বেগ ভেক্টর $\bar{\omega}=\omega_1 a_1+\omega_2 a_2+\omega_3 a_3$ স্থির মান। অতএব $\bar{\omega}$র অক্ষ, অর্থাৎ আবর্তনের চঞ্চল অক্ষ, বস্তুটির প্রতিসম অক্ষ সাপেক্ষে ω_0 বিস্তার লইয়া Ω কৌণিক বেগে ঘোরে। $I_3>I_1$ হইলে Ω ও ω_3-র আবর্ত (sense of rotation) একই ; অন্যথায় বিপরীত। চঞ্চল অক্ষ ও প্রতিসম অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ α_b হইলে $\tan\alpha_b=\omega_0/\omega_3$। ω_0 ও ω_3 উভয়ে স্থির মান বলিয়া α_b কোণের মানও স্থির। অতএব আবর্তনের

চঞ্চল অক্ষ বস্তুটির প্রতিসম অক্ষের চারদিকে শঙ্কুর আকারে ঘোরে এবং এই শঙ্কুর শীর্ষকোণ $2\alpha_b$। এই শঙ্কুই দেহশঙ্কু (6-11 iii দ্রষ্টব্য)।

দেশশঙ্কু (Space cone)। L ও $\tilde{\omega}$র মধ্যবর্তী কোণ α_s হইলে

$$\cos\alpha_s = \frac{\tilde{\omega}.\mathbf{L}}{\omega L} = \frac{2T}{\omega L}$$

T, ω এবং L-এর মান স্থির। অতএব α_s-ও অচর রাশি। ইহাতে বোঝা যায় $\tilde{\omega}$-র অক্ষ, অর্থাৎ আবর্তনের চঞ্চল অক্ষ, সর্বদাই L ভেক্টরের অভিমুখের সঙ্গে α_s কোণে থাকিবে। ইহাতে যে শঙ্কু বর্ণিত হয় উহাই দেশশঙ্কু। প্রমাণ করা যায় যে দেহশঙ্কু, দেশশঙ্কুর গা ঘেঁষিয়া গড়াইয়া চলে। এই দুই শঙ্কুর স্পর্শরেখা চঞ্চল অক্ষ। $I_3 < I_1$ হইলে দেশশঙ্কু দেহশঙ্কুর ভিতরে থাকে (6.18- চিত্র)। প্রতিসাম্য অক্ষ ও L-এর দিক্ দিয়া নির্ণীত যে তল, চঞ্চল অক্ষ ঐ তলেই থাকে।

6.18 চিত্র

L ভেক্টর ও বস্তুর প্রতিসাম্য অক্ষের মধ্যে কোণ $\theta = \alpha_b - \alpha_s$। ইহার মানও স্থির। L ভেক্টর সাপেক্ষে প্রতিসাম্য অক্ষ 2θ শীর্ষকোণের শঙ্কু উৎপন্ন করে। অক্ষের এই গতিকে 'পুরঃসরণ' (Precession) বলে।

6-13 পৃথিবীর গাইরোস্কোপীয় ক্রিয়া। পৃথিবীর উপর বাহ্য টর্ক এত দুর্বল যে ইহার দৈনিক আবর্তন কার্যতঃ বলমুক্ত মনে করা যায়। উত্তর দক্ষিণ মেরুরেখা ইহার প্রতিসম অক্ষ। নিরক্ষীয় ব্যাস দুই মেরুর দূরত্বের চেয়ে কিছু বড় বলিয়া প্রতিসম অক্ষে জাড্য ভ্রামক I_3 নিরক্ষীয়

ব্যাসে জাড্য ভ্রামক $I_1 = I_2$ অপেক্ষা একটু বড়। অতএব এখানে $I_1 = I_2 \neq I_3$ এবং $I_3 > I_1$। এই কারণে গত অনুচ্ছেদে বর্ণিত সকল সিদ্ধান্তগুলিই পৃথিবীর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

দৈনিক আবর্তনের চঞ্চল অক্ষ মেরু অক্ষ নয়। চঞ্চল অক্ষ মেরু অক্ষের চারদিকে দেহশঙ্কুতে $\Omega = \omega_3 (I_3 - I_1)/I_1$ কৌণিক বেগে (6-12.2 সমীকরণ) ঘোরে। পৃথিবীর ক্ষেত্রে $(I_3 - I_1)/I_1 = 0{\cdot}0033$। মেরু অক্ষে কৌণিক বেগ ω_3 কার্যতঃ দৈনিক আবর্তন বেগ ω-র সমান। অতএব

$$\Omega = 0{\cdot}0033 \times 1 \text{ revolution/day}$$

অর্থাৎ দৈনিক প্রায় 1/300 পাক। ইহার ফলে ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত দর্শকের মনে হইবে পৃথিবীর দৈনিক আবর্তন অক্ষ উত্তর (বা দক্ষিণ) মেরুর চারদিকে বৃত্তপথে প্রায় 300 দিনে এক পাক ঘোরে। এই জাতীয় গতির কিছু প্রমাণ পাওয়া যায়। মেরুর কাছে দুই অক্ষের চরম দূরত্ব 15 ft-এর অনধিক। তাছাড়া, পথ বৃত্তাকার নয়, অসম আকারের, এবং এক পাক ঘুরিতে 427 দিন লাগে। সম্প্রতি এই প্রেক্ষণের যাথার্থ্য সম্বন্ধে সন্দেহ সৃষ্টি ঘটিয়াছে।

পৃথিবী আকারে গোলক না হইয়া উপগোলক (spheroid) হওয়ায় এবং উহার প্রতিসম অক্ষ কক্ষতল সাপেক্ষে হেলিয়া থাকায় পৃথিবীর উপর সূর্যের আকর্ষণ পৃথিবীর ভরকেন্দ্র দিয়া যায় না। ফলে ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে একটি ভ্রামকের সৃষ্টি হয়। ইহার ক্রিয়ায় পৃথিবীর প্রতিসম অক্ষ কক্ষতলের অভিলম্বে যাইতে প্রয়াস পায়। সূর্য পৃথিবীর নিরক্ষীয় তলে থাকিলে এই ভ্রামক থাকে না। চাঁদের গতি প্রায় পৃথিবীর কক্ষতলে বলিয়া চাঁদের আকর্ষণেও অনুরূপ ভ্রামকের সৃষ্টি হয়। চাঁদ সূর্যের তুলনায় পৃথিবীর অনেক কাছে ; সেজন্য ইহার ক্রিয়া সূর্যের চেয়ে জোরালো। (ভ্রামক m/r^3-এর আনুপাতিক ; m চাঁদ বা সূর্যের ভর এবং r পৃথিবী হইতে উহার দূরত্ব।) ইহা ছাড়া গ্রহগুলিরও অনুরূপ কিছু ক্রিয়া আছে। সকল ভ্রামকগুলির মানই গতির সঙ্গে বদলায়।

স্বল্পমান এই সকল অস্থির ভ্রামকের ক্রিয়ায় পৃথিবীর প্রতিসম অক্ষ প্রায় 26,000 বছরে এক পাক ঘোরে। ইহাকে খ-গোলীয় অয়ন (astronomical precession) বলে।

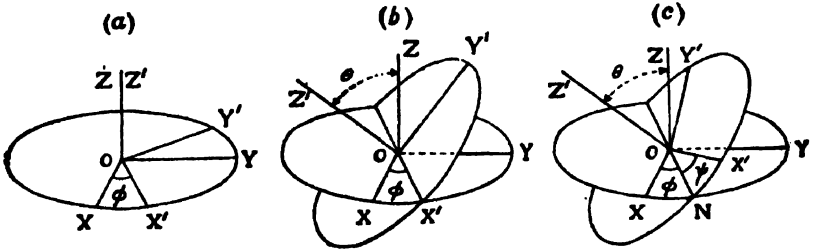
6-14. অয়লারীয় কোণ (Eulerian angles)। আবর্তন সংক্রান্ত অয়লারের সমীকরণে (6-10.3) অক্ষগুলি ঘুরন্ত বস্তুটিতে আবদ্ধ, এবং উহার সহিত ঘোরে। এইরূপ ঘুরন্ত নির্দেশতন্ত্রের সাহায্যে খুব সহজ ক্ষেত্র ছাড়া গতির বর্ণনা অসুবিধার।

অয়লারীয় কোণ নামে তিনটি কোণের সাহায্যে স্থির বিন্দু সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুর আবর্তনের বর্ণনা সহজবোধ্য হয়। এই কোণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ, অর্থাৎ অন্য দুইটি না বদলাইয়া ইহার যে কোন একটি বদলাইতে পারে। ইহাদের একাধিক উপায়ে বাছাই করা চলে। নীচে একটির বর্ণনা দেওয়া হইল।

আবর্তন বিন্দু O-কে মূলবিন্দু ধরিয়া দুইটি দক্ষিণ হস্তীয় কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র $OXYZ$ এবং $OX'Y'Z'$ কল্পনা কর। উভয়ের অনুরূপ অক্ষ আদিতে মিলিয়া থাকিবে। $OXYZ$কে স্থির রাখিয়া $OX'Y'Z'$-কে এখন পর পর নিম্নোক্তভাবে বামাবর্তে (anticlockwise) ঘুরাও ঃ

(১) চিহ্নিত তন্ত্র OZ অক্ষে ϕ কোণ ঘুরাও (6-19a চিত্র)।

(২) OX' অক্ষের নূতন অবস্থান সাপেক্ষে চিহ্নিত তন্ত্র θ কোণ ঘুরাও (6-19b চিত্র)। ইহাতে $X'Y'$ তল XY তল সাপেক্ষে কাত হয়। দুই তলের ছেদ-রেখাকে 'পাত-রেখা' (Line of nodes) বলে। OZ এবং OZ' অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ θ।

(৩) OZ' অক্ষের নূতন অবস্থান সাপেক্ষে চিহ্নিত তন্ত্র ψ কোণ ঘুরাও। ইহাতে OX' অক্ষ পাত-রেখা ON-এর (6-19c চিত্র) সহিত ψ কোণে থাকিবে।

6-19 চিত্র

θ, ϕ, ψ কোণ তিনটি অয়লারীয় কোণ। লক্ষ্য কর যে এই θ ও ϕ ঠিক গোলীয় নির্দেশাংকের (spherical coordinates) θ ও ϕ-এর মত।

অয়লারীয় কোণ অন্যভাবেও নেওয়া যায়। সব ক্ষেত্রেই উহারা পরস্পর নিরপেক্ষ। কোণের বর্ণনায় কেহ কেহ বামহস্তীয় নির্দেশতন্ত্র বা দক্ষিণাবর্ত ঘূর্ণন লইয়া থাকেন। কোণগুলি বুঝাইবার চিহ্ন ব্যবহারও সকলে একরকম করেন না। কেহ কেহ আমাদের ϕ-কে ψ এবং ψ-কে ϕ লেখেন। পাঠকের সব সময় দেখিয়া লইতে হইবে অয়লারীয় কোণগুলি

লেখক কিভাবে ধরিয়াছেন। কোণগুলি বিভিন্ন লেখায় আলাদা হইলে গাণিতিক বিশ্লেষণের পদগুলিতে তফাত থাকিবে।

কোন প্রশ্নের মীমাংসায় অয়লারীয় কোণ ব্যবহার করিতে X', Y', Z' অক্ষ তিনটি O বিন্দুতে বস্তুর জাড্যের তিন মুখ্য অক্ষ বরাবর ধরা হয়। আবর্তন বিচারে $OXYZ$ স্থির থাকে এবং $OX'Y'Z'$ তন্ত্র বস্তুটির সঙ্গে ঘোরে। উপরোক্ত সংজ্ঞা অনুসারে দেখা যায়

$\dot{\theta}$ হইল পাতরেখা সাপেক্ষ কৌণিক বেগ,

$\dot{\phi}$ হইল Z অক্ষ সাপেক্ষে কৌণিক বেগ, এবং

$\dot{\psi}$ হইল Z' অক্ষ সাপেক্ষে কৌণিক বেগ।

এই অক্ষ তিনটি কিন্তু পরস্পর অভিলম্ব নয়।

চঞ্চল অক্ষে বস্তুটির আবর্তনের কৌণিক বেগ $\vec{\omega}$ এবং X', Y', Z' অক্ষে (অর্থাৎ O বিন্দুতে জাড্যের মুখ্য অক্ষে) উহার উপাংশ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ধরা যাক। X', Y', Z' অক্ষে $\dot{\theta}, \dot{\phi}$ ও $\dot{\psi}$ এর উপাংশ নির্ণয় করিলে দেখা যায়,

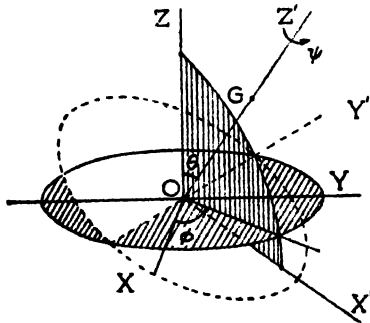
$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}14.1)$$

আবর্তন-প্রতিসাম্য বিশিষ্ট বস্তুর ক্ষেত্রে অক্ষ নির্ধারণ (Choice of axes for a figure of revolution) আলোচ্য বস্তুর ঘূর্ণন বিন্দু O-তে উহার মুখ্য জাড্য ভ্রামকগুলি আলাদা হইলে ইহার তিনটি মুখ্য অক্ষে X', Y', Z' লইতে হইবে ; অন্যথা করিবার উপায় নাই। কিন্তু লাটিমের মত কোন বস্তুর এক অক্ষে আবর্তনের প্রতিসাম্য (rotational symmetry) থাকিলে এবং আবর্তন উহার প্রতিসম অক্ষে হইলে, এই অক্ষকে Z' অক্ষ ধরিয়া, X' ও Y' অক্ষ Z' অক্ষের অভিলম্বে O বিন্দুর মধ্য দিয়া পরস্পর সমকোণী যে কোন দুইটি দিকে ধরা যায়, কারণ ইহার যে কোন দিকে জাড্য ভ্রামক একই। এরূপ ক্ষেত্রে X' ও Y' অক্ষ সুবিধা মত ফেলা যায় অর্থাৎ আদি মুহূর্তে ψ এর মান কত হইবে তাহা ইচ্ছামত নির্ধারণ করা চলে। প্রতিসম লাটিমের গতি আলোচনায় 6-16 অনুচ্ছেদে এরূপ করা হইয়াছে। ঐ ক্ষেত্রে আদি মুহূর্তে ψ এর মান $-\pi/2$ ধরা হইয়াছে।

6-15. পুরঃসরণ এবং অক্ষবিচলন (Precession and nutation)। ধরা যাক $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ ও $\dot{\psi}$ কৌণিক বেগ তিনটির কেবল $\dot{\phi}$ শূন্যমান নয়। ইহাতে Z'-অক্ষ Z-অক্ষের চারদিকে শাঙ্কব তলে (on a conical surface) $\dot{\phi}$ বেগে ঘুরিবে, কিন্তু উহাদের মধ্যবর্তী কোণ θ-র মান স্থির থাকিবে। এইরূপ গতিকে পুরঃসরণ (Precession) বলে। বস্তুটি কেবল Z' অক্ষে ঘুরিতে থাকিলে পুরঃসরণ বলিতে কোন স্থির অক্ষের চারদিকে Z' অক্ষের আবর্তন বুঝায়।

উপরোক্ত তিনটি কৌণিক বেগের কেবল $\dot{\theta}$ শূন্য মান না হইলে θ, অর্থাৎ Z অক্ষের সহিত বস্তুটির আবর্তন অক্ষের কোণ সময়ের সহিত বদলাইবে। এই অবস্থায় পুরঃসরণ থাকিলে আবর্তন অক্ষের যুক্ত গতিকে অক্ষবিচলন (Nutation) বলে।

6-16. প্রতিসম লাটিমের গতি (Motion of a symmetrical top)। আবর্তীয় প্রতিসাম্য বিশিষ্ট কোন দৃঢ়বস্তু উহার প্রতিসম অক্ষস্থ কোন বিন্দু O সাপেক্ষে ঘুরিতে থাকিলে উহাকে প্রতিসম লাটিম বলে। G বস্তুটির ভারকেন্দ্র হইলে O বিন্দু G-র নিচের কোন তলে থাকিবে। O সাপেক্ষে বস্তুটির মুখ্য জাড্য ভ্রামক I_1, I_2, I_3। I_3 প্রতিসম অক্ষে ; I_1 ও I_2 সমান। $OG=l$ এবং লাটিমের ভর m ধরা হইবে।

O-কে মূলবিন্দু ধরিয়া স্থির দক্ষিণ হস্তীয় নির্দেশতন্ত্র $OXYZ$ নেওয়া গেল। ইহার Z অক্ষ খাড়া। অনুরূপ অন্য একটি নির্দেশতন্ত্র $OX'Y'Z'$ বস্তুটির দেহে আবদ্ধ ধরা হইল। ইহার Z' অক্ষ বস্তুটির প্রতিসম অক্ষ।

6.20 চিত্র

আদি মুহূর্তে X' অক্ষ ZZ' তলে, এবং Y' অক্ষ ও Z'-এর অভিলম্বে (6.20 চিত্র)। চিহ্নিত নির্দেশতন্ত্র লাটিমের সঙ্গে ঘোরে।

আলোচ্য ক্ষেত্রে অয়লারীয় কোণগুলি নিচের মত নেওয়া গেল :

$\theta = Z$ ও Z' অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ,

$\phi =$ অনুভূমিক অক্ষ OX এবং ZOZ' তলের মধ্যবর্তী কোণ,

$\psi = OZ'$ অক্ষে আবর্তন কোণ। আদি মুহূর্তে উহার মান $-\pi/2$। ইহা করিলে 6-14.1 সমীকরণ হইতে দেখা যায়

$$\omega_1 = -\dot{\phi} \sin \theta, \ \omega_2 = \dot{\theta}, \ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \qquad (6\text{-}16.1)$$

আবর্তন সংক্রান্ত তিনটি অচর রাশি। লাটিমের উপর ক্রিয়াশীল বল অভিকর্ষজনিত বলিয়া উহা সংরক্ষী, এবং O বিন্দুতে বলের ভ্রামক $mgl \sin \theta$-র অক্ষ ZOZ' তলের অভিলম্বে হওয়ায়, নিম্নোক্ত তিনটি রাশি গতিকালে অচর থাকিবে :

(1) লাটিমের মোট শক্তি E,

(2) Z' অক্ষে কৌণিক ভরবেগ L_ψ,

ও (3) Z অক্ষে কৌণিক ভরবেগ L_ϕ।

লাটিমের গতিশক্তি $T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$

$$= \tfrac{1}{2} I_1(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2} I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \qquad (6\text{-}16.2)$$

উহার স্থিতিশক্তি $V = mgl \cos \theta$

অতএব মোট শক্তি $E = T + V$

$$= \tfrac{1}{2} I_1(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2} I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta \qquad (6\text{-}16.3)$$

Z' অক্ষে কৌণিক ভরবেগ

$$L_\psi = I_3\omega_3 = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \qquad (6\text{-}16.4)$$

Z অক্ষে কৌণিক ভরবেগ

$$L_\phi = -I_1\omega_1 \sin \theta + I_3\omega_3 \cos \theta$$

$$= I_1\dot{\phi} \sin^2 \theta + L_\psi \cos \theta \qquad (6\text{-}16.5)$$

L_ϕ ও L_ψ এর মান 6-16.2 সমীকরণে বসাইলে পাই

$$E = \tfrac{1}{2} I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{(L_\phi - L_\psi \cos \theta)^2}{2I_1} + \frac{L_\psi^2}{2I_3} + mgl \cos \theta$$

এ সমীকরণে θ-ই একমাত্র চররাশি। ইহার সমাধান করিলে θ ও t-র সম্পর্ক পাওয়া যায়। θ-র এই মান 6-16.5 সমীকরণে বসাইলে $\dot{\phi}$ পাওয়া যায়, এবং θ ও $\dot{\phi}$ 6-16.4-এ বসাইলে $\dot{\psi}$ পাওয়া যায়। এ প্রকার সমাধান

বেশ জটিল, এবং ইহার বিশেষ প্রয়োজনও নাই। আলোচ্য গতির প্রকৃতি সংক্রান্ত কিছু মূল তথ্য আমরা অনেক সহজে পাইতে পারি। ইহার জন্য গতির প্রারম্ভিক স্থিতিগুলি (initial conditions) জানিলেই চলিবে।

অনেক সময়েই গতির আরম্ভে লাটিম যখন নিজ প্রতিসম অক্ষে ঘুরিতে থাকে তখন উহার অক্ষ Z অক্ষের সঙ্গে θ_0 কোণে ধরা থাকে, এবং বেগ ω_3 হইলে উহা ছাড়িয়া দেওয়া হয়। এক্ষেত্রে প্রারম্ভিক স্থিতিগুলি হইবে

$$\theta=\theta_0,\ \ \dot{\theta}=0,\ \dot{\phi}=0,\ \dot{\psi}=\omega_3 \tag{6-16.6}$$

এবং গতির অচর রাশিগুলির মান হইবে

$$\left.\begin{aligned} &L_\psi=I_3\omega_3 \\ &L_\phi=I_3\omega_3 \cos\theta_0 \\ \text{ও } &E=L^2_\psi/2I_3+mgl\cos\theta_0 \end{aligned}\right\} \tag{6-16.7}$$

অক্ষ বিচলন (Nutation)। গতিতে শক্তি সংরক্ষিত থাকে বলিয়া লেখা যায়

$$E=\frac{L_\psi^2}{2I_3}+mgl\cos\theta_0=\tfrac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{(L_\phi-L_\psi\cos\theta)^2}{2I_1}+\frac{L_\psi^2}{2I_3}$$
$$+mgl\cos\theta$$

উভয় দিক $2/I_1$ দিয়া গুণ করিয়া, এবং

$$\frac{2mgl}{I_1}=a \quad \text{ও} \quad \frac{I_3\omega_3}{I_1}=b \tag{6-16.8}$$

লিখিয়া সরল করার পর পাই

$$\dot{\theta}^2=a(\cos\theta_0-\cos\theta)-b^2(\cos\theta_0-\cos\theta)^2/\sin^2\theta \tag{6-16.9}$$

θ এবং θ_0 খুব কাছাকাছি ধরিয়া ইহার একটি সমাধান সহজে বাহির করা যায়। ধরা যাক

$$\theta=\theta_0+\epsilon\ (\epsilon\ll\theta_0),\ \text{ এবং }\ \dot{\theta}=\dot{\epsilon}$$

তাহা হইলে $\cos\theta=\cos\theta_0\cos\epsilon-\sin\theta_0\sin\epsilon=\cos\theta_0-\epsilon\sin\theta_0$ এবং $\sin\theta_0\cos\epsilon+\cos\theta_0\sin\epsilon=\sin\theta_0+\epsilon\cos\theta_0$

ϵ রাশিটি খুব ছোট ধরা হইয়াছে। উহার বর্গের চেয়ে উচ্চতর

রাশিগুলি উপেক্ষা করিলে 6-16.9 সমীকরণ হইতে পাই

$$\dot{\epsilon}^2 = a\,\epsilon \sin\theta_0 - b^2\epsilon^2 = b^2\left\{\frac{a\sin\theta_0}{b^2} - \epsilon^2\right\}$$

$$= b^2(2\,\epsilon_1\,\epsilon - \epsilon^2)$$

এখানে $a\sin\theta_0/b^2$-এর বদলে আমরা $2\,\epsilon_1$ লিখিয়াছি।

$$\therefore \frac{d\epsilon}{dt} = b\sqrt{2\epsilon_1\epsilon - \epsilon^2} \quad \text{বা} \quad \frac{d\epsilon}{(2\epsilon_1\,\epsilon - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}} = b\,dt$$

ইহার সমাধান

$$\epsilon = \epsilon_1\,(1 - \cos bt) \tag{6-16.10a}$$

$$\text{বা} \quad \theta = \theta_0 + \epsilon_1\,(1 - \cos bt) \tag{6-16.10b}$$

সমাধান হইতে দেখা যায় θর মান সময়ের সঙ্গে বদলায় এবং θ_0 হইতে $\theta + 2\,\epsilon_1 = \theta_0 + a\sin\theta_0/b^2$ সীমার মধ্যে থাকে। θর পরিবর্তনের প্রকৃতি এখানে সরল দোলীয়; উহার বিস্তার ϵ_1 এবং কৌণিক কম্পাংক

$$b = I_3\omega_3/I_1 \tag{6-16.11}$$

লাটিমের ঘূর্ণাক্ষের এইরূপ কম্পনকে অক্ষ বিচলন (nutation) বলে। ঘূর্ণাক্ষে লাটিমের কৌণিক বেগ ω_3 যত বেশী হইবে অক্ষ বিচলনের কম্পাংকও তত বেশী হইবে। অক্ষ বিচলনের বিস্তার $\omega_3{}^2$-এর বিষমানুপাতিক।

পুরঃসরণ (Precession)। 6-16.5 সমীকরণ হইতে পাই

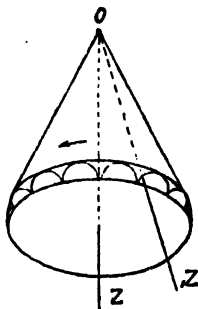
$$\dot{\phi} = \frac{L_\phi - L_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} = \frac{I_3\omega_3}{I_1}\cdot\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta} = b.\frac{\epsilon\sin\theta_0}{\sin^2\theta}$$

$\sin^2\theta = \sin^2(\theta_0 + \epsilon)$-এর প্রসারণ ঘটাইয়া উপরের সমীকরণের ডানদিকে ϵ-র মাত্র প্রথম ক্রমের পদ রাখিয়া উচ্চতর ক্রম উপেক্ষা করিলে পাই

$$\dot{\phi} = b\,\epsilon\,/\sin\theta_0 \tag{6-16.12}$$

$$\therefore \frac{d\phi}{dt} = \frac{b}{\sin\theta_0}\epsilon_1(1 - \cos bt) \qquad [\text{ 6-16.10a দেখ }]$$

$$\text{বা} \quad \phi = \phi_0 + \frac{\epsilon_1 bt}{\sin\theta_0} - \frac{\epsilon_1}{\sin\theta_0}\sin bt \tag{6-16.13}$$

$\sin bt$ পদটির দোলন দ্রুত ; উহা ω_3 ক্রমের। এই দোলন উপেক্ষা করিলে দেখা যায় ϕ কোণ, অর্থাৎ খাড়া অক্ষ OZ-এর চারদিকে লাটিমের অক্ষের আবর্তন কোণ, সময়ের সহিত ক্রমশঃ বাড়িয়া চলে। উহাকে

6-21 চিত্র

পুরঃসরণ (precession) বলে। 6.21 চিত্রে লাটিমের অক্ষের পুরঃসরণ ও অক্ষবিচলন দেখান হইয়াছে।

পুনঃসরণের কৌণিক বেগ $b\epsilon_1/\sin\theta_0$ ধরা যাইতে পারে। আগে দেখা গিয়াছে $b=I_3\omega_3/I_1$, $\epsilon_1=a\sin\theta_0/2b^2$ এবং $a=2mgl/I_1$। এই মানগুলি বসাইলে পাই দোলনহীন পুরঃসরণের বেগ

$$\dot{\phi}_l=\frac{b\epsilon_1}{\sin\theta_1}=\frac{mgl}{I_3\omega_3} \qquad (6\text{-}16.14)$$

ω_3 বড় হইলে পুরঃসরণ আস্তে হইবে। ঘর্ষণের জন্য লাটিমের আবর্তনের বেগ (ω_3) ক্রমশঃ কমিতে থাকে ও পুরঃসরণের বেগ বাড়ে।

6-17. প্রতিসম লাটিমের গতিতে লাগ্রাঞ্জ সমীকরণের প্রয়োগ। প্রতিসম লাটিমের গতি সংরক্ষী। অতএব উহার আলোচনায় লাগ্রাঞ্জের 4-14.3 সমীকরণ প্রয়োগ করা চলে। এক্ষেত্রে অয়লারীয় কোণ তিনটি উহার ব্যাপক নির্দেশাংক হিসাবে নেওয়া যায় কারণ উহারা পরস্পর নিরপেক্ষ এবং লাটিমের অবস্থান ঐ তিনটি কোণের সাহায্যে দ্ব্যর্থহীনভাবে নির্দেশ করা যায়। এই নির্দেশাংকে লাটিমের গতিশক্তি 6-16.2 সমীকরণে দেখান হইয়াছে।

$$T=\tfrac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2\sin\theta+\dot{\theta}^2)+\tfrac{1}{2}I_3(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2 \qquad (6\text{-}17.1)$$

উহার স্থিতিশক্তি $V = mgl \cos\theta$ বলিয়া লাটিমের লাগ্রাঞ্জিয়ান

$$L = T - V = \tfrac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta \quad (6\text{-}17.2)$$

এবং θ, ϕ, ψ সংক্রান্ত গতীয় সমীকরণগুলি

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (q_i = \theta,\ \phi,\ \psi)$$

লাগ্রাঞ্জিয়ানের রূপ হইতে দেখা যায় উহা ϕ ও ψ নির্দেশাংক দুটির উপর নির্ভর করে না। ইহার অর্থ $\partial L/\partial\phi = \partial L/\partial\psi = 0$। অতএব

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) = 0 \text{ বা } \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = \text{অচর রাশি} \quad (6\text{-}17.3)$$

এবং
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \text{ বা } \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi}\sin^2\theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta = \text{অচর রাশি} \quad (6\text{-}17.4)$$

শেষ সমীকরণ দুটি আগের অনুচ্ছেদের 6-16.4 ও 6-16.5 সমীকরণ। বাকী আলোচনা আগের মতই হইতে পারে। বিকল্পে আমরা 6-17.3 ও 6-17.4 সমীকরণের সঙ্গে θ সংক্রান্ত লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ লইতে পারি।

লাগ্রাঞ্জ সমীকরণের একটি বৈশিষ্ট্য এখানে লক্ষণীয়। লাগ্রাঞ্জিয়ানে কোন বিশেষ নির্দেশাংক q_k না থাকিলে $\partial L/\partial q_k = 0$ হওয়ায়

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0$$

হইবে। ইহার অর্থ $\partial L/\partial \dot{q}_k$ অচর রাশি। স্থিতিশক্তি V $\dot{q}_k$র উপর নির্ভর করে না : উহা কেবল q_k-গুলির অপেক্ষক। অতএব $\partial L/\partial \dot{q}_k = \partial(T-V)/\partial \dot{q}_k = \partial T/\partial \dot{q}_k = p_k$ (4-13.5 সমীকরণ)। সংজ্ঞা অনুসারে p_k রাশিটি k স্বাতন্ত্র্যের ব্যাপক ভরবেগ। অতএব লাগ্রাঞ্জিয়ানে কোন বিশেষ নির্দেশাংক না থাকিলে ঐ নির্দেশাংকের সহগামী ব্যাপক ভরবেগ স্থির থাকে। যে কোন গতিতে অচর রাশিগুলি জানিতে পারিলে গতির সমাধানে সুবিধা হয়। লাগ্রাঞ্জের উপায়ে এই অচর রাশিগুলি খুব সহজে পাওয়া যায়।

θ সংক্রান্ত লাগ্রাঞ্জের গতীয় সমীকরণ হইল

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

বা $\frac{d}{dt}(I_1\dot{\theta}) - I_1\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi}\sin\theta$
$\qquad - mgl\sin\theta = 0$

বা $I_1\ddot{\theta} = I_1\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi}\sin\theta + mgl\sin\theta$ (6-17.5)

সোজাসুজি ইহার সমাধান খুবই জটিল ; তবে ইহার সাহায্যেও গতি-সংক্রান্ত কোন কোন তথ্য সহজে পাওয়া যাইতে পারে। উদাহরণ স্বরূপ দেখা যাক অক্ষবিচলন না ঘটিয়া (θ = অচর) স্থিরবেগে পুরঃসরণ $\dot{\phi} = \Omega$ = অচর) হইতে পারে কিনা। এরূপ গতিকে 'অপরিবর্তী গতি' (steady motion) বলা হয়। ইহার শর্ত

$$\theta\,(\neq 0) = \alpha = \text{অচর এবং } \dot{\phi} = \Omega = \text{অচর।}$$

θ অচর হওয়ায় $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$। এই সব মানগুলি 6-17.5এ বসাইলে পাই

$$I_1\Omega^2 \sin\alpha\cos\alpha - I_3\omega_3\,\Omega\sin\alpha + mgl\sin\alpha = 0$$

বা $\Omega^2 I_1\cos\alpha - \Omega I_3\omega_3 + mgl = 0$

বা $$\Omega = \frac{I_3\omega_3 \pm \sqrt{I_3{}^2\omega_3{}^2 - 4I_1\,mgl\cos\alpha}}{2I_1\cos\alpha} \qquad (6\text{-}17.6)$$

দেখা যায় $I_3{}^2\omega_3{}^2 > 4I_1 mgl\cos\alpha$ হইলে Ω-র উপরের দুটি মানে অক্ষবিচলন না ঘটিয়া পুরঃসরণ হইতে পারিবে।

প্রশ্ন

1. জাড্যভ্রামক ও ঘূর্ণনব্যাসার্ধ কাহাকে বলে ?

জাড্যভ্রামক সংক্রান্ত সমান্তরাল অক্ষ ও অভিলম্ব অক্ষের সূত্র দুইটি প্রমাণ কর।

লম্ববৃত্তীয় শঙ্কুর (ক) নিজ অক্ষে ও (খ) শীর্ষবিন্দুতে নিজ অক্ষের অভিলম্ব অক্ষে জাড্যভ্রামক বাহির কর।

2. কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে কোন অক্ষের দিক্‌কোসাইন λ, μ, ν হইলে ঐ অক্ষে কোন বস্তুর জাড্যভ্রামকের ব্যঞ্জক (expression) কি হইবে ?

জাড্য গুণফল কাহাকে বলে ? কিরূপ প্রতিসাম্য থাকিলে ইহাদের মান শূন্য হইবে ?

3. জাড্য ইলিপ্‌সয়ড্‌ কাহাকে বলে ? উহার সমীকরণ বাহির কর। জাড্যের মুখ্য অক্ষ ও মুখ্য ভ্রামক বলিতে কি বুঝায় ? আবর্তন সংক্রান্ত ব্যাপারে উহাদের প্রধান প্রধান ধর্ম কি ?

4. কোন বিন্দুতে কোন বস্তুর জাড্য ইলিপ্‌সয়ড্‌ জানা থাকিলে উহা হইতে কি কি তথ্য আহরণ করা যায় ?

সমতত্ত্ব ঘনকের বিপরীত কোনা যোগকারী রেখায় উহার জাড্য ভ্রামক বাহির কর। ঘনকের কোন তলের কর্ণ আবর্তন অক্ষ হইলে ঐ অক্ষে ঘনকের জাড্য ভ্রামক কত ?

5. কোন স্থির বিন্দু সাপেক্ষে কোন দৃঢ়বস্তুর কৌণিক ভরবেগের ব্যঞ্জক ও তাহার কার্টেজীয় উপাংশগুলির মান বাহির কর।

কৌণিক বেগ ভেক্টর $\vec{\omega}$ ও কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর L-এর অভিমুখ কখন্‌ এক হইবে বুঝাইয়া বল। তখন জাড্য ভ্রামক ও কৌণিক ভরবেগের সম্পর্ক কি হইবে দেখাও।

6. আবর্তনের গতিশক্তি $T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\mathbf{L}.\vec{\omega}$ প্রমাণ কর।

7. অয়লারের গতীয় সমীকরণগুলি বাহির কর। ইহাদের সাহায্যে বলমুক্ত আবর্তন আলোচনা কর।

8. গাইরোস্কোপের গতি আলোচনা কর। পৃথিবীর দৈনিক আবর্তনে গাইরোস্কোপীয় ক্রিয়া কতটা দেখা যায় ?

9. অয়লারীয় কোণ কাহাকে বলে ? আবর্তন প্রতিসাম্যবিশিষ্ট বস্তুর ক্ষেত্রে এই কোণগুলি কিভাবে লইলে সুবিধা বেশী হয় ?

পুরঃসরণ ও অক্ষবিচলন কাহাকে বলে ?

10. প্রতিসম লাটিমের অক্ষবিচলন ও পুরঃসরণ আলোচনা কর।

সপ্তম পরিচ্ছেদ

মহাকর্ষ
(Gravitation)

7.1. **সূচনা।** গ্রহের গতিসংক্রান্ত কেপলারের সূত্রগুলির ব্যাখ্যা খুঁজিতে গিয়া নিউটন মহাকর্ষীয় সূত্র আবিষ্কার করেন। কেপলারের সূত্রগুলি হইতে কিভাবে মহাকর্ষীয় সূত্রে আসা যায় তাহা 3.23 অনুচ্ছেদে দেখান হইয়াছে। মহকর্ষীয় সূত্রে বলে

'বিশ্বের যে কোন দুইটি কণা উহাদের সংযোগী রেখায় পরস্পর পরস্পরকে আকর্ষণ করে এবং এই আকর্ষণ উভয়ের ভরের সমানুপাতিক ও উভয়ের দূরত্বের বর্গের বিষমানুপাতিক।'

সংকেতে লেখা যায়, আকর্ষক বল

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ বা } F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (7\text{-}1.1)$$

G রাশিটি F ও $m_1 m_2/r^2$ এর অনুপাত বুঝায়; উহাকে 'মহাকর্ষীয় নিত্যসংখ্যা' (Gravitational constant) বলে। সকল রাশিগুলি সিজিএস এককে লইলে

$$G = 6.670 \times 10^{-8} \text{ cm}^3\text{g}^{-1}\text{s}^{-2};$$

এমকেএস এককে $G = 6.670 \times 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$।

ইহা হইতে দেখা যাইবে বৈদ্যুত বলের তুলনায় মহাকর্ষীয় বল অনেক দুর্বল। 1 cm দূরস্থ দুইটি ইলেকট্রনের মধ্যে শূন্য স্থানে বৈদ্যুত বল 2.3×10^{-19} dyn ও মহাকর্ষীয় বল 5.5×10^{-62} dyn। এক্ষেত্রে বৈদ্যুত বল মহাকর্ষীয় বল অপেক্ষা প্রায় 10^{43} গুণ জোরাল।

G মাপিবার উপায় 7-10 অনুচ্ছেদে বলা হইয়াছে।

7-2. মহাকর্ষীয় বলের কয়েকটি ধর্ম।

(১) দুই কণার আকর্ষণ উহাদের সংযোগী রেখায় ক্রিয়া করে বলিয়া মহাকর্ষীয় বল কেন্দ্রগ, অতএব সংরক্ষী (3-12 অনুচ্ছেদ)।

(২) বৈদ্যুত বা চৌম্বক বলের মত ইহাও দূরত্বের বিষমবর্গীয়। বৈদ্যুত আধান ও চৌম্বক মেরু উভয়েই দুই প্রকার; উভয় ক্ষেত্রেই বল আকর্ষক

বা বিকর্ষক হইতে পারে। কিন্তু ভর আমরা মাত্র এক প্রকারই দেখিতে পাই। বিষম প্রকৃতির আধান বা মেরুতে আকর্ষণ হয়; কিন্তু মহাকর্ষে সমপ্রকৃতির ভরে আকর্ষণ হয়। বিষম প্রকৃতির ভর থাকিলে কি হইত তাহা কল্পনার বিষয়।

(৩) বৈদ্যুত ও চৌম্বক ক্ষেত্রে আকর্ষণ (বা বিকর্ষণ) মাধ্যমের উপর নির্ভর করে; $F = e_1e_2/\epsilon r^2$ বা $m'_1m'_2/\mu r^2$ (m' চৌম্বক মেরুশক্তি)। ইহাদের সহিত মহাকর্ষের $F = Gm_1m_2/r^2$ তুলনা করিলে মনে হইবে G রাশিটি $1/\epsilon$ বা $1/\mu$-র অনুরূপ রাশি। ϵ ও μ মাধ্যমের উপর নির্ভর করে; কিন্তু G করে না। সকল ক্ষেত্রেই G-র মান স্থির; এইজন্য উহাকে 'নিত্যসংখ্যা' (universal constant) বলা হয়।

(৪) মহাকর্ষের বল পরস্পর ক্রিয়াশীল কণার ভর ভিন্ন উহাদের নিজস্ব অন্য কোন ধর্মের উপর নির্ভর করে না। কণা কোন্ অণু বা পরমাণুতে গঠিত, উহারা কঠিন, তরল কি বায়বীয়, বা উহাদের উষ্ণতা কত, ইহাদের কিছুই মহাকর্ষকে প্রভাবিত করে না। কণা অধিক কি অল্প চাপে আছে, বা বৈদ্যুত বা চৌম্বক বলক্ষেত্রে আছে কি না এ সকলও মহাকর্ষকে প্রভাবিত করে না।

(৫) সমদৈশিক (isotropic) কেলাসের সকল অক্ষেই ভৌতিক ধর্মগুলি এক। কিন্তু বিষমদৈশিক (anisotropic) কেলাসে ধর্ম বিভিন্ন অক্ষে বিভিন্ন হইলেও দেখা যায় মহাকর্ষীয় বল অক্ষের উপর নির্ভর করে না, অর্থাৎ মহাকর্ষ সমদৈশিক।

(৬) পৃথিবী যে বলে কোন বস্তুকে টানে তাহা বস্তুর ভরের সমানুপাতিক। এ ভর মহাকর্ষীয় ভর। তুলায় মাপিয়া আমরা যে ভর নির্ণয় করি, তাহাই মহাকর্ষীয় ভর।

কোন বস্তুতে কোন স্থিরমান বল f প্রয়োগ করিলে উহার ত্বরণ যদি a হয়, তাহা হইলে $f/a = m$-কে উহার 'জড়ত্বীয় ভর' (inertial mass) বলে। পরীক্ষায় দেখা যায় উভয় ভর একই। আইনস্টাইনের ব্যাপক আপেক্ষিকতাবাদ (General theory of relativity) যে সকল স্বীকার্যের (postulates) উপর প্রতিষ্ঠিত, 'তুল্যতাবাদ' (principle equivalence) তাহার অন্যতম। ইহা হইতেও উভয় ভরের তুল্যতায় আসা যায়।

(৭) পরীক্ষাগারে, মহাকর্ষীয় সূত্র সংক্রান্ত আমাদের পরীক্ষাগুলি দূরত্বে নিচের দিকে সেণ্টিমিটার-ক্রম হইতে উপরের দিকে মিটার ক্রমের মধ্যে সীমাবদ্ধ।

পদার্থবিদ্যা ও জ্যোতির্বিজ্ঞানে আমাদের 10^{-12} cm হইতে 10^{10} আলোকবর্ষের দূরত্ব হইয়া কারবার করিতে হয়। সকল দূরত্বেই মহাকর্ষীয় সূত্র সত্য কি না? নিচের দিকে, আণবিক দূরত্বের কাছাকাছি (10^{-8} cm) আসিতে থাকিলে অনাহিত দুটি কণার (দুটি পরমাণু বা দুটি নিউট্রনের) মধ্যেও মহাকর্ষ ছাড়া বৈদ্যুত, চৌম্বক ও 'স্পিন' (spin)-এর ক্রিয়া জনিত বিভিন্ন বল ক্রমশঃ বেশী করিয়া অনুভূত হইতে থাকে। ক্রিয়াশীল মোট বল হইতে মহাকর্ষ জনিত বল আলাদা করার কোন উপায় এখনও জানা নাই। অতএব নিচের দিকে কোন্ পর্যন্ত নিউটনের মহাকর্ষীয় সূত্র সত্য তাহা এখনও আমরা বলিতে পারি না।

উপরের দিকে দেখা যায় গ্রহ উপগ্রহের গতি, যুগ্মতারার গতি, ছায়াপথের আবর্তন (galactic rotation) এ সকলই মহাকর্ষের সাহায্যে এত সুষ্ঠুভাবে বর্ণনা করা যায় যে তফাত খুব কমই থাকে। এক্ষেত্রে চরম দূরত্ব 10^{6} আলোক-বর্ষ ক্রমের। আরও বেশী দূরত্বে সূত্রের একটু পরিবর্তন দরকার—ইহার স্বপক্ষে যুক্তি ও কিছু প্রমাণ আছে বলিয়া অনেকেই বিশ্বাস করেন। কাজেই দুই ভর কণায় আকর্ষক বলের আসল সূত্র যাহাই হউক, মহাকর্ষীয় সূত্র তাহার খুব আসন্ন রূপ (close approximation)।

7-3. মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্র, বিভব ও তীব্রতা (Gravitational field, potential and intensity)। মহাকর্ষীয় বল যে অঞ্চলে ক্রিয়া করে তাহাকে মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্র বলে। বৈদ্যুত আধান যেমন নিজের সকল দিকে বৈদ্যুত বলক্ষেত্র সৃষ্টি করে, ভরবিশিষ্ট কণাও সেইরূপ নিজের সকল দিকে মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্র সৃষ্টি করে। অন্য ভর এই ক্ষেত্রে আনিলে উহা পূর্বতন কণার আকর্ষণ জনিত বল অনুভব করে।

নির্দিষ্ট কোন মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে দ্বিতীয় একটি কণা রাখিলে উহার উপর বলের মান ঐ কণার ভর ও স্থানাংকের উপর নির্ভর করিবে। অতিক্ষুদ্র dm ভরের কোন কণা ক্ষেত্রে আনিলে ধরা যায় উহার জন্য বলক্ষেত্রের কোন উল্লেখযোগ্য পরিবর্তন হইবে না। কণার উপর বল dF হইলে dF dm-এর আনুপাতিক বলিয়া dF/dm অনুপাতের মান ঐ বিন্দুতে বল ও ভরের অনুপাত বুঝাইবে। ইহাকে ঐ বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের 'তীব্রতা' (Intensity of gravitation) বলে। সংজ্ঞা হিসাবে বলা চলে

'মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বলের তীব্রতা বলিতে ঐ বিন্দুতে অবস্থিত একক ভরের কণার উপর ক্রিয়াশীল বল বুঝায়।'

কল্পিত এই একক ভরের কণাকে 'পরীক্ষণ ভর' (test mass) বলা যায়। ধরা হয় ইহার উপস্থিতিতে ক্ষেত্রের কোন পরিবর্তন হয় নাই। বৈদ্যুত বা চৌম্বক বলক্ষেত্রের তীব্রতার সংজ্ঞা যেভাবে দেওয়া হয় মহাকর্ষীয় তীব্রতার সংজ্ঞাও ঠিক সেইরূপ।

কোন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় তীব্রতা f হইলে ঐ বিন্দুস্থ m ভরের উপর বল হইবে fm। তীব্রতার মাত্রা = [বল/ভর] = LT^{-2} = ত্বরণের মাত্রা।

7-3.1. মহাকর্ষীয় বিভব। মহাকর্ষীয় বিভবের সংজ্ঞাও বৈদ্যুত বা চৌম্বক বিভবের সংজ্ঞার মত। একক ভরের কণা অনন্ত দূরত্ব হইতে মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে আনিতে মহাকর্ষীয় বলের বিরুদ্ধে যে কার্য হয় তাহাকে ঐ বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব বলে। বিকল্পে বলা যায়, ক্ষেত্রের কোন বিন্দু হইতে একক ভরের কণাকে অনন্ত দূরত্বে সরাইয়া দিতে মহাকর্ষীয় বল যে কার্য করে তাহাই ঐ বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব।

বল আকর্ষক বলিয়া অনন্ত দূরত্ব হইতে ক্ষেত্রীয় বলই কণাকে টানিয়া আনে। ক্ষেত্র সংরক্ষী বলিয়া ইহাতে বলক্ষেত্রের স্থিতিশক্তি কমে। পরীক্ষণ কণা বা অন্য কোন কণা অনন্ত দূরত্বে (ক্ষেত্রের বাহিরে) থাকাকালে ক্ষেত্র ও কণার যৌথ স্থিতিশক্তি শূন্য ধরা হয়। একক ভরের পরীক্ষণ কণাকে বাহির হইতে ক্ষেত্রের কোন বিন্দু P-তে আনিতে ক্ষেত্রীয় বলের বিরুদ্ধে V কার্য হইলে, V ঐ বিন্দুতে বিভব। ঐ বিন্দুতে m ভর আনিতে কার্য হইবে mV। ক্ষেত্র ও m ভর লইয়া যে সংহতি (system), m ভর P বিন্দুতে থাকিলে ঐ সংহতির স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি mV। V নিগেটিভ হয় বলিয়া ইহা আসলে হ্রাস।

স্থিতিশক্তির সহিত সম্পর্ক বিচার করিয়া বলা যায় 'মহাকর্ষীয় বিভব একক ভরের স্থিতিশক্তি'। ইহার মাত্রা = [স্থিতিশক্তি/ভর] = L^2T^{-2} = বেগের বর্গ। নিগেটিভ বৈদ্যুত আধানে সৃষ্ট বৈদ্যুত বিভবের যে আচরণ, মহাকর্ষীয় বিভবেরও সেইরূপ আচরণ।

A ও B বিন্দুতে বিভব V_A ও V_B হইলে একক ভর A হইতে B-তে লইয়া গেলে বিভব বৃদ্ধি = $V_B - V_A$।

7-3.2 মহাকর্ষীয় তীব্রতা ও বিভবে সম্পর্ক। বৈদ্যুত বা চৌম্বক বলক্ষেত্রের মত মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রেও বিভিন্ন বিন্দুতে তীব্রতা বা বিভব

জানা থাকিলে ক্ষেত্রের বর্ণনা সম্পূর্ণ হয়। এই দুই রাশি পরস্পর সম্পর্কিত। সম্পর্ক নীচে দেখান হইল।

V δx V+dV
O A B X
x x+dx

7.1 চিত্র

7.1 চিত্রে OX রেখা মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে যে কোন দিক নির্দেশ করে। ঐ রেখায় A ও B বিন্দু কোন স্বৈচ্ছিক মূল বিন্দু হইতে x ও $x+dx$ দূরে অবস্থিত। A বিন্দুতে AB রেখায় মহাকর্ষীয় তীব্রতার উপাংশ f_x। A হইতে B-তে একক ভর লইয়া যাইতে বলের বিরুদ্ধে কার্য হইবে $-f_x dx$। সংজ্ঞা অনুসারে ইহাই বিভববৃদ্ধি।

$$-f_x dx=(V+dV)-V=dV \quad \text{বা} \quad f_x=-\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (7\text{-}3.1)$$

ইহাই তীব্রতা ও বিভবে সম্পর্ক। ভাষায় বলা যায় 'মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে যে কোন দিকে দূরত্বের সহিত বিভব হ্রাসের হার ঐ দিকে ক্ষেত্রের তীব্রতার উপাংশের সমান।'

V আলোচ্য বিন্দুর নির্দেশাংক x, y, z এর উপর নির্ভর করে বলিয়া আমরা x-এর সহিত V-র পরিবর্তনের হারকে আংশিক অবকল গুণাঙ্ক (partiai differential coefficient) রূপে দেখাইয়াছি।

y-অক্ষে $f_y=-\partial V/\partial y$, এবং z-অক্ষে $f_z=-\partial V/\partial z$।

অতএব $f^2=f_x^2+f_y^2+f_z^2=(\partial V/\partial x)^2+(\partial V+\partial y)^2+(\partial V/\partial z)^2$

এইভাবে বিভব হইতে তীব্রতা পাওয়া যায়। $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ যথাক্রমে x, y, z অক্ষে ঐকিক ভেক্টর হইলে

$$\mathbf{f}=\mathbf{i}f_x+\mathbf{j}f_y+\mathbf{k}f_z=-\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$

$\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ রাশিটি 'ভেক্টর সংকারক' (vector operator)। স্কেলার রাশি V-র উপর ক্রিয়া করিয়া উহা একটি ভেক্টর রাশি সৃষ্টি করে। এই সংকারককে gradient (সংক্ষেপে grad) বলে, এবং সংক্ষেপে উহাকে ∇ (উচ্চারণ 'ডেল') লেখা হয়।

অতএব তীব্রতা ও বিভবের সম্পর্ক আমরা নিচের মত লিখিতে পারি।

$$\mathbf{f} = -\text{grad}\, V \equiv -\nabla V \equiv \left(\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (7\text{-}3.2)$$

7-4. কয়েকটি সহজ ক্ষেত্রে বিভব ও তীব্রতা গণনা।

(১) বিন্দুভর। M ভরের কণা হইতে r দূরত্বে মহাকর্ষীয় সূত্র অনুসারে তীব্রতা, অর্থাৎ একক ভরের উপর বল, হইবে

$$f = -G\frac{M}{r^2} \quad (7\text{-}4.1)$$

বল আকর্ষণ কেন্দ্র M অভিমুখী বলিয়া বিয়োগ চিহ্নটি আসিয়াছে।

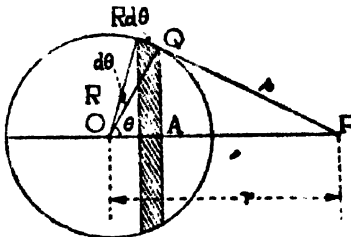
বিভবের সংজ্ঞা অনুসারে M হইতে r দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুতে বিভব

$$\int_r^\infty f dr = -GM \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = GM \qquad GM \quad (7\text{-}4.2)$$

(২) পাতলা গোল খোলক (Thin spherical shell)। 7.2 চিত্রে P বিন্দু R ব্যাসার্ধের কোন পাতলা গোল খোলকের কেন্দ্র O হইতে r দূরত্বে অবস্থিত। খোলকের ভর M, বেধ t এবং উহার পদার্থের ঘনত্ব ρ। অতএব $M = 4\pi R^2 t\rho$। P বিন্দুতে বিভব বাহির করিতে OP-র অভিলম্বে খোলককে অনেকগুলি সরু সরু বলয়ে ভাগ কর। ইহাদের কোন বলয়ের ব্যাসার্ধ $AQ = R\sin\theta$ এবং বিস্তার $Rd\theta$। এই বলয়ের সব কণাগুলিই P হইতে সমান s দূরত্বে। অতএব এই বলয়ের জন্য Pতে বিভব

$$dV = -G \times \text{বলয়ের ভর}/s$$

$$\text{বলয়ের ভর} = 2\pi R\sin\theta . Rd\theta . t\rho = 2\pi\rho t R^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$\text{অতএব } dV = -G.2\pi\rho t R^2 \sin\theta\, d\theta/s \quad (7\text{-}4.3)$$

7.2 চিত্র

সব বলয়ের dV রাশিগুলি যোগ করিলে নির্ণেয় বিভব V পাওয়া যাইবে।

$$V = \Sigma dV = \int dV$$

কিন্তু dV-র θ এবং s উভয় রাশিই চররাশি (variable)। উহাদের একটিকে অপনীত করিতে না পারিলে সমাকলন করা যাইবে না।

$\triangle OPQ$ হইতে দেখা যায়

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2r\,R\cos\theta$$

$$\therefore \quad s\,ds = rR\sin\theta\,d\theta \text{ বা } \sin\theta\,d\theta = s\,ds/r\cdot R.$$

$\sin\theta\,d\theta$-র এই মান 7-4.3 সমীকরণে বসাইলে পাই

$$dV = -G.2\pi\rho t\,R\,ds/r \qquad (7\text{-}4.4)$$

ইহাতে একমাত্র বিষম রাশি s ; অন্যগুলি স্থিরমান। s-এর সম্ভাব্য সকল মানে dV রাশি সমাকলন করিলে V পাইব। s-এর সম্ভাব্য মান P-র অবস্থান বিশেষে তিন ক্ষেত্রে তিন রকম হয়।

(ক) **P বিন্দু খোলকের বাহিরে।** এক্ষেত্রে s-এর মান $r-R$ হইতে $r+R$ পর্যন্ত হইতে পারে। অতএব

$$V = \int dV = -\frac{G\,2\pi\rho t\,R}{r}\int_{r-R}^{r+R} ds = -\frac{G.2\pi\rho t\,R}{r}.\,2R$$

$$= -G\frac{4\pi\,R^2 t\rho}{r} = -\frac{GM}{r} \qquad (7\text{-}4.5)$$

7-4.5 হইতে দেখা যায় O বিন্দুতে M ভরের একটি কণা থাকিলে তাহার জন্য P বিন্দুতে এই বিভবই হইত। এই কারণে আমরা বলি 'মহাকর্ষীয় ব্যাপারে খোলকের বাহিরের কোন বিন্দু সাপেক্ষে খোলকের আচরণ খোলকের ভর উহার কেন্দ্রে সংহত থাকিলে যাহা হইত তাহাই'।

(খ) **P বিন্দু খোলকের পৃষ্ঠে।** এক্ষেত্রে s-এর মান 0 হইতে $2R$ পর্যন্ত হয়। অতএব, $r=R$ বলিয়া,

$$V = -\frac{G\,2\pi\rho t\,R}{R}\int_{0}^{2R} ds = -\frac{G.4\pi R^2 t\,\rho}{R} = -\frac{GM}{R} \qquad (7\text{-}4.6)$$

এখানেও ভর কেন্দ্রে সংহত ধরা চলে।

(গ) P বিন্দু খোলকের ভিতরে ফাঁকা জায়গায়। এক্ষেত্রে s-এর মান $R-r$ হইতে $R+r$ পর্যন্ত হয়। R-এর তুলনায় t অত্যন্ত ছোট বলিয়া খোলকের ভিতরের ব্যাসার্ধ $R-t$ না ধরিয়া আমরা R-ই ধরিব। (t উপেক্ষণীয় না হইলে অবস্থা কি হইবে তাহা এই অনুচ্ছেদের 8 (গ) অংশে বলা হইয়াছে।)

$$\text{অতএব}\quad V=-\frac{G.2\pi\rho tR}{r}\int_{R-r}^{R+r}ds=-\frac{G.2\pi\rho t\,R}{r}.2r$$

$$=-\frac{G\,4\pi\,R^2t\rho}{R}=-\frac{GM}{R}\tag{7-4.7}$$

খোলকের পৃষ্ঠে ও ভিতরে বিভব একই এবং ইহার মান P বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না।

খোলকের ক্ষেত্রীয় তীব্রতা। প্রতিসাম্যের জন্য খোলকের ক্ষেত্রীয় তীব্রতা f সকল স্থানেই খোলকের কেন্দ্রের দিকে হইবে। অতএব P বিন্দুতে তীব্রতা PO অভিমুখী। এই রেখাকে r-অক্ষ ধরিয়া r সাপেক্ষে V-র অবকলন করিলে f-এর পুরা মান পাওয়া যাইবে, উপাংশ নহে।

P খোলকের বাহিরে থাকিলে

$$f=-\frac{dV}{dr}=\frac{d}{dr}.\frac{GM}{r}=-\frac{GM}{r^2}\tag{7-4.8}$$

ঋণ চিহ্নে বুঝায়, r যে দিকে বাড়ে f তাহার বিপরীতে, অর্থাৎ f মূল বিন্দু O-র অভিমুখী। বিভবের মত তীব্রতার ক্ষেত্রেও খোলকের ভর উহার কেন্দ্রে সংহত বলিয়া ধরা যায়, কারণ খোলকের বদলে উহার কেন্দ্রে M ভরের কণা থাকিলে P-তে তীব্রতা একই হইত।

P খোলকের ভিতরে হইলে $f=0$ হইবে, কারণ ভিতরের সর্বত্রই V-র মান সমান। P-র স্থান পরিবর্তনে V বদলায় না বলিয়া $dV/dr=0$ হয়।

P খোলকের পৃষ্ঠে থাকিলে একটু বিশেষ বিবেচনার দরকার হয়। খোলকের বাহিরে V-র পরিবর্তনের হার r-এর সহিত বদলায়। খোলক পর্যন্ত ইহাই চলে। ভিতরে ঢুকিলে V-র মান খোলকের পৃষ্ঠে যাহা ছিল তাহাই থাকিয়া যায়। অতএব খোলকের পৃষ্ঠে f পাইতে হইলে $f=-dV/dr$

সূত্র প্রয়োগ করিয়া $r=R$ অবস্থানে উহার মান লইতে হইবে। এইভাবে পাওয়া যায়

$$f=\left(-\frac{dV}{dr}\right)_{r=R}=\left(-\frac{GM}{r^2}\right)_{r=R}=-\frac{GM}{R^2} \qquad (7\text{-}4.9)$$

এ ক্ষেত্রেও খোলকের ভর কেন্দ্রে সংহত বলিয়া ধরা যায়। খোলকের বাহিরে এবং খোলকের পৃষ্ঠে উভয় ক্ষেত্রেই বিভব এবং তীব্রতা খোলকের কেন্দ্রে অবস্থিত সম-ভার কণার মত হয়।

(৩) নিরেট গোলকের বিভব ও তীব্রতা। নিরেট গোলকের আচরণ পাতলা খোলকের আচরণের সাহায্যে সহজেই বোঝা যায়। এখানেও *P*-র অবস্থানের উপর গোলকের আচরণ নির্ভর করে।

(ক) P বিন্দু গোলকের বাহিরে। নিরেট গোলককে অনেকগুলি সমকেন্দ্রিক পাতলা খোলকে ভাগ কর। আলোচ্য বিন্দু ইহার প্রত্যেক খোলকের বাহিরে। কাজেই বিভব বা তীব্রতা পাইতে প্রত্যেক খোলকের বদলে উহার কেন্দ্রে অবস্থিত সম-ভার একটি কণা নেওয়া যাইতে পারে। সবগুলি খোলকের ভর কেন্দ্রে সংহত বলার অর্থ পূর্ণ গোলকের ভরই কেন্দ্রে সংহত ধরা। অতএব এক্ষেত্রে

$$V=-\frac{GM}{r} \text{ এবং } f=-\frac{GM}{r^2} \qquad (7\text{-}4.10)$$

(খ) P গোলকের পৃষ্ঠে। এ ক্ষেত্রেও প্রত্যেক খোলকের ভর, অর্থাৎ সম্পূর্ণ গোলকের ভর, উহার কেন্দ্রে সংহত বলিয়া ধরা যায়, কারণ আলোচ্য বিন্দু সব খোলকের বাহিরে। গোলকের ব্যাসার্ধ R হইলে

$$V=-\frac{GM}{R} \text{ এবং } f=-\frac{GM}{R^2} \qquad (7\text{-}4.11)$$

পৃথিবীকে মোটামুটি $R=6.4\times10^8$ cm ব্যাসার্ধের ঘন গোলক এবং উহার ভর 5.98×10^{27} g ধরিলে ভূপৃষ্ঠে মহাকর্ষীয় বিভব হইবে $-GM/R$ $=-6.2\times10^{11}$ cm^2s^{-2} (বা erg/g)। এমকেএস এককে ইহার মান -6.2×10^7 m^2s^{-2} (বা J/kg)। ভূপৃষ্ঠে 10 kg ভরের মহাকর্ষীয় স্থিতিশক্তি হইবে -62×10^7 জুল। পৃথিবী হইতে এই ভর অনন্ত দূরত্বে (পৃথিবীর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের বাহিরে) থাকিলে স্থিতিশক্তি=0 ধরা হয়। ভূপৃষ্ঠে আসিলে স্থিতিশক্তি উপরোক্ত পরিমাণ কমে, কারণ পৃথিবী ভরকে টানিয়া আনে ও কার্য করে।

(গ) P গোলকের ভিতরে। P হইতে গোলকের কেন্দ্র O-র দূরত্ব $OP=r$ ধর। O-কে কেন্দ্র করিয়া $OP=r$ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি গোলক টানিয়া প্রদত্ত গোলককে দুই অংশে ভাগ কর। ভিতরের অংশ r ব্যাসার্ধের নিরেট গোলক ; বাহিরের অংশ $R-r$ বেধের খোলক। দুই অংশকেই সমকেন্দ্রিক অনেকগুলি পাতলা খোলকে ভাগ কর। P বিন্দু বাহিরের খোলকগুলির ভিতরে থাকায় উহাদের জন্য P-তে তীব্রতা শূন্য হইবে। P-তে তীব্রতা কেবল ভিতরের নিরেট অংশের জন্য হইবে। এই অংশের ভর $(4/3)\,\pi r^3\rho$। ইহা কেন্দ্রে সংহত বলিয়া ধরা যায়। কেন্দ্র হইতে P-র দূরত্ব r। অতএব

$$f= -G.\tfrac{4}{3}\,\pi\rho\,\frac{r^3}{r^2}=-G\tfrac{4}{3}\,\pi\rho r=-\frac{GM}{R^2}\cdot\frac{r}{R} \qquad (7\text{-}4.12)$$

(মনে রাখিও M সম্পূর্ণ গোলকের ভর)

দেখা যায় এ ক্ষেত্রে তীব্রতা কেন্দ্র হইতে P বিন্দুর দূরত্বের সমানুপাতিক। অন্য ক্ষেত্রের ন্যায় তীব্রতা কেন্দ্রাভিমুখীও বটে।

পৃথিবীকে সমান ঘনত্বের গোলক কল্পনা করিলে দেখা যায় কোন বস্তুকে যত নিচের দিকে নেওয়া যাইবে ততই উহার ভার কমিতে থাকিবে। যে কোন স্থানে ভার ভূকেন্দ্র হইতে দূরত্বের সমানুপাতিক হইবে, এবং কেন্দ্রে ভর থাকিলেও ভার থাকিবে না।

P বিন্দুতে বিভব এই অনুচ্ছেদের (৫) অংশে আলোচিত হইয়াছে (7-4.18 সমীকরণ দেখ)।

(8) ফাঁপা গোলক (Hollow sphere)। ফাঁপা গোলককে মোটা গোল খোলকও (thick spherical shell) বলা যায়। ইহার ভিতরের ব্যাসার্ধ R_1 ও বাহিরের ব্যাসার্ধ R_2 ধরা যাক। ঘনত্ব ρ সুষম হইলে ইহার ভর $M=(4/3)\,\pi\rho\,(R_2{}^3-R_1{}^3)$।

(ক) P বিন্দু গোলকের বাহিরে বা পৃষ্ঠে। নিরেট গোলকের মত ফাঁপা গোলককেও অনেকগুলি পাতলা সমকেন্দ্রিক খোলকে ভাগ করিয়া নেওয়া যায়। নিরেট গোলকে প্রযুক্ত যুক্তি অনুসারে আলোচ্য উভয় ক্ষেত্রেই গোলকের ভর কেন্দ্রে সংহত বলিয়া ধরা চলে। অতএব

গোলকের বাহিরে $V=-GM/r$ ও $f=-GM/r^2$

এবং গোলকের পৃষ্ঠে $V=-GM/R_2$ ও $f=-GM/R_2{}^2$

(খ) *P* বিন্দু ফাঁপার ভিতরে। 7-4.7 সমীকরণে আমরা দেখিয়াছি পাতলা খোলকের ভিতরের ফাঁকা অংশে বিভব সর্বত্র সমান, এবং খোলকের ব্যাসার্ধ r ও বেধ dr হইলে ইহার মান

$$dV = -G.4\pi\rho r\, dr \qquad (7\text{-}4.13)$$

(এখানে 7-4.7 সমীকরণের Vর বদলে dV লেখা হইয়াছে এবং $R=r$ ও $t=dr$ ধরা হইয়াছে।)

মোটা খোলকের ফাঁপার ভিতরে বিভব খোলকের অংশীভূত সকল পাতলা খোলকের বিভবের যোগফল। আলোচ্য বিন্দু ইহাদের সকলেরই ভিতরে। ইহাদের ব্যাসার্ধ R_1 হইতে R_2 পর্যন্ত। অতএব ফাঁপার ভিতরে বিভব

$$V = \int dV = -G.4\pi\rho \int_{R_1}^{R_2} r\, dr$$

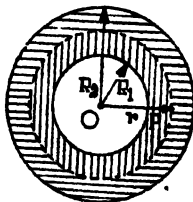
$$= -G\, 2\pi\rho\, (R_2^2 - R_1^2) \qquad (7\text{-}4.14)$$

$$= -G\,.\,\tfrac{4}{3}\pi\rho\,(R_2^3 - R_1^3)\,.\,\tfrac{3}{2}\,.\,\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}$$

$$= -\tfrac{3}{2}\, GM.\frac{R_2 + R_1}{R_2^2 + R_2R_1 + R_1^2} \qquad (7\text{-}4.15)$$

দেখা যায় ফাঁপার ভিতরে সকল জায়গায় V-র মান সমান। অতএব ফাঁপার ভিতরে

$$f = 0 \qquad (7\text{-}4.16)$$

(গ) *P* বিন্দু খোলকের পদার্থের ভিতরে (*P* in the material of the thick shell)। মনে কর P বিন্দু খোলকের কেন্দ্র O হইতে r

7.3 চিত্র

দূরত্বে এবং $R_1 < r < R_2$ (7.3 চিত্র)। OP ব্যাসার্ধের গোলক আলোচ্য

খোলকের পদার্থকে দুই অংশে ভাগ করে। 7-4.14 সমীকরণ অনুসারে এই গোলকের বাহিরের অংশের জন্য P-তে বিভব

$$V_1 = -G.2\pi\rho(R_2^2 - r^2).$$

P বিন্দুতে বিভব বিচারে ঐ গোলকের ভিতরের অংশের ভর উহার কেন্দ্রে সংহত ধরা যায়। এই অংশের জন্য P-তে বিভব

$$V_2 = -G.\tfrac{4}{3}\pi\rho(r^3 - R_1^3)/r$$

অতএব P বিন্দুতে মোট বিভব

$$V = V_1 + V_2 = -G.2\pi\rho\,[\,R_2^2 - r^2 + \tfrac{2}{3}(r^3 - R_1^3)/r\,]$$

$$= -G.\tfrac{4}{3}\pi\rho\,(R_2^3 - R_1^3)\,.\,[\,3R_2^2 - r^2 - 2R_1^3/r\,]/2\,(R_2^3 - R_1^3)$$

$$= -\frac{GM}{2(R_2^3 - R_1^3)}\left(3R_2^2 - r^2 - \frac{2R_1^3}{r}\right) \qquad (7\text{-}4.17)$$

গোলীয় প্রতিসাম্যের জন্য P বিন্দুতে তীব্রতা O বিন্দু অভিমুখী হইবে। অতএব উপরের সমীকরণের সাহায্যে পাই

$$f = -\frac{dV}{dr} = -\frac{GM}{2(R_2^3 - R_1^3)}\left(2r - \frac{2R_1^3}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{GM}{r^2}\cdot\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} = -\frac{GM_r}{r^2} \qquad (7\text{-}4.18)$$

এখানে $M_r = \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - R_1^3)$ হইল $OP = r$ ব্যাসার্ধের খোলকের ভর। দেখা যায় P বিন্দুতে তীব্রতা কেবল OP ব্যাসার্ধের খোলক অংশের জন্য। ইহাই প্রত্যাশিত, কারণ P-তে তীব্রতা উহার বাহিরের খোলক অংশের জন্য হয় না; হয় কেবল ভিতরের অংশের জন্য। এইরূপ যুক্তি দেখাইয়াও $f = -GM_r/r^2$ ফল পাওয়া যাইত।

(ঙ) নিরেট গোলকের ভিতরের কোন বিন্দুতে বিভব। উপরের (গ) অংশের বিশ্লেষণ এখানে প্রযোজ্য। নিরেট গোলকের ক্ষেত্রে $R_1 = 0$ এবং $R_2 = R$ উহার ব্যাসার্ধ। আলোচ্য বিন্দু কেন্দ্র হইতে r দূরত্বে $(r < R)$ হইলে, উহার বাহিরের খোলকের জন্য বিভব

$$V_1 = -G\,2\pi\rho\,(R^2 - r^2) \qquad (7\text{-}4.14 \text{ সমীকরণ})$$

ভিতরের গোলকের ভর কেন্দ্রে সংহত ধরা যায়। অতএব এই অংশের জন্য বিভব

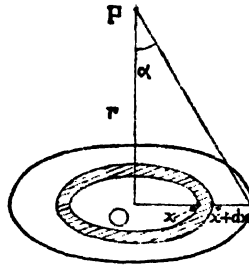
$$V_2 = -G\,\tfrac{4}{3}\pi\rho\,r^2$$

$$\therefore\; V = V_1 + V_2 = -G\,\tfrac{4}{3}\pi\rho\,(\tfrac{3}{2}R^2 - r^2/2)$$

$$= -\frac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2) \qquad (7\text{-}4.19)$$

7-4.17 সমীকরণে $R_1 = 0$ এবং $R_2 = R$ বসাইলেও এই ফল পাওয়া যাইত। তীব্রতা আগেই বাহির করা হইয়াছে (7-4.12 সমীকরণ)। এখান হইতেও উহা পাওয়া যায়।

$$f = -\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr} \cdot \frac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2) = -\frac{GM}{R^2} \cdot \frac{r}{R}$$

$$= -G\frac{M_r}{r^2} \qquad (7\text{-}4.20)$$

7.4 চিত্র

(৬) **সুষম গোল পাতের অক্ষে বিভব ও তীব্রতা।** 7.4 চিত্রের O পাতের কেন্দ্র। উহার ব্যাসার্ধ a এবং তল ঘনত্ব (একক তলের ভর) ρ। P পাতের অক্ষস্থ কোন বিন্দু এবং উহা O হইতে r দূরত্বে। পাতকে সমকেন্দ্রিক অনেকগুলি বলয়ে ভাগ কর। উহার কোন বলয়ের ব্যাস x ও বিস্তার dx ধর। এই সরু বলয়ের সব কণাই P হইতে সমান দূরত্বে মনে করা যায়। এই দূরত্ব $(r^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$। পাতের ভর $2\pi\rho x dx$। অতএব বলয়ের জন্য P-তে বিভব।

$$dV = -G\rho\frac{2\pi\, x\, dx}{(r^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$x = 0$ হইতে $x = a$ পর্যন্ত এইরূপ রাশিগুলি যোগ করিলে P-তে মোট বিভব পাইব। অতএব

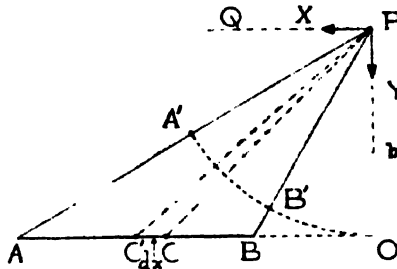
$$V = -2\pi\, G\rho\int_0^a \frac{x\, dx}{(r^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} = -2\pi\, G\rho\left|(r^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\right|_0^a$$

$$= -2\pi\, G\rho(\sqrt{r^2+a^2} - r) \qquad (7\text{-}4.21)$$

প্রতিসাম্যের জন্য তীব্রতা O অভিমুখী। OP অক্ষ r অক্ষ। অতএব তীব্রতা

$$f=-\frac{dV}{dr}=-2\pi G\rho\left(1-\frac{r}{(r^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \qquad (7\text{-}4.22)$$

পাতের ব্যাসার্ধ P বিন্দুতে α কোণ উৎপন্ন করিলে $r/(r^2+a^2)^{\frac{1}{2}}=\cos\alpha$। পাত P বিন্দুতে যে ঘন কোণ (solid angle) উৎপন্ন করে তাহার মান $\omega=2\pi(1-\cos\alpha)$। অতএব লেখা যায়

$$f=-2\pi G\rho(1-\cos\alpha)=-G\rho\omega \qquad (7\text{-}4.23)$$

7.5 চিত্র

(৭) **সরু দণ্ডের জন্য তীব্রতা।** 7.5 চিত্রে AB একটি সরু দণ্ড ও উহার রৈখিক ঘনত্ব (একক দৈর্ঘ্যের ভর) ρ। P বিন্দুতে তীব্রতা বাহির করিতে হইবে। AB-র উপর PO লম্ব টান। OBA রেখায় O হইতে x দূরত্বে $dx(=CC')$ দৈর্ঘ্যের দণ্ডের খুব ছোট একটি টুকরা নাও। উহার জন্য P-তে তীব্রতার মান হইবে $G\rho dx/PC^2$। $OP=p$ এবং $\angle OPC=\theta$ হইলে, $PC=p\sec\theta$, $OC=x=p\tan\theta$ ও $dx=p\sec^2\theta d\theta$ হইবে।

$$\therefore \; G\rho\frac{dx}{PC^2}=G\rho\frac{p\sec^2\theta\, d\theta}{p^2\sec^4\theta}=G\rho\frac{d\theta}{p} \qquad (7\text{-}4.24)$$

PQ ও PO রেখায় ইহার উপাংশ যথাক্রমে $(G\rho/p)\sin\theta d\theta$ ও $(G\rho/p)\cos\theta d\theta$। দণ্ডের প্রত্যেক টুকরার একমুখী উপাংশগুলি যোগ করিলে মোট তীব্রতার উপাংশ পাইব। $\angle OPA=\alpha$ ও $\angle OPB=\beta$ হইলে যোগে θ-র প্রান্তীয় মান β ও α হইবে। অতএব PQ অক্ষে তীব্রতার মোট উপাংশ

$$=\frac{G\rho}{p}\int_{\beta}^{\alpha}\sin\theta\, d\theta=\frac{G\rho}{p}(\cos\beta-\cos\alpha)$$

$$=\frac{2G\rho}{p}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

এবং PO অক্ষে তীব্রতার মোট উপাংশ

$$Y=\frac{G\rho}{p}\int_{\beta}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta=\frac{G\rho}{p}(\sin\alpha-\sin\beta)$$

$$=\frac{2G\rho}{p}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\text{ ।}$$

অতএব তীব্রতার মান

$$f=(X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{2G\rho}{p}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{2G\rho}{p}\sin\tfrac{1}{2}APB \tag{7-4.25}$$

এবং ইহা PO-র সহিত $\tan^{-1}(X/Y)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ কোণ উৎপন্ন করে। ইহা হইতে দেখা যায় তীব্রতার অভিমুখ APB কোণের সমদ্বিখণ্ডক বরাবর।

7-4.24 সমীকরণ হইতে দেখা যায় p ব্যাসার্ধের $pd\theta$ দৈর্ঘ্যের ও ρ রৈখিক ঘনত্বের চাপ (arc) উহার কেন্দ্রে যে তীব্রতার সৃষ্টি করে dx টুকরা P-তেও তাহাই করে। অতএব AB-র বদলে আমরা যদি P-কে কেন্দ্র করিয়া PA ও PB রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ব্যাসার্ধের চাপ রাখিতাম এবং ইহার রৈখিক ঘনত্ব ρ হইত, তাহা হইলে এই চাপের জন্য P-তে তীব্রতা AB-র তীব্রতার সমান হইত।

7-4.1. সমসত্ত্ব গোলকের মহাকর্ষীয় স্বতঃশক্তি (Gravitational self-energy of a homogeneous sphere)। মনে কর কণা কণা করিয়া অনন্ত দূরত্ব হইতে ভর আনিয়া R ব্যাসার্ধের এবং মোট M ভরের একটি সমসত্ত্ব গোলক গঠন করা হইল। ঐ গোলকের নিজস্ব মহাকর্ষীয় শক্তি কত হইবে?

ইহা হিসাব করিতে ধর কোন এক সময়ে r ব্যাসার্ধের একটি গোলক যেন ঐ ভাবে গঠিত হইয়াছে। উহার পিঠে মহাকর্ষীয় বিভব $V_r=-Gm/r=-G(4/3)\pi r^2\rho$ (ρ = গোলকের পদার্থের ঘনত্ব)। এই অবস্থায় অনন্ত দূরত্ব হইতে স্বল্পভর dm আনিয়া ঐ গোলকের ব্যাসার্ধ যেন dr বাড়ান হইল। ইহাতে যে কার্য হইল তাহার মান $V_r dm$। dm এর জন্য গোলকের ব্যাসার্ধ

dr বাড়ায় দুই-এ সম্পর্ক $dm = 4\pi r^2 dr\rho$। অতএব dr ব্যাসার্ধ বাড়াইতে কার্য হইল $V_r dm = -G(4/3)\pi r^2\rho . 4\pi r^2 dr\rho = -G(16/3)\pi^2\rho^2 r^4 dr$। 0 হইতে আরম্ভ করিয়া R পর্যন্ত ব্যাসার্ধ বাড়াইতে মোট কার্য হইবে $W = \int V_r dm = -\int_0^R G(16/3)\pi^2\rho^2 r^4 dr = -G(16/15)\pi^2\rho^2 R^5$
$= -G\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{R} = -\frac{3}{5}GM^2/R$।

ঋণ চিহ্নে বুঝায় গোলক গঠন করিতে পদার্থ কণাগুলি নিজেরাই মহাকর্ষীয় টানে কার্য করিয়াছে। শক্তির নিত্যতা সূত্র অনুসারে এই কার্য গোলকের নিজস্ব মহাকর্ষীয় শক্তিরূপে সঞ্চিত থাকে।

7-5. গাউসের সূত্র (Gauss' theorem)। মহাকর্ষীয়, বৈদ্যুত ও চৌম্বক বলক্ষেত্র দূরত্বের বিষমবর্গীয় সূত্র মানিয়া চলে। ভর, বৈদ্যুত আধান ও চৌম্বক মেরু যথাক্রমে এই তিন প্রকার বলক্ষেত্র সৃষ্টি করে।

গাউসের সূত্র বিষমবর্গীয় বলক্ষেত্রের তীব্রতার সহিত ক্ষেত্রের উৎসের (ভর, আধান বা মেরুশক্তির) একটি সহজ সম্পর্ক প্রকাশ করে। মহাকর্ষের ক্ষেত্রে ইহাতে বলে

'মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে কোন বদ্ধতল (closed surface) লইলে ঐ তল ভেদ করিয়া ক্ষেত্রের তীব্রতার মোট বহির্মুখী ফ্লাক্স্ (total outward flux) তল দিয়া ঘেরা মোট ভর m-এর $4\pi G$ গুণ হইবে।'

ফ্লাক্স্। যে অঞ্চলের কোন বিন্দুতে কোন ভেক্টর A-র মান ঐ বিন্দুর স্থানাংকের উপর নির্ভর করে সেই অঞ্চলকে ঐ ভেক্টরের ক্ষেত্র (field) বলে। এই ক্ষেত্রে কোন স্বল্পাংশ তল (element of surface) dS ধরিলে এবং dS-এর অভিলম্ব ও A-র অভিমুখের মধ্যবর্তী কোণ θ হইলে, $A\,dS\,\cos\theta$ রাশিটিকে ঐ তল ভেদ করিয়া A-র ফ্লাক্স্ বলে। লক্ষ্য কর যে $A\cos\theta$ রাশিটি dS-তলের অভিলম্বে A-র উপাংশ। তল পরিমিত হইলে ফ্লাক্স্ (ϕ) হইবে

$$\phi = \int A\,dS\cos\theta.$$

কোন তলের লম্ব উহার দুই দিকে টানা যাইতে পারে। বহির্মুখী ফ্লাক্স্ গণনায় ইহার কোন্‌টি পজিটিভ ধরা হইবে তাহা স্থির করিয়া দিতে হইবে। বর্তমান রীতি অনুসারে, তল বাঁদিকে রাখিয়া তলের সীমারেখা ধরিয়া কেহ হাঁটিয়া যাইতেছেন কল্পনা করিলে তাঁহার মাথা যেদিকে থাকিবে ফ্লাক্স্ গণনায় তলের সেই দিকের লম্ব পজিটিভ ধরা হইবে। ইহা অন্যভাবেও প্রকাশ করা যায়। ডান হাতের বুড়া আঙুল সোজা রাখিয়া মুঠা করা অন্য আঙুলগুলি

তলের সীমারেখার সঙ্গে বামাবর্তে (anticlockwise) মিলাইলে, বুড়া আঙুল তলের লম্বের দিক্ নির্দেশ করিবে। ইহাকে আমরা তলের 'পজিটিভ' লম্ব বলিব।

গাউস সূত্র প্রয়োগকালে বদ্ধতলের সকল অংশে পজিটিভ লম্ব বাহিরের দিকে ধরা হয়। (অনেক আগেকার লেখায় কোথাও কোথাও ইহার বিপরীত দেখা যাইতে পারে। অতএব লম্ব কোন্ দিকে পজিটিভ ধরা হইয়াছে সে বিষয়ে পাঠককে সতর্ক থাকিতে হইবে।)

মহাকর্ষীয় তীব্রতার ফ্লাক্স্। কোন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের তীব্রতা **f** দিয়া বুঝাইলে এবং ঐ বিন্দু ঘেরিয়া স্বল্পাংশ তল dS লইলে dS-এর পজিটিভ লম্বের সহিত **f** যদি θ কোণে থাকে, তাহা হইলে ফ্লাক্সের সংজ্ঞা অনুসারে dS তল ভেদ করিয়া তীব্রতার ফ্লাক্সের মান

$$d\phi = f\, dS \cos\theta \tag{7-5.1}$$

বদ্ধতলের ক্ষেত্রে পজিটিভ লম্ব বহির্মুখী। বদ্ধতলকে এইরূপ বহু-সংখ্যক স্বল্পাংশ তলে ভাগ করিয়া সবগুলি তলের ফ্লাক্স্ যোগ করিলে মোট বহির্মুখী ফ্লাক্স্ পাওয়া যাইবে। অতএব তীব্রতার মোট বহির্মুখী ফ্লাক্স্

$$\phi = \oint d\phi = \oint f dS \cos\theta \tag{7-5.2}$$

$\oint$ চিহ্ন দ্বারা সম্পূর্ণ বদ্ধতলে সমাকলন বুঝায়।

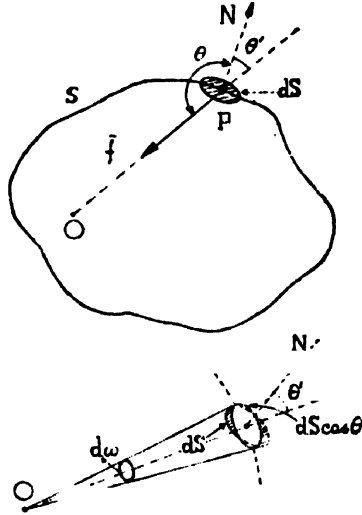
$f\, dS \cos\theta$ রাশিটি অন্যভাবেও লেখা যায়। $f\cos\theta$ তলের লম্বের অভিমুখে **f**-এর উপাংশ। এই উপাংশ $= f_n$ লিখিলে $f\, dS\cos\theta = f_n dS$। স্বল্পাংশ তল dS-কে ভেক্টর রাশি বলিয়াও ধরা যায়। এই ভেক্টরের অভিমুখ উহার 'পজিটিভ' লম্বের দিকে। লম্বের অভিমুখে **n** ঐকিক ভেক্টর হইলে তল-ভেক্টর হইবে $\mathbf{n}\, dS$; ইহার অভিমুখ **n** এবং মান dS। $\mathbf{n}\, dS$কে সংক্ষেপে $d\mathbf{S}$'ও লেখা যায়। অতএব

$$f\, dS\cos\theta \equiv f_n\, dS \equiv \mathbf{f}.\mathbf{n}\, dS \equiv \mathbf{f}.d\mathbf{S}. \tag{7-5.3}$$

তলে ঘেরা স্থানে ভর যদি একাধিক কণার সমষ্টি হয় এবং m যে কোন কণার ভর বুঝায়, তাহা হইলে মোট ভর $= \Sigma m$। ভর অবিচ্ছিন্ন থাকিলে তলে ঘেরা আয়তন V-কে অনেকগুলি স্বল্পাংশ আয়তন dV-তে ভাগ করিলে এবং ρ ঐরূপ অংশে ভরের ঘনত্ব বুঝাইলে, dV অংশে ভর ρdV, এবং ঘেরা অংশে মোট $\int \rho dV$। অতএব **গাউস সূত্রের গাণিতিক রূপ হইল**

$$\oint f dS\cos\theta = -4\pi G\Sigma m$$
$$= -4\pi G \int \rho dV \tag{7-5.4}$$

এই সমীকরণের বাঁদিকে সমাকল্যের রূপ 7-5.3তে দেওয়া যে কোনটি হইতে পারে, কারণ উহারা সকলে একই জিনিস বুঝায়।

গাউস সূত্রের প্রমাণ। গাউস সূত্রের সংক্ষিপ্ত একটি প্রমাণ আমরা এখানে আলোচনা করিব। 7.6 চিত্রে O বিন্দুস্থ m ভরের কণায় সৃষ্ট মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে S m-কে ঘেরিয়া একটি বদ্ধতল। P এই তলে কোন বিন্দু এবং dS P-কে ঘেরিয়া S তলের স্বল্পাংশ। PN dS-এর বহির্মুখী লম্ব। P-তে তীব্রতা f PO রেখায় ক্রিয়া করে। PN ও PO-র মধ্যবর্তী কোণ θ এবং $\theta' = \pi - \theta$। O হইতে P-র দূরত্ব $OP = r$ হইলে তীব্রতার মান $f = Gm/r^2$।

7.6 চিত্র

dS তল ভেদ করিয়া f-এর বহির্মুখী ফ্লাক্স্

$$d\phi = f dS \cos\theta = G\frac{m}{r^2} dS\cos\theta = -G\frac{m}{r^2} dS\cos\theta'$$

dS-এর সীমারেখার সকল বিন্দুগুলি O-তে যোগ করিলে O-কে শীর্ষ করিয়া খুব সরু একটি শঙ্কু উৎপন্ন হয়। এই শঙ্কুর শীর্ষের ঘনকোণ O বিন্দুতে dS দ্বারা উৎপন্ন। O-কে কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধের একটি গোলক আঁকিলে ঐ শঙ্কুর সীমারেখাগুলি গোলকের পৃষ্ঠে যে তল চিহ্নিত করিবে তাহার মান $dS\cos\theta'$। ঘনকোণের সংজ্ঞা অনুযায়ী আলোচ্য ঘনকোণের মান

$$d\omega = \frac{dS\cos\theta'}{r^2}$$

অতএব $d\phi = -G\,m\,d\omega$

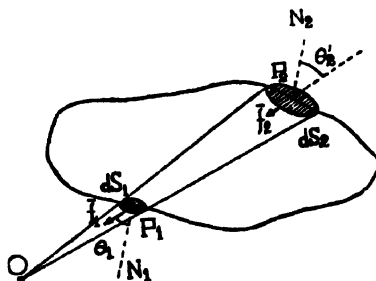
সম্পূর্ণ বদ্ধতল ভেদ করিয়া মোট ফ্লাক্স্

$$\phi = -Gm \oint d\omega = -4\pi Gm$$

কারণ $\oint d\omega = 4\pi$। নিগেটিভ চিহ্নের অর্থ ফ্লাক্স্ অন্তর্মুখী।

বদ্ধস্থানে m ভিন্ন অন্য কণা থাকিলে প্রত্যেকটি কণার জন্যই অনুরূপ ফল পাওয়া যাইবে। ফ্লাক্স্ স্কেলার রাশি বলিয়া এক্ষেত্রে পাইব

$$\oint f dS \cos\theta = -4\pi G \Sigma m.$$

বদ্ধতলের ভিতরে ভর না থাকিলে $\Sigma m = 0$ হওয়ায় $\phi = 0$ হইবে। এক্ষেত্রে দেখা যায় বদ্ধস্থানে যে পরিমাণ ফ্লাক্স্ ঢোকে, তাহার সবটাই বিপরীত দিক দিয়া বাহির হইয়া যায়। 7.7 চিত্র হইতে ইহা বোঝা যাইবে। O হইতে একটি সরু শঙ্কু টানিয়া বদ্ধতলকে dS_1 ও dS_2-তে ছেদ কর। dS_1 তলে ফ্লাক্স্ হইবে $f_1 dS_1 \cos\theta_1 = Gm(dS_1 \cos\theta_1)/r_1^2$ এবং dS_2 তলে হইবে $-Gm(dS_2 \cos\theta'_2)/r_2^2$। O-তে dS_1 এবং dS_2 তল দ্বারা উৎপন্ন ঘনকোণ সমান এবং উহার মান $d\omega = (dS_1 \cos\theta_1)/r_1^2 = (dS_2 \cos\theta'_2)/r_2^2$। অতএব এই শঙ্কু দিয়া বদ্ধতলে dS_2 ভেদ করিয়া যে ফ্লাক্স্ ঢোকে তাহাই dS_1 দিয়া বাহির হইয়া যায়। O হইতে শঙ্কু টানিয়া সমস্ত বদ্ধতলকে এইরূপ জোড়া জোড়া তলে ভাগ করিয়া দেখা যায় ক্ষেত্রসৃষ্টিকারী ভর বদ্ধতলের বাহিরে থাকিলে তল ভেদ করিয়া যে ফ্লাক্স্ ঢোকে তাহার সবটাই বাহির হইয়া যায় এবং মোট বহির্মুখী ফ্লাক্সের মান হয় শূন্য।

7.7 চিত্র

গাউস সূত্রের নানাবিধ প্রয়োগ হইতে পারে। বিদ্যুতের ক্ষেত্রে ইহার প্রয়োগ সবচেয়ে বেশী হইলেও আমরা মহাকর্ষে কয়েকটি প্রয়োগ আলোচনা করিব।

7.6. গাউস সূত্রের কয়েকটি সহজ প্রয়োগ। গাউস সূত্রে উল্লিখিত বদ্ধতলকে 'গাউসীয় তল' (Gaussian surface) বলে। গাউসীয় তল দরকার মত যে কোনভাবে নেওয়া চলে ; ইহা কোন শর্তের অধীন নয়। কয়েকটি সরল জ্যামিতিক আকারের বস্তু দ্বারা সৃষ্ট ক্ষেত্রের তীব্রতা গাউস সূত্রের সাহায্যে খুব সহজে বাহির করা যায়।

(১) গোলক। গোলক সমসত্ত্ব হইলে উহার প্রতিসাম্যের জন্য তীব্রতা কেন্দ্র হইতে সমান দূরে সমান এবং কেন্দ্রগ হইবে। গোলকের সমকেন্দ্রিক r ব্যাসার্ধের কোন গাউসীয় তল ধরিলে ইহার সর্বত্র তীব্রতা f একই, এবং ঐ তলের যে কোন বিন্দুতে বহির্মুখী লম্বের সহিত f-এর কোণ π। গাউসীয় তলে f-এর মোট বহির্মুখী ফ্লাক্স্

$$\phi=(f\cos\pi)(\Sigma\, dS)=-4\pi r^2 f.$$

গাউসের সূত্র অনুসারে ইহার মান $-4\pi G\Sigma m$। ইহা ϕ-এর সমান বলিয়া পাই

$$f=G\Sigma m/r^2 \qquad (7\text{-}6.1)$$

ইহা f-এর মান ; f কেন্দ্রমুখী তাহা আগেই ধরা হইয়াছে। এরূপ না ধরিলে f তলের বহির্মুখী লম্বের অভিমুখে ধরিলে উহাদের মধ্যবর্তী কোণ 0 হইত। তখন পাওয়া যাইত $\phi=+4\pi r^2 f$। ইহা $-4\pi G\Sigma m$-এর সমান বলিয়া পাইতাম $f=-G\Sigma m/r^2$।

(ক) r>R বা r=R। গাউসীয় তলের ব্যাসার্ধ r গোলকের ব্যাসার্ধ R-এর চেয়ে বড় বা উহার সমান হইলে Σm গোলকের ভর M-এর সমান হইবে। অতএব

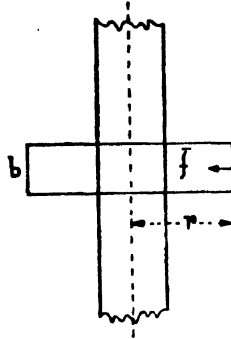
গোলকের বাহিরে $f=-GM/r^2$

এবং গোলকের পৃষ্ঠে $f=-GM/R^2$.

গোলকের বদলে M ভরের কণা উহার কেন্দ্রে থাকিলে r ও R দূরত্বে তীব্রতা একই হইত। অতএব উভয় ক্ষেত্রে গোলকের ভরকেন্দ্রে সংহত ধরা চলে।

(খ) r<R হইলে আলোচ্য বিন্দু গোলকের ভিতরে এবং $\Sigma m=$ গাউসীয় তলে ঘেরা ক্ষুদ্রতর গোলকের ভর M_r। গোলক নিরেট হইলে $M_r=(4/3)\pi r^3\rho$ ও ফাঁপা হইলে $M_r=(4/3)\pi\rho(r^3-R_1^3)$। উভয় ক্ষেত্রে $f=-GM_r/r^2$। এ ফল আমরা আগেই পাইয়াছি। এক্ষেত্রেও M_r কেন্দ্রে সংহত ধরা যায়।

(২) লম্বা বেলন। লম্বা বেলনের মাঝামাঝি জায়গায় বেলনের কাছে

উহার প্রান্তের ক্রিয়া উপেক্ষা করা যায়। বেলনের দৈর্ঘ্য সীমাহীন ধরিলে, উহার কাছে বা দূরে প্রতিসাম্যের জন্য অক্ষ হইতে সমান দূরে তীব্রতা একই হইবে এবং উহার ক্রিয়ামুখ বেলনের অক্ষাভিমুখী ও অক্ষের অভিলম্বে থাকিবে।

7.8 চিত্র

বেলনের অক্ষ হইতে r দূরত্বে তীব্রতার মান বাহির করিতে r ব্যাসার্ধের আর একটি সমাক্ষ বেলন কল্পনা কর। b দূরত্বে অবস্থিত এবং অক্ষের অভিলম্ব দুইটি সমান্তরাল তল দিয়া উহার চাকতির মত একটি অংশ আলাদা করিয়া ধর (7.8 চিত্র)। এই চাকতির তলগুলি লইয়া গাউসীয় বদ্ধতল গঠিত।

তীব্রতা অক্ষের অভিলম্বে ক্রিয়া করায় চাকতির দুই সমতল অংশ ভেদ করিয়া f-এর কোন ফ্লাক্স্ থাকিবে না। ফ্লাক্স্ কেবল পাশের বাঁকা তল দিয়া যাইবে। এই বাঁকা তলের ক্ষেত্রফল $2\pi rb$। f ইহার সকল বিন্দুতে সমান এবং f ও বহির্মুখী লম্বের মধ্যবর্তী কোণ π। অতএব আলোচ্য তল ভেদ করিয়া মোট বহির্মুখী ফ্লাক্স্ $\phi = -f.2\pi rb$। বেলনের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর ρ হইলে তলে আবদ্ধ ভর $\Sigma m = b\rho$। অতএব গাউস সূত্র অনুসারে

$$\phi = -f.2\pi rb = -4\pi Gb\rho$$

$$\text{বা } f = 2G\rho/r \qquad (7\text{-}6.2)$$

ইহা f-এর মান। ক্রিয়ামুখের কথা আগেই বলা হইয়াছে। ক্রিয়ামুখ বহির্মুখী লম্বের দিকে ধরিলে $\theta = 0$ এবং $\phi = f.2\pi rb$। তখন

পাইতাম $f=-2G\rho/r$। ঋণ চিহ্নের অর্থ f যে দিকে ধরা হইয়াছিল আসলে তাহার বিপরীতমুখী।

7-7. লাপ্লাস ও পোয়াসঁর সমীকরণ (Laplace and Poisson's equations)। আগের অনুচ্ছেদে গাউস সূত্র প্রয়োগে আমরা তীব্রতা গণনা করিয়াছি। তীব্রতা বিভবের সঙ্গে ঘনিষ্ঠভাবে সম্পর্কিত (7-3:2 অনুচ্ছেদ)। অতএব গাউস সূত্রের সাহায্যে বিভব সম্বন্ধেও প্রয়োজনীয় তথ্য পাওয়া সম্ভব।

বিষমবর্গীয় বলক্ষেত্রে বিভব সংক্রান্ত দুইটি মৌলিক সমীকরণ আছে। ইহাদের একটি লাপ্লাসের নামে, ও অন্যটি পোয়াসঁর নামে পরিচিত। লাপ্লাসের সমীকরণ হইল

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

যে অঞ্চলে ভর রাখা নাই সেরূপ শূন্যস্থানে মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের বিভব V এই সমীকরণ মানিয়া চলে। (বৈদ্যুত বা চৌম্বক বিভবের ক্ষেত্রেও ইহা প্রযোজ্য।)

$\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$ একটি অবকলীয় সংকারক (differential operator); ইহাকে ∇^2-ও লেখা হয় (2-9.4 অনুচ্ছেদ)। ∇ ('ডেল') সংকারকের কথা আমরা 7-3.2 অনুচ্ছেদে বলিয়াছি। ∇-কে ভেক্টর রাশির মত মনে করা যায়, এবং ∇-কে ∇ দিয়া স্কেলার বা ভেক্টর গুণন করা যায়। স্কেলার গুণন

$$\nabla.\nabla\equiv\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ (লাপ্লাসীয় সংকারক)}$$

∇ এর সহিত যে কোন ভেক্টরেরও স্কেলার গুণফল নেওয়া যায়। **A** ভেক্টরটি নির্দেশাংকের উপর নির্ভর করিলে ∇ ও **A**-র স্কেলার গুণফল $\nabla.\mathbf{A}\equiv\text{div }\mathbf{A}\equiv\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$। 'div' কথাটি divergence এর সংক্ষেপ। কোন ভেক্টরের divergence স্কেলার রাশি (2-9.2 অনুচ্ছেদ দেখ)।

অতএব লাপ্লাসের সূত্র নিচের যে কোন ধরনে লেখা যায়ঃ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\equiv\nabla^2 V\equiv\nabla.\nabla V\equiv\text{div. grad } V=0 \qquad (7\text{-}7.1)$$

ভর অধ্যুষিত অঞ্চলে পোয়াসঁর সমীকরণ প্রযোজ্য। কোন স্থানে ভরের ঘনত্ব ρ হইলে ঐ স্থানে মহাকর্ষীয় বিভব V নিচের সমীকরণ মানিয়া চলিবে :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\left(\equiv\nabla^2 V\equiv\nabla.\nabla V\equiv\text{div grad } V\right)=4\pi G\rho \tag{7-7.2}$$

ইহাই পোয়াসঁর সমীকরণ।

প্রমাণ। ভেক্টর সংক্রান্ত 'ডাইভারজেন্স্ সূত্র' (divergence theorem ; 2-11.1 অনুচ্ছেদ দেখ) মানিয়া লইলে গাউস সূত্র হইতে অতি সহজেই আলোচ্য সমীকরণ দুটি পাওয়া যায়। ডাইভারজেন্স্ সূত্র কোন ভেক্টর ক্ষেত্রে ঐ ভেক্টরের ফ্লাক্স্ ও ডাইভারজেন্সের সম্পর্ক প্রকাশ করে। ভেক্টর ক্ষেত্রে কোন বদ্ধতল ধরিলে ঐ তল ভেদ করিয়া ঐ ভেক্টর A-র মোট বহির্মুখী ফ্লাক্স্ হইবে $\oint A\, dS \cos\theta=\oint \mathbf{A}.d\mathbf{S}$। বদ্ধস্থানকে বহুসংখ্যক স্বল্পাংশ আয়তন dV-তে ভাগ করিয়া প্রত্যেক dV-কে ঐ অংশের div A দিয়া গুণ করিয়া সম্পূর্ণ বদ্ধস্থানে এইরূপ রাশিগুলি যোগ করিলে পাইব $\int \text{div }\mathbf{A}\, dV\equiv\int \nabla.\mathbf{A}\, dV$। ডাইভারজেন্স্ সূত্রে বলে এই দুই রাশি সমান, অর্থাৎ

$$\int \text{div }\mathbf{A}\; dV=\oint \mathbf{A}.d\mathbf{S}' \tag{7-7.3}$$

ডাইভারজেন্স্ সূত্র অনুসারে গাউসীয় বদ্ধতলে সমাকল

$$\oint f dS\cos\theta\equiv\oint \mathbf{f}.d\mathbf{S}'=\int \text{div }\mathbf{f}\, dV\equiv\int\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)dV$$

অতএব 7-5.4 সমীকরণ অনুসারে গাউস সূত্রের রূপ হয়

$$\int \text{div }\mathbf{f}\; dV=-4\pi G\int \rho\, dV \tag{7-7.4}$$

উভয় সমাকলই গাউসীয় তলে ঘেরা সম্পূর্ণ আয়তনের উপর লইতে হইবে। যেহেতু আমরা যে কোন আয়তন ইচ্ছামত লইতে পারি সেহেতু সমাকল্য (integrand) দুটি সমান হইলেই 7-7.4 সমীকরণ সর্বআয়তনে শুদ্ধ হইবে। অতএব,

$$\text{div }\mathbf{f}\equiv\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}=-4\pi G\rho \tag{7-7.5}$$

7-3.2 অনুচ্ছেদে আমরা f ও V-র সম্পর্ক পাইয়াছি।

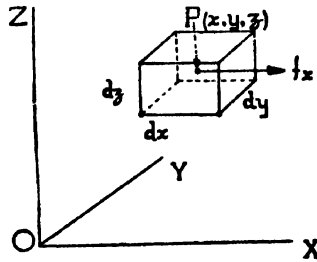
$$f_x=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad f_y=-\frac{\partial V}{\partial y},\quad f_z=-\frac{\partial V}{\partial z} \tag{7-7.6}$$

অতএব 7-7.5 হইয়া দাঁড়ায়

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=4\pi G\rho \qquad (7\text{-}7.7)$$

ইহাই পোয়াসঁর সমীকরণ। গাউসীয় তলের ভিতরে ভর না থাকিলে $\rho=0$ হওয়ায় 7-7.7 লাপ্লাস সমীকরণে পরিণত হয়।

বিকল্প প্রমাণ। ডাইভারজেন্স্ সূত্রের সাহায্য ছাড়াও আমরা সোজাসুজি গণনা করিয়া গাউস সূত্রের সাহায্যে 7-7.5 সমীকরণে, ও তখন 7-7.6-এর সাহায্য লইয়া আলোচ্য দুই সমীকরণে আসিতে পারি। নিচে ইহা করা হইল।

মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে কোন আলোচ্য বিন্দু P-কে মধ্য বিন্দুতে রাখিয়া আয়তাকার স্বল্পাংশ আয়তন dV কল্পনা কর (7.9 চিত্র)। ইহার বাহু তিনটি dx, dy, dz। P-র স্থানাংক x, y, z এবং ঐ স্থানে মহাকর্ষীয় তীব্রতার উপাংশ f_x, f_y, f_z।

7.9 চিত্র

f_x-এর জন্য dV-তে x-অক্ষের অভিলম্ব তল ভেদ করিয়া f-এর যে ফ্লাক্স্ প্রবেশ করে তাহার মান

$$\left(f_x-\tfrac{1}{2}\frac{\partial f_x}{\partial x}\,dx\right)dy\,dz$$

বিপরীত তল দিয়া যে ফ্লাক্স্ বাহির হইয়া যায় তাহার মান

$$\left(f_x+\tfrac{1}{2}\frac{\partial f_x}{\partial x}\,dx\right)dy\,dz$$

অতএব f_x-এর মোট বহির্মুখী ফ্লাক্স্

$$\frac{\partial f_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

অনুরূপে পাওয়া যায় f_y-র মোট বহির্মুখী ফ্লাক্স্ $\frac{\partial f_y}{\partial y} dx\ dy\ dz$ এবং f_z-এর মোট বহির্মুখী ফ্লাক্স্ $\frac{\partial f_z}{dz} dx\ dy\ dz$। এই তিনটির যোগফল dV-র বদ্ধতল ভেদ করা f এর মোট বহির্মুখী ফ্লাক্স্। ইহার মান

$$\phi = \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) dx\ dy\ dz$$

dV-তে ভরের ঘনত্ব ρ হইলে dV-র ভিতরে মোট ভর $\rho dV = \rho dx\ dy\ dz$। গাউস সূত্র অনুসারে উপরোক্ত ফ্লাক্স্ $-4\pi G\rho dV$-র সমান হইবে। অতএব

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = -4\pi G\rho$$

ইহাই 7.7-5 সমীকরণ। বাকী অংশ আগের মত।

7.8. পলায়নের বেগ (Escape of velocity)। মহাকর্ষীয় বল কেন্দ্রগ বলিয়া সংরক্ষী। এই বলের ক্রিয়াধীন কণার স্থিতি ও গতিশক্তির যোগফল স্থির থাকিবে, অর্থাৎ একের হ্রাস অন্যের বৃদ্ধির সমান হইবে।

চলিত রীতিতে ভরবিশিষ্ট কোন কণা কোন মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের বাহিরে (অনন্ত দূরত্বে) থাকিলে ক্ষেত্র সাপেক্ষে উহার স্থিতিশক্তি শূন্য ধরা হয়। এই অবস্থায় উহার কোন গতিশক্তিও না থাকিলে উহার মোট শক্তি শূন্য বলিতে হইবে। আকর্ষক বল উহাকে ক্ষেত্রের ভিতরে টানিয়া লইতে থাকিলে উহার স্থিতিশক্তি কমিবে এবং গতিশক্তি সমপরিমাণ বাড়িবে।

ধরা যাক M ভরের R ব্যাসার্ধের কোন গোলকের আকর্ষণে m ভরের কণা অনন্ত দূরত্ব হইতে উহার কেন্দ্রের দিকে আসিতেছে। কেন্দ্র হইতে r দূরত্বে অবস্থিত $(r>R)$ P বিন্দুতে বিভব $V = -GM/r$, এবং কণা P-তে আসিলে উহার স্থিতিশক্তি mV। অতএব কণার স্থিতিশক্তি হ্রাস $= -mV = GMm/r$। r দূরত্বে কণার বেগ v_∞* হইয়া থাকিলে উহার গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv_\infty^2$।

---

* কণা অনন্ত দূরত্ব হইতে আসিয়াছে বলিয়া আমরা Vর সঙ্গে ∞ চিহ্ন দিয়াছি।

আদিতে কণা স্থির ছিল ধরিলে উহার গতিশক্তি বৃদ্ধি ইহাই। স্থিতিশক্তির হ্রাস ও গতিশক্তির বৃদ্ধি মহাকর্ষীয় সংরক্ষী ক্ষেত্রে সমান। অতএব

$$\tfrac{1}{2}mv_{\infty}{}^2 = \frac{GMm}{r} \quad \text{বা} \quad v_{\infty} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \tag{7-8.1}$$

গোড়ায় P-তে অবস্থিত কোন স্থির কণাকে v_{∞} বেগ দিতে পারিলে উহা বলক্ষেত্রের বাহিরে চলিয়া যাইতে পারিবে. আকর্ষণ উহাকে ক্ষেত্রে ধরিয়া রাখিতে পারিবে না। এই বেগকে P বিন্দুতে 'পলায়নের বেগ' বা 'মুক্তির বেগ' বলে। ইহার কম বেগ দিলে কণা বলক্ষেত্রেই আবদ্ধ থাকিবে। v_{∞} অপেক্ষা বেশী বেগ দিলে ক্ষেত্রের বাহিরেও কণার কিছু গতিশক্তি থাকিয়া যাইবে। ক্ষেত্র হইতে বাহির হইয়া যাইতে উহার গতিশক্তি $\tfrac{1}{2}mv_{\infty}{}^2$ পরিমাণ কমিবে।

গোলকের পৃষ্ঠে ($r=R$) পলায়নের বেগ হইবে

$$v_{\infty} = \sqrt{2GM/R} \tag{7-8.2}$$

লক্ষ্য কর যে পলায়নের বেগ কণার ভর নিরপেক্ষ।

পাঠকের মনে হইতে পারে v_{∞} বেগ আকর্ষণ কেন্দ্রের বিপরীত দিকে দেওয়া দরকার। কার্যতঃ তাহা নহে ; যে কোন দিকে দিলেই হইবে। ইহা আমরা 3-19.6 অনুচ্ছেদে আলোচনা করিয়াছি। সংরক্ষী বলের বৈশিষ্ট্য হইতেও এ কথা বোঝা যায়। সংরক্ষী বলক্ষেত্রে কোন A বিন্দু হইতে অন্য কোন B বিন্দুতে যাইতে বল যে কার্য করে তাহার মান $\int_A^B \mathbf{f}.d\mathbf{r}$, এবং ইহা পথ নিরপেক্ষ (3-12 অনুচ্ছেদ দেখ)। অতএব কণা যে পথেই ক্ষেত্রের বাহির হইতে P-তে আসুক বা যে পথেই P হইতে ক্ষেত্রের বাহিরে যাক না কেন, উভয় ক্ষেত্রেই বল দ্বারা বা বলের বিরুদ্ধে সমান কার্য হইবে। P হইতে ক্ষেত্রের বাহিরে যাইতে এই কার্য $\tfrac{1}{2}mv_{\infty}{}^2$ এর সমান হওয়া দরকার ; ইহা পথের উপর নির্ভর করিবে না।

পৃথিবীর ভর 5.98×10^{24} kg ও ব্যাসার্ধ 6.37×10^{6} m, এবং এমকে-এস এককে $G=6.67\times10^{-11}$ ধরিলে ভূপৃষ্ঠ হইতে পলায়নের বেগ প্রায় 11.2 km/s। মঙ্গলগ্রহের পৃষ্ঠে উহা 5.0 km/s, বুধগ্রহে (Mercury) 3.8 km/s ও চাঁদে 2.4 km/s।

ভূপৃষ্ঠ হইতে কোন প্রাস (projectile) v বেগে, অনুভূমে ছুড়িলে প্রাসের কক্ষপথ কি প্রকার হইবে তাহা উহার বেগ v-র উপর নির্ভর করে। ইহা

আমরা 3-21 অনুচ্ছেদে আলোচনা করিয়াছি। বিভিন্ন বেগে কক্ষের প্রকৃতি সংক্ষেপে নিচে বলা হইল।

বেগ	কক্ষের প্রকৃতি
(*i*) $v > v_\infty$	পরাবৃত্ত (hyperbola) ; প্রাস পৃথিবীর আকর্ষণের বাহিরে চলিয়া যাইবে এবং সেখানে উহার কিছু গতিশক্তি থাকিবে।
(*ii*) $v = v_\infty$	অধিবৃত্ত (parabola) ; প্রাস পৃথিবীর আকর্ষণের বাহিরে যাইবে, কিন্তু সেখানে উহার গতিশক্তি থাকিবে না।
(*iii*) $v_\infty/\sqrt{2} < v < v_\infty$	উপবৃত্ত (ellipse) ; ভূকেন্দ্র প্রথম ফোকাসে। প্রাস উপবৃত্ত পথে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করিবে।
(*iv*) $v = v_\infty/\sqrt{2}$	বৃত্ত (নিক্ষেপ কোণ $\frac{1}{2}\pi$)
(*v*) $v < v_\infty/\sqrt{2}$	উপবৃত্ত ; ভূকেন্দ্র দ্বিতীয় ফোকাসে। প্রাস ভূপৃষ্ঠে ফিরিয়া আসিবে।

7-9. কয়েকটি গণনা।

(১) **পৃথিবীর ভর ও গড় ঘনত্ব।** পৃথিবীর ভর M ও ব্যাসার্ধ R হইলে ভূপৃষ্ঠে m ভরের কণার উপর উহার আকর্ষণ GMm/R^2। এই আকর্ষণের ফলে m ভরের ত্বরণ হইবে GM/R^2। ইহাকেই আমরা অভিকর্ষীয় ত্বরণ (acceleration due to gravity) 'g' বলিয়া থাকি এবং ইহাই ভূপৃষ্ঠে মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের তীব্রতা।

$$g = GM/R^2$$

সমীকরণে $g = 9.81$ m/s, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ এমকেএস একক এবং $R = 6.367 \times 10^6$ m ধরিলে পাই

$$M = 5.96 \times 10^{24} \text{ kg.}$$

পৃথিবীর গড় ঘনত্ব ρ ধরিলে $M = (4/3)\pi R^3 \rho$ হইবে। ইহাতে M ও R-এর মান বসাইলে পাই

$$\rho = 5.5 \text{ g/cm}^3.$$

পৃথিবীর কঠিন ত্বকের পাথরের গড় ঘনত্ব প্রায় 3.5 g/cm³। ইহাতে বোঝা যায় আরও নিচের পদার্থের ঘনত্ব আরও বেশী, এবং পৃথিবী গঠনে সমসত্ত্ব নয়।

(২) **সূর্যের ভর।** কেপলারের তৃতীয় সূত্রে বলে সকল গ্রহের বেলাই উহার কক্ষপথে আবর্তনের পর্যায়কাল T-র বর্গ মুখ্য অক্ষার্ধ a-র ঘনমানের সমানুপাতিক, অর্থাৎ a^3/T^2 সকল গ্রহের ক্ষেত্রে সমান। M সূর্যের ভর হইলে, 3-23.4 ও 3-23.5 সমীকরণ অনুসারে

$$\frac{4\pi^2a^3}{T^2}=GM \text{ বা } M=\frac{4\pi^2a^3}{GT^2} \quad (7\text{-}9.1)$$

পৃথিবীর কক্ষের $a=1.497\times10^{11}$ m এবং পর্যায়কাল $T=1$ yr $=365\frac{1}{4}\times86{,}400$ s। এমকেএস এককে $G=6.67\times10^{-11}$ লইয়া পাই

$$M=1.99\times10^{30} \text{ kg.}$$

ইহা পৃথিবীর ভরের প্রায় 3.3×10^5 গুণ।

(৩) **গ্রহের a বা T।** কেপলারের তৃতীয় সূত্র অনুসারে সকল গ্রহের a^3/T^2 সমান হওয়ায়, পৃথিবীর a ও T জানা আছে বলিয়া অন্য গ্রহের a বা T-র একটি জানিলে অন্যটি পাওয়া যায়।

পৃথিবী, শুক্র (Venus) ও নেপচুনের কক্ষ কার্যতঃ বৃত্তাকার। পৃথিবীর কক্ষের ব্যাসার্ধ $a_e=1{\cdot}495\times10^8$ km-কে দূরত্বের একক (ইহাকে astronomical unit বলে) ও $T_e=1$ বৎসরকে কালের একক ধরিলে এই এককে সকল গ্রহের $a^3/T^2=1$ হইবে।

শুক্রের বৎসর অর্থাৎ $T_v=0.615$ yr। অতএব উহার কক্ষের ব্যাসার্ধ উপরের আলোচনা অনুসারে হইবে

$$a_v=(0.615)^{\frac{2}{3}}.\ a_e=0.723a_e.$$

নেপচুনের বৎসর 165 yr। উহার কক্ষের ব্যাসার্ধ এ হিসাবে হইবে প্রায় $30a_e$।

(৪) **সকল উপগ্রহের a বা T।** 7-9.1 সমীকরণ M ভরের যে কোন গোলক বা কণার মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে প্রযোজ্য। চাঁদ পৃথিবীর উপগ্রহ। উহার মুখ্য অক্ষার্ধ $a_m=4.067\times10^8$ m (ও গৌণ অক্ষার্ধ 3.564×10^8 m)। অতএব উপরের 7-9.1 সমীকরণ অনুসারে চাঁদের কক্ষে আবর্তনের পর্যায়কাল হইবে

$$T_m=2\pi\sqrt{a_m^3/GM_e}=29.9 \text{ দিন।}$$

সূর্যের আকর্ষণ ও অন্যান্য গ্রহের ক্রিয়ায় ইহার ব্যতিক্রম ঘটে। উপরের সব মানগুলি এই জাতীয় ব্যতিক্রম নিরপেক্ষ।

পৃথিবীর কাছাকাছি নকল উপগ্রহ একই সূত্র মানিয়া চলিবে, অর্থাৎ উহার

$$T = 2\pi\sqrt{a^3/GM_e} \qquad (7\text{-}9.2)$$

হইবে ; M_e পৃথিবীর ভর। অতএব কোন নকল উপগ্রহের T জানিলে a, বা a জানিলে T পাওয়া যাইবে। ভূপৃষ্ঠের কাছে বৃত্তপথে কোন নকল উপগ্রহ ঘুরিলে a = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= 6.37 \times 10^6$ m ধরিয়া পাইব $T = 1$ ঘণ্টা 24 মিনিট।

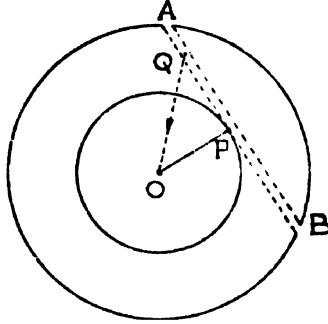
কোন নকল উপগ্রহ উপবৃত্ত পথে পৃথিবীর চারদিকে ঘুরিতে থাকিলে ভূপৃষ্ঠ হইতে উহার ন্যূনতম ও সর্বাধিক দূরত্ব যদি যথাক্রমে 1000 km ও 2000 km হয়, তাহা হইলে উহার কক্ষের মুখ্য অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a = 3000$ km + পৃথিবীর ব্যাস $= 1\,574 \times 10^7$ m। ইহা হইতে a-র মান 7.87×10^6 m আগের প্যারার T-র সমীকরণে বসাইয়া পাই $T = 1$ ঘণ্টা 56 মিনিট।

প্রশ্ন। ভূপৃষ্ঠ হইতে কত কিলোমিটার দূরত্বে নকল উপগ্রহ বৃত্তপথে চলিয়া পৃথিবীকে ঠিক 24 ঘণ্টায় পরিক্রমণ করিবে ?

[উত্তর : প্রায় 35900 km। লক্ষ্য কর এইরূপ নকল উপগ্রহকে ভূপৃষ্ঠ সাপেক্ষে স্থির থাকিতে দেখা যাইবে।]

(e) গোলকের আকর্ষণে সুড়ঙ্গ পথে কণার গতি (Motion of a particle through a tunnel in a sphere)। মনে কর কোন সমসত্ত্ব গোলকে এপার-ওপার করিয়া একটি সরু, সোজা, মসৃণ সুড়ঙ্গ কাটা আছে। সুড়ঙ্গের একমুখে একটি কণা ছাড়িয়া দিলে গোলকের আকর্ষণে উহা সুড়ঙ্গ পথে চলিবে। কণার গতি বিশ্লেষণ করিলে দেখা যাইবে (ক) উহা সরল দোল গতি, এবং (খ) গতির পর্যায়কাল সুড়ঙ্গের দিক্ নিরপেক্ষ।

সুড়ঙ্গ ও গোলকের কেন্দ্র যে তলে, 7.10 চিত্রে গোলকের সেই তলের ছেদ দেখান হইয়াছে। AB সুড়ঙ্গ এবং O গোলকের কেন্দ্র। মনে কর আলোচ্য মুহূর্তে কণা Q বিন্দুতে আসিয়াছে। উহার উপরে গোলকের আকর্ষণ গোলকের OQ ব্যাসার্ধের অংশের জন্য, এবং ইহা QO অভিমুখী। গোলকের ঘনত্ব ρ হইলে এই অংশের ভর $(4/3)\,\pi\rho OQ^3$। কণার ভর m হইলে উহার উপর আকর্ষক বল $F = G(4/3)\,\pi\rho m.OQ$। O হইতে সুড়ঙ্গের উপর OP লম্ব পাত করিলে AB রেখায় ঐ আকর্ষক বলের উপাংশ $F \cos OQP = G(4/3)\,\pi\rho m.QP$। এই উপাংশের জন্যই কণা

AB রেখায় চলে। অন্য উপাংশ ABর অভিলম্বে। সুড়ঙ্গ মসৃণ বলিয়া এই উপাংশ AB রেখায় গতিকে প্রভাবিত করে না। সক্রিয় উপাংশ P বিন্দু হইতে কণার দূরত্বের আনুপাতিক এবং সুড়ঙ্গের সর্বত্র P অভিমুখী। $PQ=x$ ধরিলে কণার গতীয় সমীকরণ হইবে

7.10 চিত্র

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho m x.$$

$(4/3)\pi G\rho = \omega^2$ লিখিলে সমীকরণের রূপ হয়

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

ইহা সরল দোলনের সুপরিচিত অবকলীয় সমীকরণ (3-15 অনুচ্ছেদ), এবং দোলনের পর্যায়কাল

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{}{4\pi G\rho}} \qquad (7\text{-}9.3)$$

গোলকের ব্যাসার্ধ R হইলে গোলকের পৃষ্ঠে উহার মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের তীব্রতার মান $f = GM/R^2 = G(4/3)\pi\rho R$। অতএব $(4/3)\pi G\rho = f/R$। এই মান 7-9.3 সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$T = 2\pi\sqrt{R/f} \qquad (7\text{-}9.4)$$

পৃথিবীকে সমসত্ত্ব গোলক ধরিয়া অনুরূপ ক্ষেত্রে সুড়ঙ্গ পথে কণার পর্যায়কাল হইবে $T = 2\pi\sqrt{R/g}$। এখানে R পৃথিবীর ব্যাসার্ধ এবং g উহার পৃষ্ঠে মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের তীব্রতা (বা অভিকর্ষীয় ত্বরণ)। $g = 9.8$ m/s এবং $R = 6.37 \times 10^6$ m ধরিলে $T = 1$ ঘণ্টা 24 মিনিট হয়।

গোলকের আকর্ষণে কণা উহার ঠিক বাহিরে বৃত্তপথে ঘুরিলে এই

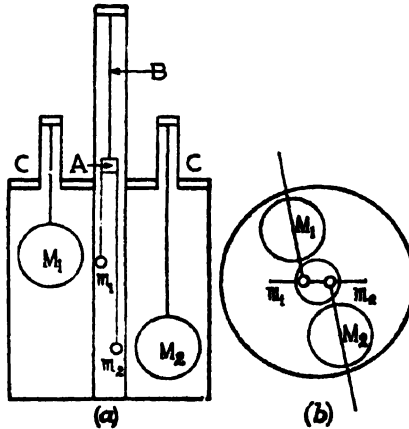
পথেও পর্যায়কাল $T=2\pi\sqrt{R/f}$ হইবে তাহা সহজেই দেখান যায়। আকর্ষণ বৃত্তপথে চলার অভিকেন্দ্র বলের সমান হইবে বলিয়া লেখা যায়

$$m\omega^2 R=(4/3)\pi G\rho Rm \text{ বা } \omega^2=(4/3)\pi G\rho.$$

এখানে ω বৃত্তপথে কণার কৌণিক বেগ, এবং পর্যায়কাল $T=2\pi/\omega$। ইহা হইতে আগের মত 7-9.3 ও 7-9.4 সমীকরণ পাওয়া যায়।

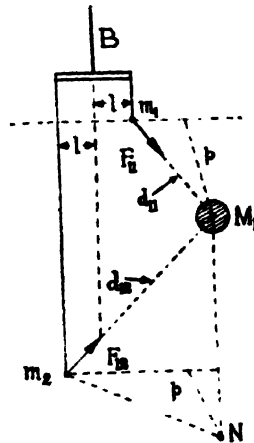
7-10. G-র মান নির্ণয়। G-র মান নির্ণয়ে নানাপ্রকার পরীক্ষা করা হইয়াছে। পরীক্ষণের সূক্ষ্মতা বিচারে শ্রেষ্ঠ দুইটি পরীক্ষা আমরা এখানে বর্ণনা করিব। উহাদের একটি বয়্‌জের (Boys) নামে ও অন্যটি হাইলের (Heyl) নামে পরিচিত।

(১) বয়্‌জের পরীক্ষা (Boys' experiment)। পরীক্ষাগারে G মাপিবার প্রথম নির্ভরযোগ্য পরীক্ষা করেন ক্যাভেণ্ডিস (1798)। ক্যাভেণ্ডিসের পরীক্ষা সাধারণ স্নাতক স্তরের (Pass course) পুস্তকে বর্ণিত আছে। বয়্‌জ্ (1889) ক্যাভেণ্ডিসের উপায়ই অনুসরণ করেন, কিন্তু উহার ত্রুটিগুলি দূর করিয়া মাপনের সূক্ষ্মতা বহুলাংশে বাড়াইতে সক্ষম হয়।

বয়্‌জের যন্ত্রের ব্যবস্থা 7.11 চিত্রে দেখান হইল। আকৃষ্ট গোলক দুইটি সোনার এবং প্রায় সিকি ইঞ্চি ব্যাসের। প্রায় এক ইঞ্চি লম্বা হালকা এক

7.11 চিত্র

টুকরা আয়না A-র দুপাশ দিয়া সোনার সরু তারে উহারা 6 ইঞ্চি উপর-নীচ করিয়া অসমান উচ্চতায় ঝুলান। A ঝুলান আছে প্রায় 17 ইঞ্চি লম্বা আর একগাছা সরু কোয়ার্টজ তার B-তে। আকর্ষক গোলক দুইটি (M_1, M_2)

সীসার এবং ব্যাসে প্রায় 4.25 ইঞ্চি (অন্য এক প্রস্ত পরীক্ষায় 2.25 ইঞ্চি)। উহারা যন্ত্রের ঢাকনায় ঝুলান এবং প্রত্যেকের কেন্দ্র উহার কাছের আকৃষ্ট গোলকের কেন্দ্রের অনুভূমিক তলে। দুই M-এর কেন্দ্রের অনুভূমিক দূরত্ব প্রায় 6 ইঞ্চি। B অক্ষে ঘুরাইয়া উহাদের m_1, m_2-এর সামনে বা পিছনে নেওয়া যায়। M_1, M_2-কে ঘুরাইয়া এমন জায়গায় আনা হয় যেখানে m_1, m_2-এর উপর উহাদের আকর্ষণের টর্ক সবচেয়ে বেশী (7.11b চিত্র)। এই অবস্থায় m_1m_2 অনুভূমিক রেখার সঙ্গে M_1m_1 রেখা প্রায় 115° কোণ করে। পরে M_1, M_2-কে ঘুরাইয়া উহাদের m_1, m_2-এর বিপরীত দিকে অনুরূপ অবস্থানে নেওয়া হয়। দুই অবস্থানে A কতটা ঘোরে তাহা টেলিস্কোপের সাহায্যে A-তে প্রতিফলিত প্রায় 22 ফুট দূরে রাখা স্কেলের প্রতিবিম্বের সরণ দেখিয়া মাপা হয়। বয়্জের পরীক্ষায় A-এর কৌণিক সরণ প্রায় 1° ছিল।

যন্ত্রের মধ্যের অংশ (A, B, m_1, m_2) একটি সরু পিতলের নলের মধ্যে রাখায় উষ্ণতার প্রভেদজনিত কোন পরিচলন বায়ুস্রোত পরীক্ষায় বিঘ্ন ঘটাইতে পারে নাই। সরু কোয়ার্টজ সুতা ব্যবহার করায় অল্প টর্কে বেশী মোচড় পাওয়া গিয়াছে। m_1, m_2-কে অসমান উচ্চতায় রাখায় এক m-এর উপর দূরের M-

7.12 চিত্র

এর ক্রিয়া প্রায় উপেক্ষণীয় হইয়াছে। প্রত্যেক M-এর ভর ছিল 7.4 kg ও m-এর ভর 2.65 g।

বয়্জের পরীক্ষার তত্ত্ব। 7.12 চিত্রের সাহায্যে বয়্জের পরীক্ষার তত্ত্ব

বোঝা যাইবে। চিত্রে কাগজের তল হইল আকৃষ্ট গোলক m_1, m_2-র উল্লম্ব তল। আকর্ষক M_1 গোলক এই তল হইতে সম্মুখের দিকে p দূরত্বে। M_2 সমপরিমাণ পিছনে। m_1-এর উপর M_1-এর আকর্ষণ $F_{11}=GM_1m_1/d_{11}^2$। উহা m_1M_1 রেখায় ক্রিয়া করে। $d_{11}=m_1M_1$ দূরত্ব। m_1m_2 তলের অভিলম্বে এই বলের উপাংশ $F_{11}.p/d_{11}$। ইহার জন্য আকৃষ্ট গোলকের m_1. m_2-র লম্বন অক্ষ E-তে ভ্রামক $F_{11}.(p/d_{11})l$। এই ভ্রামক m_1-কে কাগজের তল হইতে সম্মুখের দিকে আনিতে চায়।

m_2-র উপরে M_1-এর আকর্ষণ $F_{12}=GM_1m_2/d_{12}^2$; $d_{12}=M_1m_2$ দূরত্ব। M_1 হইতে m_2-র অনুভূমিক তলে লম্বপাত করিলে এই লম্ব যদি ঐ তলকে N বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইলে এই অনুভূমিক তলে F_{12}-র উপাংশ $F_{12}.Nm_2/d_{12}$। m_1m_2 উল্লম্ব তলের অভিলম্বে এই উপাংশের উপাংশ $F_{12}.Nm_2/d_{12}.p/Nm_2=F_{12}.p/d_{12}$, এবং B অক্ষে ইহার ভ্রামক $F_{12}.p/d_{12}.l$। ইহাও m_2-কে m_1m_2 তলের সম্মুখের দিকে আনিতে চায়, অর্থাৎ ইহা আগের ভ্রামকের বিপরীতে ক্রিয়া করে।

M_2 গোলকের জন্যও অনুরূপ দুটি ভ্রামক ক্রিয়া করে। B অক্ষে প্রতিসাম্যের জন্য উহাদের মানও আগের দুইটির সমান। অতএব B অক্ষে m_1, m_2 ঘুরাইবার দ্বন্দ্বের মান

$$2\left(G\,\frac{M_1m_1}{d_{11}^3}\,.pl-G\,\frac{M_1m_2}{d_{12}^3}.pl\right)=2Gpl\,Mm\left(\frac{1}{d_{11}^3}-\frac{1}{d_{12}^3}\right)=kG \tag{7-10.1}$$

এখানে $m_1=m_2=m$ এবং $M_1=M_2=M$ ধরা হইয়াছে। তা ছাড়া

$$k=2plMm\,\left(\frac{1}{d_{11}^3}-\frac{1}{d_{12}^3}\right) \tag{7-10.2}$$

উপরোক্ত দ্বন্দ্বের জন্য B তারে মোচড় θ হয় ধরা যাক। M_1, M_2 ঘুরাইয়া অন্যদিকে নিলে তার উল্টা দিকে সমান মোচড় খাইবে। ইহাতে তারে সংলগ্ন আয়নার মোট বিক্ষেপ হইবে 2θ। আয়না হইতে D দূরত্বে অবস্থিত স্কেলে ইহাতে যদি আলোক রেখার বিক্ষেপ x হয়, তাহা হইলে $2\theta=x/2D$

$$\theta=x/4D \tag{7-10.3}$$

তার মোচড় খাইলে উহাতে প্রত্যানয়ক দ্বন্দ্বের সৃষ্টি হয় (9.6 অনুচ্ছেদ)। মোচড় খুব বেশী না হইলে এই দ্বন্দ্ব মোচড়ের সমানুপাতিক হইবে। আলোচ্য ক্ষেত্রে B তারে এক রেডিয়ান মোচড়ে যদি c প্রত্যানয়ক দ্বন্দ্বের

সৃষ্টি হয়, তাহা হইলে θ মোচড়ে প্রত্যানয়ক দ্বন্দ্ব $c\theta$। অতএব মোচড়ান তারের সাম্যবস্থায় পাইব

$$c\theta = kG \quad (7\text{-}10.4)$$

জানা জাড্যভ্রামকের কোন বস্তু B হইতে ঝুলাইয়া উহার ব্যাবর্তন দোলনের পর্যায়কাল মাপিয়া B তারের c-র মান বাহির করা যায় (9-6.1) অনুচ্ছেদ)। 7-10.4 সমীকরণে সকল মানগুলি বসাইলে G পাওয়া যায়। p, l, d_{11}, d_{12} রাশিগুলি মাপিতে বয়্জ্ একই পাটাতনে বসান দুটি সমান্তরাল মাইক্রোস্কোপ ব্যবহার করিয়াছিলেন। ইহার নাম দিয়াছিলেন আলোক-কম্পাস (optical compass)। ঝুলাইবার তারের উপর ইহাদের ফোকাস করিয়া দূরত্বগুলি মাপা হইয়াছিল। ফোকাস করার পর মাইক্রোস্কোপ দুটি দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ রাখিয়া উহাদের সম্মুখে সূক্ষ্ম দাগ কাটা একখানা স্কেল রাখিয়া বয়্জ্ দূরত্ব মাপিয়াছিলেন।

আকৃষ্ট গোলক দুটি পূর্ণ বিক্ষেপের অবস্থানে সম্পূর্ণ সাম্যে থাকে নাই, একটু দুলিয়াছে। দোলনের বিস্তার মাপিয়া তাঁহাকে সাম্য অবস্থান হিসাব করিতে হইয়াছিল।

অনেকগুলি মাপনের গড় মান হিসাবে বয়্জ্ সিজিএস এককে G-র মান পাইয়াছিলেন

$$G = 6.658 \times 10^{-8}\ \mathrm{cm^3 g^{-1} s^{-2}}.$$

বিক্ষেপের সাহায্যে G মাপনের এটিকেই শ্রেষ্ঠ পরীক্ষণ মনে করা হয়।

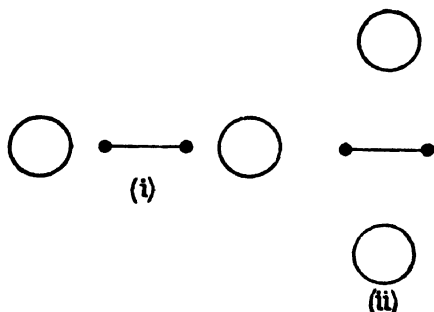
(২) **হাইলের পরীক্ষা (Heyl's experiment)**। আকর্ষক গোলকের টানে দুটি ছোট ছোট গোলকে গঠিত ব্যাবর্তন দোলকের 'চরমবিক্ষেপ' মাপিয়া বয়্জ্ G বাহির করিয়াছিলেন। আকর্ষকের মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে অনুরূপ ব্যাবর্তন দোলকের 'পর্যায়কাল' মাপিয়া হাইল G-র মান বাহির করেন। আমেরিকার যুক্তরাষ্ট্রের ব্যুরো অব স্ট্যাণ্ডার্ডসে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় এবং প্রথম পরীক্ষার ফল প্রকাশিত হয় 1930 খৃষ্টাব্দে। পরে খ্ঝানভ্স্কির (Chrzan-owski)* সহযোগিতায় পরীক্ষাব্যবস্থায় কিছু অদলবদল করিয়া পরীক্ষাটি আবার অনুষ্ঠিত হয়। ইহার ফল প্রকাশিত হয় 1943 খৃষ্টাব্দে।

হালকা অ্যালুমিনিয়াম দণ্ডে 20 cm দূরে ঝুলান 50 g ভরের দুটি গোলকে ব্যাবর্তন দোলক গঠিত। হাইল সোনার, প্ল্যাটিনামের ও কাচের গোলক ব্যবহার করেন। দোলকের ঝুলন তার টাংস্টিনের; ইহা 1 m দীর্ঘ ছিল।

---

* ইনি কোন্ দেশের লোক তাহা লেখকের জানা নাই। পোলিশ (Polish) হইলে উচ্চারণ অনেকটা বাংলায় যেমন দেওয়া হইয়াছে ঐ রকম হইবে।

আকর্ষক ভর ইস্পাতের দুটি বেলন ; প্রত্যেকের ওজন 66 kg। হাইলের প্রথম পরীক্ষায় ইহাদের অক্ষ খাড়া ছিল। ইহাদের ভারকেন্দ্র এবং আকৃষ্ট গোলকের ভারকেন্দ্র একই অনুভূমিক তলে। প্রথমে চারটি ভারকেন্দ্র একই রেখায় রাখিয়া (7.13*i* চিত্র) পৃথিবী ও বেলনের যুক্ত মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে ব্যাবর্তন দোলকের পর্যায়কাল T_1 দেখা হয়। এই অবস্থানে বেলনের টানের এক উপাংশ আকৃষ্ট গোলককে সাম্যে আনিতে সাহায্য করে। অতএব বেলন না থাকিলে দোলনকাল (T) যাহা হইত, T_1 তাহা হইতে ছোট হয়।

পরীক্ষার দ্বিতীয় অংশে বেলন দুটি ঘুরাইয়া উহাদের আড়াআড়ি রাখা হয় (7.13*ii* চিত্র)। এ অবস্থায় বেলনের টানের এক উপাংশ আকৃষ্ট গোলককে সাম্যে ফিরিয়া যাইতে বাধা দেয়। সাম্যে ফিরাইবার দ্বন্দ্ব কমায় দোলনকাল T_2 T-র চেয়ে বড় হয়।

7.13 চিত্র

হাইলের দ্বিতীয় পরীক্ষায় বেলন দুটি সমাক্ষ ও অনুভূমিক করা হয়। এ ব্যবস্থা আগের চেয়ে বেশী সুবিধার কারণ ইহাতে বেলনের অবস্থান আরও সঠিকভাবে নির্ণয় করা হয়। সমস্ত পরীক্ষা আংশিক বায়ুশূন্য স্থানে করা হয় ; চাপ ছিল 4mm Hg।

অনেকবার মাপনের ফলস্বরূপ প্রথমবারের পরীক্ষায় ফল পাওয়া যায়

$$G = 6.66 \pm 0.004 \times 10^{-8} \text{ সিজিএস একক}$$

এবং দ্বিতীয়বারে

$$G = 6.673 \pm 0.003 \times 10^{-8} \text{ সিজিএস একক।}$$

হাইলের পরীক্ষার তত্ত্ব। ব্যাবর্তন অক্ষে ঝুলান অংশের জাড্যভ্রামক I এবং দোলকের ঝুলন তারের প্রতি রেডিয়ান মোচড়ে টর্ক c হইলে লেখা

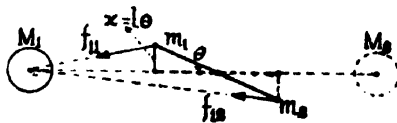
যায় প্রথম ক্ষেত্রে, অর্থাৎ আকৃষ্ট ও আকর্ষক ভরের ভারকেন্দ্র একরেখায় থাকাকালে,

$$T_1 = 2\pi\{ I/(c+GA_1)\}^{\frac{1}{2}}$$

ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, অর্থাৎ আকৃষ্ট ভরের ও আকর্ষক ভরের ভারকেন্দ্র পরস্পরের অভিলম্বে থাকাকালে (7.13*ii* চিত্র),

$$T_2 = 2\pi\{ I/(c-GA_2)\}^{\frac{1}{2}}$$

A_1 ও A_2 রাশি দুটি প্রধানতঃ জ্যামিতিক ; তবে উহাতে বেলন ও গোলকের ভরও আছে। বেলনের মাপ, অবস্থান ও ভর হইতে আকৃষ্ট গোলকের উপর উহার আকর্ষণের কার্যকর উপাংশ হিসাব করিয়া বাহির করা যায়। ব্যাবর্তন গোলকের উপর এই উপাংশের প্রত্যানয়ক দ্বন্দ্ব G-র আনুপাতিক বলিয়া উহা GA_1 বা GA_2 রূপে লেখা যায়। মোটা, খাট বেলনের অক্ষের বাহিরে উহার আকর্ষণ হিসাব করা দীর্ঘ ও কিছু জটিল বলিয়া আমরা বেলনের বদলে আকর্ষক ভর গোলক ধরিয়া A_1 ও A_2 কিভাবে হিসাব করা যায় তাহা নিচে দেখাইলাম।

প্রথম অবস্থানে (7.14 চিত্র) সাম্যাবস্থায় M_1, M_2 ও m_1, m_2-র কেন্দ্র এক রেখায়। M_1 ও m_1-এর কেন্দ্রের দূরত্ব d_{11} ও M_1, m_2-র কেন্দ্রের দূরত্ব d_{12}। আমরা ভর $m_1 = m_2 = m$ এবং $M_1 = M_2 = M$ ধরিব। m_1 ও m_2-র কেন্দ্রের দূরত্ব $2l$ ধরা হইবে।

7.14 চিত্র

মনে কর কোন মুহূর্তে সাম্যাবস্থা হইতে দোলকের কৌণিক বিক্ষেপ θ ও রৈখিক বিক্ষেপ $x = l\theta$। দোলন খুব স্বল্প বিস্তারের বলিয়া x ক্ষুদ্র রাশি। এই বিক্ষিপ্ত অবস্থানে m_1-এর উপর M-এর আকর্ষণ $f_{11} = GM_1m_1/(d_{11}^2 + x^2)$। ইহার যে উপাংশ দোলককে সাম্যে ফিরাইতে চায় তাহার মান $f_{11}.x/(d_{11}^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$। x-এর মাত্র প্রথম ক্রমের রাশিগুলি রাখিলে এই উপাংশ $-GM_1m_1x/d_{11}^3$ লেখা যায়। m_2-র উপর

M_1-এর অনুরূপ উপাংশ একই কারণে GM_1m_2x/d_{12}^3। M_2-র জন্য সমপরিমাণ প্রত্যানয়ক বল পাওয়া যাইবে। দোলন অক্ষে এই সকল উপাংশগুলির (প্রত্যানয়ক) ভ্রামক

$$2GMmlx\left(\frac{1}{d_{11}^3}+\frac{1}{d_{12}^3}\right)-2G\,Mm\,l^2\theta\left(\frac{1}{d_{11}^3}+\frac{1}{d_{12}^3}\right)=GA_1\theta.$$

এখানে $A_1=2Mm\,l^2\left(\frac{1}{d_{11}^3}+\frac{1}{d_{12}^3}\right).$

অতএব ব্যাবর্তন দোলকের গতীয় সমীকরণ (9-6.1 অনুচ্ছেদ দেখ)

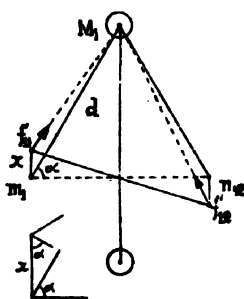
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-c\theta-GA_1\theta \text{ বা } \ddot{\theta}+(c+GA_1)/I.\theta=0.$$

ইহা সরল দোলনের সমীকরণ এবং দোলনের পর্যায়কাল

$$T_1=2\pi\{I/(c+GA_1)\}^{\frac{1}{2}} \tag{7-10.5}$$

দ্বিতীয় অবস্থানে (7.15 চিত্র) সাম্যে M_1m_1 দূরত্ব $=M_1m_2$ দূরত্ব $=d$ ও $\angle M_1m_1m_2=\alpha$। m_1-এর x বিক্ষেপে m_1 ও M_1-এ আকর্ষণ

$$f_{11}'=\frac{GM_1m_1}{d^2+x^2-2xd\sin\alpha}=\frac{GM_1m_1}{d^2}\left(1+\frac{2x\sin\alpha}{d}\right)$$

এখানেও x-এর মাত্র প্রথম ক্রম রাখা হইয়াছে। ইহার যে উপাংশ বিক্ষেপ

7.15 চিত্র

বাড়াইতে চায় তার মান কার্যতঃ $f_{11}'\sin\alpha$। m_2-এর উপর M_1-এর আকর্ষণ

$$f_{12}'=\frac{GM_1m_2}{d^2+x^2+2xd\sin\alpha}=\frac{GM_1m_2}{d^2}\left(1-\frac{2x\sin\alpha}{d}\right)$$

m_1m_2 রেখার অভিলম্বে ইহার উপাংশ $f_{12}' \sin \alpha$ এবং ইহা m_2-কে সাম্যে লইয়া যাইতে চায়। আবর্তন অক্ষে ইহাদের ভ্রামক $f_{11}' l \sin \alpha$ ও $f_{12}' l \sin \alpha$, এবং ইহারা পরস্পরের বিপরীতে ক্রিয়া করে। M_2-র জন্য অনুরূপ দুইটি ভ্রামক পাওয়া যাইবে। অতএব M_1, M_2-র আকর্ষণের জন্য মোট বিক্ষেপী ভ্রামক

$$2l \sin \alpha \, (f_{11}' - f_{12}') = 2l \sin \alpha \left\{ \frac{GMm}{d^2}\left(1 + \frac{2x \sin \alpha}{d}\right) - \frac{GMm}{d^2}\left(1 - \frac{2x \sin \alpha}{d}\right) \right\}$$

$$= \frac{8.G\, Mm\, lx \sin^2 \alpha}{d^3} = G.\frac{8Mm\, l^2 \sin^2 \alpha}{d^3}\,\theta = GA_2\theta.$$

এখানে $A_2 = 8Mml^2 \sin^2 \alpha / d^3$.

$GA_2\theta$ ভ্রামক বিক্ষেপী বলিয়া এখানে দোলকের গতীয় সমীকরণ

$$I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -c\theta + GA_2\theta$$

এবং দোলনের পর্যায়কাল $T_2 = 2\pi\{I/(c - GA_2)\}^{\frac{1}{2}}$ (7-10.6)

7-10.5 ও 7-10.6 হইতে পাই

$$\frac{4\pi^2}{T_1^2} = \frac{c + GA_1}{I} \text{ ও } \frac{4\pi^2}{T_2^2} = \frac{c - GA_2}{I}$$

$$\text{বা } 4\pi^2\left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}\right) = \frac{G(A_1 + A_2)}{I}$$

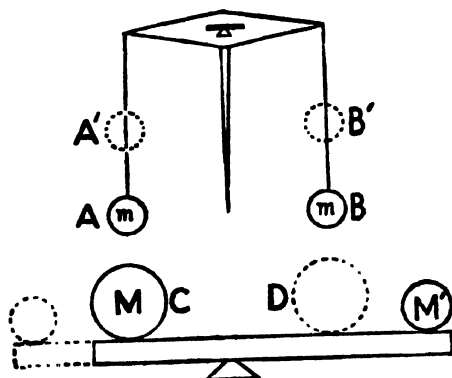
(7-10.7)

I হইল ব্যাবর্তন অক্ষে ঝুলান অ্যালুমিনিয়াম দণ্ড ও উহাতে আবদ্ধ ভর m_1 ও m_2-র জাড্যভ্রামক। ইহা হিসাব করিয়া বা পরীক্ষার সাহায্যে (9-6.2 অনুচ্ছেদ) পাওয়া যায়। A_1, A_2 হিসাব করিতে যে সকল দৈর্ঘ্য জানা দরকার সেগুলি বয়্জের মত আলোক-কম্পাস ব্যবহার করিয়া মাপা হইয়াছিল।

হাইলের পরীক্ষা বয়্জের পরীক্ষার তুলনায় আরও উন্নত মনে করা হয়।

(৩) অন্য নানাভাবে G মাপনের চেষ্টা হইয়াছে। ইহাদের এক জাতীয় পরীক্ষায় সূক্ষ্ম তুলার সাহায্য নেওয়া হয়। তুলাদণ্ডের এক প্রান্ত হইতে একটি গোলক ঝুলাইয়া উহার ভার প্রতিমিত করিয়া, গোলকের নিচে

আকর্ষক বড় একটি গোলক আনিয়া আকৃষ্ট গোলকের ভার পরিবর্তন দেখা হয়। ইহা হইতে G বাহির করা যায়। এই জাতীয় পরীক্ষার মধ্যে পয়েণ্টিং-এর (Poynting) পরীক্ষা বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য। পরীক্ষার আভাস নিচে দেওয়া হইল।

পয়েণ্টিং-এর পরীক্ষা। G মাপিতে পয়েণ্টিং সাধারণ তুলা ব্যবহার করেন। ব্যবস্থা 7.16 চিত্রে দেখান হইয়াছে। টাঁকশালে সোনা রূপা ওজন করিতে যে তুলা ব্যবহার হয় সেই রকম একটি তুলা নেওয়া হইয়াছিল। এগুলি শক্ত অথচ সুবেদী। মাটির নীচের ঘরে পরীক্ষা করা হয়। ইহাতে যন্ত্রে বাহির হইতে কোন কাঁপন লাগে না। তা ছাড়া, তুলা কাচের বাক্সে পুরাপুরি ঢাকা থাকায় বায়ু প্রবাহ কোন বিঘ্ন ঘটাইতে পারে না। বাক্সের বাহির হইতে

7.16 চিত্র

যন্ত্র নাড়াচাড়া করিবার সব ব্যবস্থা করা হয়।

আকৃষ্ট গোলক দুটি (m, m) তুলাদণ্ডের দুপাশ হইতে ঝুলান। এগুলি সীসার, এবং প্রত্যেকটি ওজনে 50 পাউণ্ড। আকর্ষী গোলক (M)-ও সীসার এবং ওজনে 350 পাউণ্ড। M একটি ঘুরন টেবিলের উপর রাখা। টেবিল ঘুরাইয়া উহাকে একবার একপাশের m এর নীচে এবং পরে অন্য m এর নীচে নেওয়া হয়। টেবিল M এর ভারে যাহাতে কাত হইয়া না পড়ে সেজন্য টেবিলের অন্য পাশে খানিক দূরে আর একটি ভার (M') রাখিয়া টেবিলের ভারসাম্য রাখা হয়।

দুই অবস্থানে m এর উপর M এর টানে তুলাদণ্ড কতখানি হেলে তাহা খুব সূক্ষ্মভাবে মাপার ব্যবস্থা করা হয়।

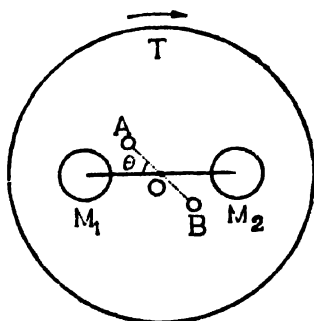
তুলাদণ্ডের উপর M এবং M' এর আকর্ষণের ফল দূর করার জন্য m, m কে এক ফুট উপরে তুলিয়া আবার তুলাদণ্ডের নতি দেখা যায়। দুক্ষেত্রে নতির প্রভেদ মাত্র m, M এর আকর্ষণের জন্য।

তুলাদণ্ডের আলম্ব হইতে x দূরত্বে m' ভর রাখিলে দণ্ডের নতি যদি α হয় তাহা হইলে অল্প বিচলনে প্রযুক্ত টর্ক ও নতির অনুপাত স্থির থাকে। অতএব অল্প নতিতে $m'gx/\alpha = k$ স্থির মান হয়। M এর টানে নতি যদি θ হইয়া থাকে তবে প্রযুক্ত টর্ক $k\theta$-র সমান। M এর আকর্ষণে প্রযুক্ত টর্ক সহজেই হিসাব করা যায়। তুলা দণ্ডের দৈর্ঘ্য l এবং m ও M এর কেন্দ্রের দূরত্ব d হইলে এই টর্ক $l.GMm/d^2$। অতএব

$$l.GMm/d^2 = k\theta \text{ বা } G = k\theta d^2/lMm$$

এই সূত্র হইতে G-র মান পাওয়া যায়। পয়েন্টিং এইভাবে সিজিএস এককে $G = 6{\cdot}698 \times 10^{-8}$ সাব্যস্ত করেন। ইহা হাইলের মান হইতে প্রায় 0·5% বেশী।

G জানা থাকিলে পৃথিবীর ভর বাহির করা যায় (7.9 অনুচ্ছেদ)। তুলার সাহায্যে G মাপা যায় বলিয়া এই পরীক্ষাগুলিকে কখন কখন গৌণভাবে 'পৃথিবী ওজন করা' বলা হয়।

(৪) সম্প্রতি (১৯৬৯ খৃঃ) যুক্তরাষ্ট্রের ভার্জিনিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ে রোজ, পার্কার, লাওরি, কুলথাও ও বীমস্ সম্পূর্ণ নূতন পদ্ধতিতে অতি সূক্ষ্মভাবে G-র মান নির্ণয় করিয়াছেন। 7.17 চিত্র পরীক্ষার মূল সূত্র বুঝিতে সাহায্য

7.17 চিত্র

করিবে। M_1 ও M_2 দুইটি একই প্রকারের গোলক T টেবিলের কেন্দ্র O-র দুই পাশে রাখা আছে। গোলকের কেন্দ্র দুইটি যোগ করিলে রেখা O বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে। অতি সূক্ষ্ম ও দীর্ঘ কোয়ার্ট্‌জ তারের সাহায্যে একটি পাতলা

অ্যালুমিনিয়াম দণ্ড টেবিলের কেন্দ্রে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে। দণ্ডের দুই প্রান্তে মনে করা যাক m ভরের A ও B দুইটি ছোট গোলক আছে (প্রকৃত পরীক্ষায় একটি বেলন ব্যবহার করা হইয়াছিল)। AB রেখা যদি M_1OM_2 রেখার সহিত θ কোণ করিয়া থাকে তবে M_1 ও M_2-র মহাকর্ষীয় আকর্ষণের জন্য AB দণ্ডের উপর একটি ভ্রামক ক্রিয়া করিবে যাহার ফলে AB দণ্ডটি M_1OM_2 রেখার সহিত সমান্তরাল হইবার চেষ্টা করিবে। যদি টেবিলটি কেন্দ্রের চারদিকে ধীরে ধীরে ঘুরান হইতে থাকে এবং উহার একটি নির্দিষ্ট কৌণিক ত্বরণ (angular acceleration) থাকে তবে 5-4.1 সমীকরণ হইতে দেখা যায় যে A ও B গোলক দুইটির উপর $m\dot{\omega}AB/2$ বল বিপরীত দিকে ক্রিয়া করিবে ও $m\dot{\omega}(AB)^2/2$ ভ্রামক সৃষ্টি করিবে। $\dot{\omega}$ এর দিক এরূপ করা যাইতে পারে যে এই ভ্রামক মহাকর্ষীয় ভ্রামকের বিপরীতে হইবে। সেই অবস্থায় AB দণ্ডটি এমন একটি কোণে স্থিতাবস্থায় আসিবে যখন উভয় ভ্রামক সমান হইবে। মহাকর্ষীয় ভ্রামকের মান M_1, M_2 গোলকের ভর m, G ও M_1O ইত্যাদি দূরত্বের উপর নির্ভর করিবে। $\dot{\omega}$, বিভিন্ন ভর ও দূরত্ব মাপিয়া G-র মান নির্ণয় করা হইয়াছে। পরীক্ষায় $\dot{\omega}$-এর মান $4-5\times10^{-6}$ রেডিয়ান/সে^{2} নেওয়া হইয়াছে। $\dot{\omega}$ নির্দিষ্ট মানে স্থির রাখিবার জন্য পরীক্ষায় বিশেষ ব্যবস্থা করা হয়। পরীক্ষার ফল পাওয়া গিয়াছে $G=(6.674\pm0.004)\times10^{-8}$ সিজিএস একক। হাইলের পরীক্ষার ফল ছিল $(6.670\pm0.005)\times10^{-8}$ সিজিএস একক।

প্রশ্ন

1. কেপলারের সূত্রগুলির সাহায্যে কিভাবে মহাকর্ষীয় সূত্র পাওয়া যায় দেখাও।
(3-23 অনুচ্ছেদ দেখ)

মহাকর্ষীয় বলের প্রধান প্রধান ধর্মগুলি আলোচনা কর।

2. মহাকর্ষীয় বিভব ও তীব্রতা কাহাকে বলে? দুয়ের সম্পর্ক বাহির কর। ফাঁপা সমসত্ত্ব গোলকের (ক) বাহিরে, (খ) পৃষ্ঠে, (গ) ফাঁপা অংশে ও (ঘ) পদার্থের ভিতরে মহাকর্ষীয় বিভব ও তীব্রতা হিসাব কর।

3. গাউস সূত্র বুঝাইয়া বল ও উহা প্রমাণ কর।

গোলকের মহাকর্ষীয় তীব্রতা হিসাব করিতে কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে গোলকের ভর কেন্দ্রে সংহত ধরা চলে তাহা গাউস সূত্র প্রয়োগে বাহির কর।

4. গাউস সূত্রের সাহায্যে লাপ্লাস ও পোয়াসঁর সমীকরণ ব্যুৎপন্ন কর। ইহাদের কোন্‌টি কোন্ ক্ষেত্রে প্রযোজ্য বল।

সীমাহীন সুষম সমতল পাতের একপাশে পাত হইতে দূরত্বের সহিত মহাকর্ষীয় তীব্রতার কিরূপ সম্পর্ক হইবে তাহা গাউস সূত্রের বা লাপ্লাসের সমীকরণের সাহায্যে বাহির কর।

5. মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রে কোন বিন্দু হইতে পলায়নের বেগ বলিতে কি বুঝায়? ভূপৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় উহার মান বাহির কর।

পৃথিবীর ভর 5.98×10^{24} kg, ব্যাসার্ধ 6.37×10^{6} m, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ mks unit, $h = 3000$ km হইলে পলায়নের বেগ কত হইবে?

6. কেন্দ্রগ বিষমবর্গীয় আকর্ষণে কোন্ অবস্থায় কণার গতিপথ উপবৃত্ত হইবে বাহির কর (3-19.5 অনুচ্ছেদ দেখ)। এই গতিতে কেপলারের তৃতীয় সূত্র খাটিবে প্রমাণ কর।

পৃথিবীর কোন নকল উপগ্রহের ভূপৃষ্ঠ হইতে উপভূ ও অপভূ দূরত্ব 1000 km ও 2000 km হইলে উহার প্রদক্ষিণকাল কত হইবে হিসাব কর।

7. বৃত্তপথে চলিয়া পৃথিবী হইতে কতদূরে থাকিলে কোন নকল উপগ্রহকে ভূপৃষ্ঠ হইতে স্থির দেখা যাইবে? এই কক্ষে উহার বেগ কত হইবে? এই বেগের সহিত ঐ স্থানের পলায়নের বেগের সম্পর্ক কি?

(দরকারী উপাত্তগুলি বই হইতে লইবে।)

8. সমসত্ত্ব গোলকের আকর্ষণে গোলকের ভিতর দিয়া ঋজু ও মসৃণ সুড়ঙ্গ পথে কোন ভরবিশিষ্ট কণা কতক্ষণে গোলকের এক পাশ হইতে অন্য পাশে যাইতে পারিবে গণনা কর।

ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষীয় ত্বরণ 9.8 m/s ও পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6370 km হইলে, পৃথিবীর ক্ষেত্রে অনুরূপ সময় কত হইবে?

নকল উপগ্রহ ভূপৃষ্ঠের কাছে থাকিয়া পৃথিবী পরিক্রমণ করিতে কত সময় লইবে?

9. তত্ত্বসমেত G নির্ণয় করিবার একটি সূক্ষ্ম পরীক্ষা বর্ণনা কর।

সুবেদী তুলার সাহায্যে কি করিয়া পৃথিবীর ভর বাহির করা যায়?

10. M ভর ও $2l$ দৈর্ঘ্যের সোজা সরু দণ্ডের কেন্দ্র হইতে r দূরত্বে (ক) দণ্ডের অক্ষে, (খ) দণ্ডের মধ্যতলে মহাকর্ষীয় তীব্রতার মান বাহির কর।

[সংকেত: (খ) এর জন্য 7-4 (9) অনুচ্ছেদ দেখ; $\beta = -\alpha$।

উত্তর: (ক) $GM/(r^2 - l^2)$; (খ) $GM/l(r^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}$]

11. কোন বেলনের দৈর্ঘ্য l, ব্যাসার্ধ a ও ঘনত্ব ρ হইলে প্রমাণ কর উহার অক্ষে এক প্রান্ত হইতে r দূরত্বে তীব্রতা

$$=2\pi G\rho\,[l-\sqrt{(l+r)^2+a^2}+\sqrt{r^2+a^2}]$$

[সংকেত : বেলনকে সরু সরু চাকতিতে ভাগ করিয়া 7-4.22 সমীকরণের সাহায্য লও। কোন চাকতির বেধ dr হইলে চাকতির তল ঘনত্ব ρdr।]

12. সংরক্ষী বলক্ষেত্রের কি সংজ্ঞা দিবে ?

$\mathbf{f}$ মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের তীব্রতা হইলে নিম্নোক্ত সম্পর্ক তিনটির অর্থ কি হইবে বুঝাইয়া বল :

(i) $\oint \mathbf{f}.d\mathbf{r}=0$; (ii) $\text{curl}\,\mathbf{f}=0$; (iii) $\mathbf{f}=-\text{grad}\,V$.

$\mathbf{f}=k\mathbf{r}/r^3$ ধরিয়া সোজাসুজি হিসাব করিয়া দেখাও $\text{curl}\,\mathbf{f}=0$।

[সংকেত : 3-12 অনুচ্ছেদ দেখ]

13. কোন ভেক্টরের ফ্লাক্স্ বলিতে কি বুঝায় ? স্বল্পাংশ তলকে ভেক্টর মনে করা যায় কিভাবে ? উহার দিক্ কি ধরা হয় ? (2-2(6) ও 2-10.2 অনুচ্ছেদ দেখ)

∇ সংকারকটি কার্টেজীয় নির্দেশাংকে লেখ। ∇V, $\nabla.\mathbf{f}$ ও $\nabla\times\mathbf{f}$ রাশি তিনটির মান কার্টেজীয় নির্দেশাংকে প্রকাশ কর। উহাদের কোন্‌টি স্কেলার ও কোন্‌টি ভেক্টর বল। উহাদের অন্য কি নাম আছে তাহাও বল। (2-9 হইতে 2-9.3 অনুচ্ছেদগুলি দেখ)

কোন ভেক্টরের বহির্মুখী ফ্লাক্সের সঙ্গে উহার ডাইভারজেন্সের কি সম্পর্ক আছে ? এই সম্পর্ক মহাকর্ষে কোথায় প্রয়োগ করিতে পার ? (2-11.1 ও 2-9.3 অনুচ্ছেদগুলি দেখ)

কোন স্বল্পাংশ তল ভেদ করিয়া কোন ভেক্টরের curl-এর ফ্লাক্সের সঙ্গে তলের সীমারেখা ঘেরিয়া ঐ ভেক্টরের পথ সমাকলের কি সম্পর্ক আছে ? এই সম্পর্কের সাহায্যে আমরা মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের কি জানিতে পারি ? (3-12 ও 2-11.3 অনুচ্ছেদ দেখ)

14. ভূপৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় অনুভূমে গুলি ছোড়া হইতে লাগিল। গুলির বেগ ক্রমশঃ বাড়াইতে থাকিলে কোন্ অবস্থায় গুলির পথ কি প্রকার হইবে আলোচনা কর।

15. পৃথিবী সমসত্ত্ব নয় মনে করিবার কি কারণ আছে ? ভূগর্ভে ঘনত্ব যদি গভীরতার সমানুপাতে বাড়িতে থাকে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে তীব্রতা ব্যাসার্ধের $\frac{1}{3}$ গভীরতায় সবচেয়ে বেশী, এবং উহার মান ভূপৃষ্ঠের তীব্রতার মানের 4/3 গুণ হইবে।

16. কোন সমসত্ত্ব গোলকের সব কণাগুলি উহার মহাকর্ষীয় টানের বিরুদ্ধে অনন্ত দূরত্বে ছড়াইয়া দিতে মোট কত কার্য করিতে হইবে ? গোলকে কণাগুলির মধ্যে মহাকর্ষীয় টান ছাড়া আর কোন বল নাই মনে করিও।

[সংকেত : 7-4.1 বিভাগ দেখ। উঃ : $\frac{3}{5}GM^2/R$]

অষ্টম পরিচ্ছেদ

অভিকর্ষ ও দোলক

(Gravity and Pendulum)

8-1. অভিকর্ষ ও অভিকর্ষীয় ত্বরণ (Gravity and acceleration due to gravity)। পৃথিবীর মহাকর্ষীয় আকর্ষণকে অভিকর্ষ বলে। যদিও পৃথিবী সমসত্ত্ব এবং যথার্থ গোলাকার নয়, তবুও সাধারণ গণনায় পৃথিবীকে সমসত্ত্ব গোলক বলিয়া ধরা হয়। অধিকাংশ গণনাই ভূপৃষ্ঠ বা তাহার বাহিরের কোন বিন্দু সাপেক্ষে। ইহাতে পৃথিবীর ভর ভূকেন্দ্রে সংহত ধরা চলে।

পৃথিবীর নিরক্ষীয় ব্যাসার্ধ 6378 km, ধ্রুবীয় (polar) ব্যাসার্ধ 6357 km এবং গড় ঘনত্ব 5.517 g/cm³। গড় ঘনত্ব ও ভর ঠিক রাখিয়া পৃথিবীকে সমসত্ত্ব গোলক কল্পনা করিলে উহার ব্যাসার্ধ হইত 6371 km। এরূপ গোলকের পৃষ্ঠে মহাকর্ষীয় তীব্রতা সকল স্থানেই সমান হইত, এবং উহার মান হইত

$$g=\frac{GM}{R^2}=\frac{4}{3}\pi G\rho R=\frac{4\pi}{3}\times 6.67\times 10^{-8}\ \mathrm{g^{-1}\ cm^3 s^{-2}}$$
$$\times 5.517\ \mathrm{g\ cm^{-3}}\times 6.371\times 10^{8}\ \mathrm{cm}$$
$$=981.7\ \mathrm{cm\ s^{-2}}=9.817\ \mathrm{m\ s^{-2}}.$$

সিজিএস পদ্ধতিতে ত্বরণের এককের নাম দেওয়া হইয়াছে গ্যালিলিও (Galileo), সংক্ষেপে gal।

$$1\ \mathrm{gal}=1\ \mathrm{cm/s^2}$$
$$1\ \mathrm{milligal}=1\ \mathrm{mgal}=10^{-3}\ \mathrm{cm/s^2}$$
$$1\ \mathrm{microgal}=1\ \mu\,\mathrm{gal}=10^{-6}\ \mathrm{cm/s^2}$$

পৃথিবীর বিভিন্ন স্থানে g-র মানের প্রভেদ সাধারণতঃ gal বা mgal-এ প্রকাশিত হয়।

পৃথিবীর মহাকর্ষীয় বলক্ষেত্রের তীব্রতাকেই অভিকর্ষীয় (বা অভিকর্ষজ) ত্বরণ বলে। সাধারণত g অক্ষরটি দিয়া ইহা বুঝান হয়। গ্র্যামের চিহ্ন g-র সহিত ইহা ভুল করা উচিত নয়। পৃথিবীর আকর্ষণ ভূপৃষ্ঠের কাছের কোন বস্তুর উপর সম্পূর্ণভাবে প্রযুক্ত হইলে উহার যে ত্বরণ হইত তাহাকে আমরা আসল $g\equiv g_{real}$ বা g_r লিখিয়া বুঝাইব। মাপনে আমরা যে g

পাই, অর্থাৎ আপাত বা কার্যকর g-কে আমরা g_{eff} বা g_e লিখিব। এই দুই রাশি এক নয়। পৃথিবীর দৈনিক আবর্তনের জন্য পার্থিব সকল বস্তুই পৃথিবীর মেরুঅক্ষে বৃত্তপথে ঘোরে। এই বৃত্তপথে আবর্তনের জন্য যে অভিকেন্দ্র বলের দরকার তাহা অভিকর্ষ হইতে আসে। 5-8 অনুচ্ছেদে ইহার উল্লেখ থাকিলেও এখানে আমরা সহজ করিয়া ব্যাপারটি বুঝিবার চেষ্টা করিব।

8-1.1. অভিকর্ষীয় ত্বরণের উপর পৃথিবীর আহ্নিক গতির ক্রিয়া। 8.1 চিত্রে O ভূকেন্দ্র, OB ঘূর্ণাক্ষ, OA বিষুবরেখা এবং P হইল λ অক্ষাংশে ভূপৃষ্ঠে m ভরের কোন বস্তু। পৃথিবীর আবর্তনের সঙ্গে P, CP-ব্যাসার্ধে

8.1 চিত্র

OB অক্ষে ঘোরে। ইহার প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্রবল PC অভিমুখী। বস্তুটির উপর পৃথিবীর মোট আকর্ষণ mg_r-এর এক উপাংশ এই বল জোগায়। অভিকেন্দ্র বলের মান $m\omega^2 PC = m\omega^2 R \cos\lambda$। এখানে ω পৃথিবীর কৌণিক বেগ, R উহার ব্যাসার্ধ এবং λ অক্ষাংশ। PO অভিমুখী mg_r বল হইতে PC অভিমুখী এই অভিকেন্দ্র বল ভেক্টর রাশি বিয়োগের সূত্র অনুসারে বিয়োগ করিলে বিয়োগফল কার্যতঃ হয় $mg_r - m\omega^2 R \cos^2\lambda$। কারণ $\overline{PS}$ রেখাংশ দিয়া mg_r বল এবং $\overline{PQ}$ দিয়া $m\omega^2 R \cos\lambda$ বল নির্দেশ করিলে

$$\overline{PS} - \overline{PQ} = \overline{PS} + \overline{ST} = \overline{PT}$$

হইবে। T হইতে PS-এর উপর TU লম্ব পাত করিলে $PT = PU$ ধরা যায় কারণ SPT কোণ খুবই ছোট।

$$\therefore \quad PT = PU = PS - US = PS - ST\cos\lambda$$
$$= mg_r - m\omega^2 R \cos^2\lambda$$

এই বলই বস্তুটিকে PT রেখায় ত্বরণ দিবে। ইহাই বস্তুটির উপর পৃথিবীর কার্যকর আকর্ষণ, এবং ইহার জন্য আপাত ত্বরণ

$$g_e = g_r - \omega^2 R \cos^2 \lambda \tag{8-1.1}$$

g_r এবং g_e-তে ইহাই সম্পর্ক। $-\omega^2 R \cos \lambda$ রাশিটি অপকেন্দ্র (centrifugal) ত্বরণ। অতএব বলা যায় 'প্রেক্ষিত বা আপাত অভিকর্ষীয় ত্বরণ যথার্থ অভিকর্ষীয় তীব্রতা ও পৃথিবীর আহ্নিক গতিজনিত অপকেন্দ্র ত্বরণের যোগফল বা লব্ধি (resultant)'।

g_e অক্ষাংশের উপর নির্ভর করে। $\omega^2 R$-এর মান 3.39 cm s^{-2}। বিষুবরেখায় $\lambda = 0°$ এবং মেরুতে $\lambda = 90°$। অতএব পৃথিবীর আহ্নিক আবর্তনের জন্য বিষুবরেখায় g_e-র মান সবচেয়ে কম এবং মেরুতে সবচেয়ে বেশী হয়।

উপরের আলোচনা হইতে দেখা যায় ভূপৃষ্ঠে ওলনদড়ি (plumb line) ভূকেন্দ্রের দিকে (PQ রেখায়) লম্বিত না হইয়া PT রেখায় লম্বিত হইবে, অর্থাৎ উত্তর গোলার্ধে উহা ভূকেন্দ্রের কিছু দক্ষিণ দিয়া যাইবে। P বিন্দুতে PM রেখা যথার্থ উল্লম্ব ও PN রেখা আপাত উল্লম্বের দিক্ নির্দেশ করে। উহাদের মধ্যবর্তী কোণ α হইলে লেখা যায়

$$\tan \alpha = \frac{TU}{PU} = \frac{m\,\omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda}{m g_e}$$

$$= \frac{\omega^2 R \sin 2\lambda}{2 g_e} \tag{8-1.2}$$

যথার্থ উল্লম্ব হইতে ওলন দড়ির বিচ্যুতি α। উপরের সমীকরণ হইতে দেখা যায় α-র মান বিষুবরেখা ($\lambda = 0°$) ও মেরুতে ($\lambda = 90°$) শূন্য, এবং 45° অক্ষাংশে সবচেয়ে বেশী।

8-1.2. অক্ষাংশের সঙ্গে g-র পরিবর্তন। বাকী আলোচনায় আমাদের যথার্থ g-র অবতারণা প্রয়োজন হইবে না। g বলিতে আমরা আপাত $g (\equiv g_e)$ বুঝিব।

পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য অক্ষাংশের সঙ্গে g-র পরিবর্তন হয় আমরা আগেই দেখিয়াছি। কিন্তু পৃথিবী যথার্থ গোলাকার নয়। গড় সমুদ্র-পৃষ্ঠে যে মহাকর্ষীয় সমবিভবতল পৃথিবীকে ঘেরিয়া থাকিবে তাহাই পৃথিবীর আকার ধরিতে হইবে। ভূপৃষ্ঠ সম্পূর্ণ জলে ঢাকা থাকিলে এবং সে জল সাম্যে থাকিলে যে আকার হইত, সমবিভব তল তাহাই। এই আকারকে জিয়য়ড্ (Geoid) বলে। উহাকে হুবাহু উপগোলক বা

গোলাভ (oblate spheroid) মনে করা হয়। উপবৃত্তকে হ্রস্বঅক্ষে ঘুরাইলে যে আকার হয় তাহাই হ্রস্বাক্ষ উপগোলক বা গোলাভ। পৃথিবীর ক্ষেত্রে এই উপবৃত্তের উপবৃত্ততা (ellipticity) $(r_1 - r_2)/r_1 = 1/297$ ধরা হয়। $r_1 = 6,378,388$ m ও $r_2 = 6,356,912$ m নেওয়া হয়।

হ্রস্বাক্ষ উপগোলক জিয়য়্ডের আসন্ন (approximate) রূপ। বর্তমানে নকল উপগ্রহের গতি বিশ্লেষণ করিয়া জিয়য়্ডের আকার সম্বন্ধে বহু তথ্য সংগৃহীত হইয়াছে। জানা গিয়াছে ইহার আকার কতকটা নাশপাতির (pear) মত। উত্তর মেরু অঞ্চল উপগোলকের পৃষ্ঠ হইতে কিছু উপরে, এবং দক্ষিণ মেরু অঞ্চল কিছু নীচে (ভূকেন্দ্রের দিকে)। কিন্তু ব্যতিক্রম খুব বেশী নয়, কয়েক ডেকামিটার মাত্র। অন্যান্য স্থানেও প্রভেদ আছে।

ভূপৃষ্ঠে g বলিতে এই কল্পিত উপগোলকের পৃষ্ঠের g বুঝায়। ইহার উপবৃত্ততার জন্য অক্ষাংশের সহিত g-র পরিবর্তন সঠিক 8-1.1 সমীকরণ অনুসারে হয় না। বিভিন্ন অক্ষাংশে বহু মাপনের ফলের সমন্বয় করিয়া আন্তর্জাতিক জিওডেটিক সংস্থা (International Geodetic Association) 1930 খৃষ্টাব্দে অক্ষাংশের সহিত g-র পরিবর্তনের নিম্নলিখিত সম্পর্কটি গ্রহণ করিয়াছেন ঃ

$$g_\lambda = 978.0490(1 + 0.0052884 \sin^2\lambda - 0.0000059 \sin^2 2\lambda) \tag{8-1.3}$$

ইহাতে ভূপৃষ্ঠে বিষুব রেখায় $g = 978.0490$ এবং মেরুতে $g = 983.2213$ cm/s² হয়। বর্তমানে ভূবিজ্ঞানীরা এ সমীকরণের সামান্য পরিবর্তন দরকার মনে করেন।

সংক্ষেপ কাজে ধরা যায়

$$g_\lambda = 983.22 - 5.19 \cos^2 \lambda \tag{8-1.4}$$

8-1.3. উচ্চতার সহিত g-র পরিবর্তন। ভূপৃষ্ঠ ছাড়াইয়া উপরে উঠিলে ভূকেন্দ্রের দূরত্ব বৃদ্ধির জন্য g-র মান কমিবে। পৃথিবীকে গোলক ধরিলে ভূপৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় ($h \ll R$ হইলে)

$$g_h = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{2h}{R}\right) = g_0 - g_0\frac{2h}{R}$$

লেখা যায়। এখানে g_0 ভূপৃষ্ঠে g-র মান। ইহা হইলে দেখা যায় ভূপৃষ্ঠের কাছে প্রতি মিটার উচ্চতা বৃদ্ধিতে অভিকর্ষীয় ত্বরণ $2g_0h/R = 2 \times 981.7/(6.371 \times 10^6) = 0.000308$ cm/s² কমিবে অর্থাৎ

$$g_h = g_0 - 0.000308\, h \tag{8-1.5}$$

হইবে। ইহাতে h মিটারে ধরিতে হইবে।

পৃথিবীর উপগোলকীয় আকারের জন্য সম্পর্ক ঠিক উপরের মত হয় না। উহা অক্ষাংশের উপরেও নির্ভর করে। সম্পর্ক ধরা যায়

$$g_h = g_0 - 0{\cdot}0003086\,(1 + 0{\cdot}00071 \cos 2\lambda)\, h$$

মনে রাখিতে হইবে g_0 উপগোলকের পৃষ্ঠে g-র মান এবং g_h সেখান হইতে h মিটার উচ্চতায়; অক্ষাংশ λ।

স্থলভাগে উপগোলকের পৃষ্ঠ এবং আলোচ্য উর্ধ্ববর্তী স্থানের মধ্যে ভূত্বকের শিলা থাকে। এই কারণে g_h ও g_0-র সম্পর্কে অন্য জটিলতা আসে। পরবর্তী 8-1.7 সমীকরণে ভূগর্ভে g বাহির করিতে যে যুক্তির অবতারণা করা হইয়াছে, ঐরূপ যুক্তির সাহায্যে দেখান যায় যে এরূপ ক্ষেত্রে

$$g_h = g_0\left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3h\rho'}{2R\rho}\right) \qquad (8\text{-}1.6)$$

হইবে। এখানে ρ পৃথিবীর গড় ঘনত্ব এবং ρ' ভূপৃষ্ঠ ও আলোচ্য স্থানের মধ্যবর্তী শিলার গড় ঘনত্ব। সাধারণতঃ $\rho' = 2{\cdot}67$ g/cm^3 ধরা হয়।

8-1.4. **ভূনিম্নে গভীরতার সহিত g-র পরিবর্তন।** পৃথিবীকে সমসত্ব গোলক ধরিলে ভূনিম্নে x গভীরতায় x বেধের খোলকের আকর্ষণ থাকিবে না এবং

$$g_x = g_0(1 - x/R)$$

হইবে (7-4.12 সমীকরণ দেখ)। কিন্তু পৃথিবী সমসত্ব নয়; উহার ঘনত্ব নিচের দিকে বেশী।

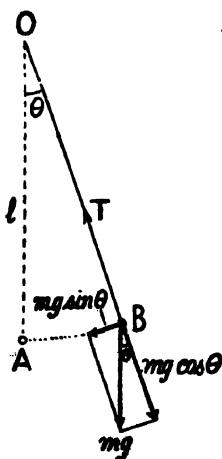
ভূকেন্দ্র হইতে সমান দূরত্বে পদার্থের ঘনত্ব সমান ইহা যদি ধরা চলে তাহা হইলে g_x ও g_0-র একটা সম্পর্ক বাহির করা যায় (উদাহরণ স্বরূপ সপ্তম পরিচ্ছেদের 15 নং প্রশ্নটি দেখ)। ধরা যাক পৃথিবীর x বেধের খোলক অংশের গড় ঘনত্ব ρ'। $x \ll R$ হইলে এই অংশের ভর $4\pi R^2 x\rho'$। x গভীরতায় আকর্ষণ $(R-x)$ ব্যাসার্ধের গোলকের জন্য। পৃথিবীর মোট ঘনত্ব ρ হইলে এই গোলকের ভর = পৃথিবীর ভর—খোলকের ভর $= (4/3)\pi R^3\rho - 4\pi R^2 x\rho'$। এই ভর ভূকেন্দ্রে সংহত ধরা চলে। অতএব x গভীরতায় অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান

$$g_x = G\,\frac{(4/3)\pi R^3\rho - 4\pi R^2 x\rho'}{(R-x)^2}$$

$M=(4/3)\pi R^3\rho=$ পৃথিবীর ভর ও $(R-x)^2=R^2(1-x/R)^2$ লিখিলে পাই,

$$g_x=G\frac{M}{R^2}\frac{\left(1-\frac{3x}{R}\cdot\frac{\rho'}{\rho}\right)}{(1-x/R)^2}=g_0\left(1-\frac{3x}{R}\cdot\frac{\rho'}{\rho}+\frac{2x}{R}\right) \quad (8\text{-}1.7)$$

(ইহাতে x-এর দ্বিতীয় ও উচ্চতর ঘাতের রাশি উপেক্ষা করা হইয়াছে কারণ $x<R$)

ভূনিম্নে প্রায় 2000 km পর্যন্ত বাহিরের খোলকের গড় ঘনত্ব (ρ') পৃথিবীর গড় ঘনত্বের (ρ) চেয়ে কম। প্রথম 100 কিলোমিটারে গড় ঘনত্ব 3.38 g/cm³। এই মান উপরের সমীকরণে বসাইলে দেখা যাইবে g_x g_0 অপেক্ষা কিছু বেশী। কার্যতঃ প্রায় 2900 km গভীরতা পর্যন্ত g_x g_0 অপেক্ষা বড়। g_x-এর চরম মান প্রায় ঐ গভীরতায় এবং উহা 1000 cm/s² এর চেয়েও বেশী। এই সকল তথ্য বিভিন্ন গভীরতায় ভূকম্প তরঙ্গের (seismic waves) বেগ মাপিয়া গৌণভাবে জানা গিয়াছে।

8.2 চিত্র

8-2. সরল বা আদর্শ দোলক (Simple pendulum)। সরল বা আদর্শ দোলক কল্পনার বস্তু। ভরহীন, টানিলে বাড়ে না বা বাঁকাইতে বল লাগে না এমন একগাছা সূতায় ঝুলান আয়তনহীন ভারী কণাই হইল সরল দোলক। আসল কোন দোলক এরূপ হইতে পারে না। সরু তারে

সীসার গোলক ঝুলাইয়া যে দোলক হয় তাহা সরল দোলকের স্থূল, বাস্তব, সংস্করণ।

গণিতের সুবিধার জন্য আদর্শ দোলক কল্পিত হইয়াছে। 8.2 চিত্রে OA l দৈর্ঘ্যে সরল দোলকের সাম্য অবস্থান বুঝায়। দোলকের ভর m। মনে কর কোন মুহূর্তে দোলকের কৌণিক সরণ θ। দোলকের ভার mg খাড়াভাবে নিচের দিকে ক্রিয়া করে। এই বলকে সুতার রেখায় এবং তাহার অভিলম্বে দুই উপাংশে ভাগ কর। প্রথম উপাংশ $mg \cos \theta$ সুতার টান T দ্বারা প্রতিমিত (balanced) হইবে। দ্বিতীয় উপাংশ $mg \sin \theta$ উদ্বৃত্ত থাকিয়া দোলক পিণ্ডকে নিজের অভিমুখে ত্বরণ দিবে। এই বল পিণ্ডকে উহার সাম্য অবস্থান A-তে ফিরাইয়া লইতে চাহিবে। অতএব দোলক পিণ্ডের গতীয় সমীকরণ হইবে

$$m\ddot{x} = -mg \sin \theta \text{ বা } \ddot{x} + g \sin \theta = 0 \tag{8-2.1}$$

θ খুব ছোট হইলে আমরা $\sin \theta = \theta$ লিখিতে পারি। কৌণিক বিস্তার খুব কম থাকিলে পিণ্ডের গতিপথ A-র মধ্য দিয়া কার্যতঃ OA-র অভিলম্বে হইবে। কৌণিক সরণ θ হইলে A হইতে পিণ্ডকণার রৈখিক দূরত্ব $x = l\theta$। অতএব পিণ্ডকণার উপর ক্রিয়াশীল বল $mg \sin \theta = mg\, x/l$ ধরা যায়। এক্ষেত্রে 8-2.1 সমীকরণ হইয়া দাঁড়ায়

$$\ddot{x} + gx/l = 0 \text{ বা } \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad [\omega = \sqrt{g/l}\,] \tag{8-2.2}$$

ইহা সরল দোলনের সুপরিচিত অবকল সমীকরণ। অতএব পিণ্ডের গতি সরল দোলন, এবং উহার পর্যায়কাল

$$T_0 = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g} \tag{8-2.3}$$

8-2.1. দোলকের পর্যায়কালের উপর বিস্তারের ক্রিয়া। সরল দোলকের পর্যায়কাল বাহির করিতে আমরা $\sin \theta = \theta$ ধরিয়াছি। $\theta \to 0$ সীমায় ইহা সত্য, অর্থাৎ বিস্তারের ক্ষুদ্রতা সীমাহীন (infinitesimal) হইলে 8-2.3 সমীকরণ সত্য হইবে। যে কোন বাস্তব দোলনে বিস্তার সসীম। সসীম বিস্তারে পর্যায়কাল কত হইবে ?

দেখান যায় যে α রেডিয়ান বিস্তারে পর্যায়কাল

$$T_\alpha = T_0\left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{11}{3072}\alpha^4 + \cdots\cdots\right) \tag{8-2.4}$$

T_0 8-2.3 সমীকরণে দেওয়া পর্যায়কাল। বিস্তার বাড়িলে পর্যায়কাল

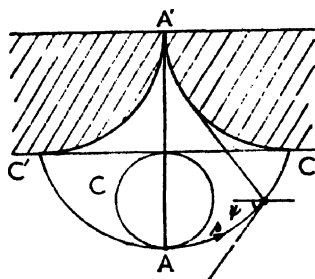
বাড়ে। $\alpha = 23°$ হইলে পর্যায়কাল প্রায় 1% বেশী হয়। $\alpha = 90°$ হইলে উহা প্রায় 18% বাড়ে।

বাস্তব দোলনে α কখনই খুব বেশী হয় না। সূক্ষ্ম কাজে α প্রায় 1° করা হয়। অতএব T_α হইতে T_0 পাইতে অধিকাংশ ক্ষেত্রেই লেখা যায়

$$T_0 = T_\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{16}\right) \tag{8-2.5 a}$$

T_α মাপিবার সময় বিস্তার α_1 হইতে α_2-তে পরিণত হইলে লেখা যায়

$$T_0 = T_\alpha\left(1 - \frac{\alpha_1\,\alpha_2}{16}\right) \tag{8-2.5 b}$$

8-2.4 সমীকরণের বুৎপত্তি কিছু জটিল বলিয়া উহার আলোচনা আমরা করিব না। জটিলতা গণিত সংক্রান্ত; ভৌত কোন নূতন তত্ত্ব উহাতে নাই।

8.3 চিত্র

8-2.2 চক্রজ দোলকের (Cycloidal pendulum) পর্যায়কাল বিস্তার নিরপেক্ষ। কোন প্রকার দোলকের পর্যায়কাল বিস্তার নিরপেক্ষ হইতে পারে কিনা, এ প্রশ্নের উত্তর হিগিন্‌স্ (Huygens) প্রায় তিন শতাব্দী পূর্বে (1673) দিয়াছেন। চক্রজ দোলক এই প্রকার।

সমতলের উপর সরলরেখায় কোন বৃত্ত গড়াইয়া গেলে উহার পরিধির কোন বিন্দু যে পথ বর্ণনা করে তাহাকে চক্রজ (cycloid) বলে। 8.3 চিত্রে $C'AC''$ রেখা এইরূপ একটি চক্রজ। C বৃত্ত $C'C''$ রেখায় গড়াইলে A বিন্দু এই চক্রজ উৎপন্ন করে। $A'C'$ রেখা AC'' বক্রের বক্রতা কেন্দ্রের সঞ্চারপথ (locus), এবং $A'C''$ রেখা AC' বক্রের। এই দুই বক্রও চক্রজ; A' বিন্দু উহাদের শীর্ষ (cusp)। A' বিন্দু হইতে $A'A$ দৈর্ঘ্যের দোলক

দুলিবার সময় উহার লম্বন সূত্রকে $A'C''$ ও $A'C'$ বক্রে লাগিতে দিলে A বিন্দু $C'AC''$ বক্রে চলিবে। ইহাতে এই দোলকের দৈর্ঘ্য দোলনকালে, কমে বাড়ে।

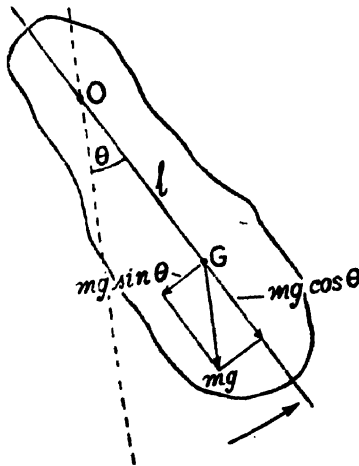
$C'AC''$ বক্রে A হইতে মাপা দূরত্বকে s বলিলে, এবং বক্রের যে কোন বিন্দুতে উহার স্পর্শকের সহিত অনুভূমের কোণকে ψ বলিলে, এইরূপ দোলকের গতীয় সমীকরণ হয়

$$d^2s/dt^2 = -g \sin \psi$$

C বৃত্তের ব্যাস $k/2$ ধরিলে, $s = k \sin \psi$ হইবে, এবং উপরের গতীয় সমীকরণ হইবে

$$d^2s/dt^2 + gs/k = 0$$

এক্ষেত্রে দোলনকাল $T = 2\pi \sqrt{k/g}$ বিস্তার নিরপেক্ষ।

চক্রজ দোলকের দোলনকাল বিস্তার নিরপেক্ষ হইলেও ব্যবহারিক দোলক হিসাবে ইহার প্রয়োগ বড় একটা নাই। দোলকের ব্যবহারিক রূপ ঠিক তত্ত্বীয় রূপের মত করার অসুবিধাই ইহার প্রধান কারণ।

8.4 চিত্র

8.3. যৌগিক দোলক (Compound pendulum)। বাস্তব সরল দোলক গঠন করা যায় না, কারণ ভরহীন, টানিলে বাড়ে না বা বাঁকাইতে

বল লাগে না এমন কোন সূতাও নাই, বা আয়তনহীন ভারী কণাও পাওয়া যায় না।

বাস্তব ক্ষেত্রে, অনুভূমিক অক্ষে দুলিতে পারে এমন কোন দৃঢ়বস্তু দোলক হিসাবে ব্যবহার করা হয়। ইহাকে যৌগিক দোলক বলে। 8.4 চিত্রে দোলনের কোন এক সময়ে একটি যৌগিক দোলকের অবস্থান দেখান হইয়াছে। G উহার ভারকেন্দ্র। দোলন অক্ষ চিত্র তলের অভিলম্বে O বিন্দুর মধ্য দিয়া লম্বিত। দোলক সাম্যে থাকিলে OG রেখা খাড়া থাকে। ভাঙা রেখায় ইহা দেখান হইয়াছে। O বিন্দুকে লম্বন কেন্দ্র (centre of suspension) বলে। O হইতে ভারকেন্দ্র G-র দূরত্ব $OG = l$। আলোচ্য মুহূর্তে সাম্য হইতে দোলকের কৌণিক সরণ θ।

দোলকের ভার mg উহার ভারকেন্দ্র G-তে খাড়াভাবে নিচের দিকে ক্রিয়া করে। এই বলকে OG বরাবর ও তাহার অভিলম্বে দুই উপাংশ $mg \cos \theta$ ও $mg \sin \theta$-য় ভাগ কর। $mg \cos \theta$-র জন্য লম্বন অক্ষে টান পড়ে, কিন্তু দোলকের কোন সরণ হয় না। $mg \sin \theta$ উপাংশ দোলককে সাম্যে ফিরাইয়া লইতে চায়। θ খুব ছোট হইলে $\sin \theta = \theta$ লেখা যায়। এরূপ হইলে দোলককে সাম্যে ফিরাইবার বলের মান $mg\,\theta$, এবং লম্বন অক্ষে এই বলের ভ্রামক $mgl\theta$।

দোলক লম্বন অক্ষে ঘোরে। ঐ অক্ষে উহার জাড্য ভ্রামক I হইলে দোলকের গতির সমীকরণ হইবে

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\theta \text{ বা } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \qquad (8\text{-}3.1)$$

এই সমীকরণ দোলনের অবকল সমীকরণের সুপরিচিত রূপ। θ ও t-র মধ্যে সম্পর্ক (3-15.4 সমীকরণ দেখ)

$$\theta = \alpha \sin(\omega t + \epsilon) \qquad [\omega = \sqrt{mgl/I}]$$

θ-র মান $+\alpha$ ও $-\alpha$-র মধ্যে আবদ্ধ; α দোলনের বিস্তার ও $\omega = \sqrt{mgl/I}$ দোলনের কৌণিক কম্পাংক। দোলকের দোলনকাল

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \qquad (8\text{-}3.2)$$

∴ ভারকেন্দ্র দিয়া দোলন অক্ষের সমান্তরাল অক্ষে দোলকের জাড্য-ভ্রামক

I_g এবং এই অক্ষে ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ k হইলে, জাড্য-ভ্রামকের সমান্তরাল অক্ষের সূত্র (6-6 অনুচ্ছেদ) অনুসারে

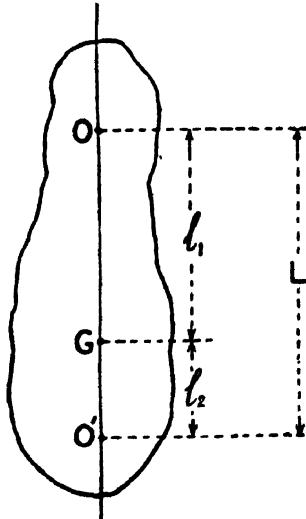
$$I = I_g + ml^2 = m(k^2 + l^2) \tag{8-3.3}$$

অতএব $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+l^2}{gl}} \tag{8-3.4}$$

8-3.1. যৌগিক দোলকের তুল্য সরল দোলক (Equivalent simple pendulum)। যে সরল দোলকের দোলনকাল কোন যৌগিক দোলকের দোলনকালের সমান, তাহাকে ঐ যৌগিক দোলকের তুল্য সরল দোলক বলে। তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য L হইলে

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+l^2}{gl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

অতএব $$L = \frac{k^2+l^2}{l} = \frac{k^2}{l} + l \tag{8-3.5}$$

L l অপেক্ষা বড় হইবে।

8.5 চিত্র

8-3.5 সমীকরণ হইতে দেখা যায় l-এর দুইটি বিভিন্ন মানে L বা T-র মান একই হইতে পারে, কারণ

$$L = (k^2/l) + l \text{ বা } l^2 - Ll + k^2 = 0.$$

ইহা l এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া l-এর দুইটি মানে সমীকরণ সিদ্ধ হইবে। মান দুইটিকে l_1 ও l_2 ধরিলে

$$(l-l_1)(l-l_2)=l^2-L\,l+k^2$$

হইবে। দুই দিক তুলনা করিয়া পাওয়া যায়

$$l_1+l_2=L \qquad (8\text{-}3.6a)$$

এবং $$l_1 l_2=k^2 \qquad (8\text{-}3.6b)$$

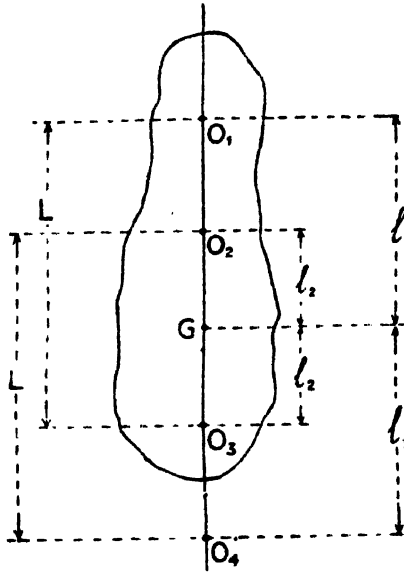
OG দৈর্ঘ্য l_1 হইলে দোলনকাল যাহা হয়, $l_2=k^2/l_1$ হইলেও তাহাই হইবে।

8-3.2. যৌগিক দোলকের লম্বনকেন্দ্র ও দোলনকেন্দ্র বিনিমেয় (Centre of suspension and centre of oscillation are interchangeable)। যৌগিক দোলকের ভারকেন্দ্র G-র মধ্য দিয়া দোলন অক্ষের অভিলম্বে ছেদ লইলে, দোলন অক্ষ যে O বিন্দুতে এই তলকে ছেদ করে তাহাকে আমরা লম্বনকেন্দ্র বলিয়াছি (8.4 চিত্র)। OG রেখায় O হইতে L দূরত্বে অবস্থিত O' বিন্দুকে দোলকের দোলন কেন্দ্র বলে (8.5 চিত্র)। L দ্বারা এখানে প্রদত্ত যৌগিক দোলকের তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য বুঝায়। দোলকের উপাদানভূত কণাগুলি ব্যাপ্ত হইয়া না থাকিয়া যদি কণার আকারে O' বিন্দুতে সংহত হইয়া সরল দোলক গঠন করিত, তাহা হইলে ইহার দোলনকাল প্রদত্ত যৌগিক দোলকের দোলনকালের সমান হইত। অন্য ভাষায় বলা যায়, দোলনের ব্যাপারে যৌগিক দোলকের ভর যে বিন্দুতে সংহত মনে করা চলে তাহাই দোলনকেন্দ্র। (ব্যাপ্তিবিশিষ্ট দোলককে এইভাবে কণায় পরিণত করা যায়, এবং যৌগিক দোলকের দোলন সরল দোলকের দোলনে পরিণত হয়।)

OG দৈর্ঘ্যকে l_1 ধরিলে $O'G=l_2$ হইবে কারণ $L=l_1+l_2$ (8-3.6a সমীকরণ)। একটু আগেই দেখিয়াছি লম্বনকেন্দ্র হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব l_1 হইলে দোলনকাল যাহা হইবে, দূরত্ব l_2 হইলেও দোলনকাল তাহাই হইবে। অতএব দোলনকেন্দ্রকে লম্বনকেন্দ্র করিলে দোলনকাল বদলাইবে না, অর্থাৎ উহারা বিনিমেয়।

লম্বনকেন্দ্র ও দোলনকেন্দ্রের বিনিমেয়তা অন্যভাবেও প্রমাণ করা যায়। O বিন্দু লম্বনকেন্দ্র হইলে দোলনকাল $T=2\pi\sqrt{(k^2+l_1^2)/gl_1}=2\pi\sqrt{L/g}$। O' বিন্দু লম্বনকেন্দ্র হইলে $T=2\pi\sqrt{(k^2+l_2^2)/gl_2}$। প্রমাণ করিতে হইবে $(k^2+l_2^2)/l_2=L$। জানা আছে $(k^2+l_1^2)/l_1=L=l_1+l_2$। অতএব $k^2/l_1=l_2$ বা $k^2=l_1l_2$।

$$\therefore\quad (k^2+l_2^2)/l_2=(l_1l_2+l_2^2)/l_2=l_1+l_2=L\text{।}$$

যৌগিক দোলকের দোলনকাল k এবং $OG=l$, এই উভয় রাশির উপরেই নির্ভর করে। নির্দিষ্ট দোলকে k স্থির রাশি ; উহা দোলকের গঠনের উপর নির্ভর করে। OG-র দুইটি বিভিন্ন মানে (l_1 ও l_2-তে) T-র মান একই হয়। লম্বন অক্ষ G-র যে কোন পাশে নেওয়া যায়। অতএব OG রেখায় G-র দুই পাশে দুই দুই করিয়া এমন চারটি বিন্দু (O_1, O_2, O_3, O_4 ; 8.6

8.6 চিত্র

চিত্র) আছে যাহাদের যে কোনটিকে লম্বনকেন্দ্র করিলে দোলকের দোলনকাল একই হইবে। দোলনকালের নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির যে কোনটি দরকার-মত ব্যবহার করা যাইতে পারে ঃ

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{k^2+l_1^2}{gl_1}}=2\pi\sqrt{\frac{k^2+l_2^2}{gl_2}}$$
$$=2\pi\sqrt{\frac{l_1+l_2}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

8-3.3. দোলনকালের অবম (minimal) মান। $T=2\pi\sqrt{(k^2+l^2)/gl}$ বলিয়া l, অর্থাৎ লম্বনকেন্দ্র হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব, বদলাইলে দোলকের

দোলনকালও বদলাইবে। $\sqrt{(k^2+l^2)/l}$ অবম (minimum) হইলে T-ও অবম হইবে। দেখা যায়

$$\frac{k^2+l^2}{l}=\frac{(k-l)^2+2kl}{l}=\frac{(k-l)^2}{l}+2k$$

$l=k$ হইলে ইহার মান সবচেয়ে কম হয়, এবং তখন দোলনকালও অবম। অতএব অবম দোলনকাল

$$t_{min}=2\pi\sqrt{\frac{2k}{g}} \qquad (8\text{-}3.7)$$

দোলনকাল অবম করিতে হইলে দোলকের ভারকেন্দ্র হইতে দোলন অক্ষের দূরত্ব l-কে k-র সমান, অর্থাৎ ভারকেন্দ্রের মধ্য দিয়া দোলন অক্ষের সমান্তরাল অক্ষে দোলকের ঘূর্ণন ব্যাসার্ধের সমান, করিতে হইবে। এই প্রকার দোলক কোন কোন কাজে ব্যবহৃত হয় (8-6.3 অনুচ্ছেদ দেখ)। ইহাদের 'অবম দোলক' (Minimum pendulum) বলে। $l=k$-তে $dT/dl=0$ হয় বলিয়া এই মানে l-এর সামান্য পরিবর্তনে T-র পরিবর্তন কার্যতঃ উপেক্ষণীয় হয়। অতএব $l=k$ হইলে দোলকের উষ্ণতার অল্প পরিবর্তন বা দোলন অক্ষের ক্ষুরধারের (knife edge) ক্ষয়ে দোলনকাল কার্যতঃ অপরিবর্তিত থাকে।

প্রশ্ন। (1) একটি সরু ঋজু দণ্ড উহার এক প্রান্তে অনুভূমিক অক্ষে উল্লম্ব তলে দুলিতেছে। প্রতি মিনিটে উহার দোলন সংখ্যা 80 এবং $g=9.80\ m/s^2$ হইলে দণ্ডের দৈর্ঘ্য কত? [উত্তর: 0.2096 m]

(2) 3 ফুট বাহুবিশিষ্ট একখানা বর্গাকার পাত উহার এক বাহুকে অনুভূমিক অক্ষ করিয়া সামান্য বিস্তারে দুলিতেছে। $g=32\ ft/s^2$ হইলে দেখাও যে উহার দোলনকাল $\pi/2$ সেকেণ্ড।

(3) কোন যৌগিক দোলকের দোলন অক্ষ উহার ভারকেন্দ্র হইতে 80 cm দূরে। তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য 100 cm। দোলন অক্ষ ভারকেন্দ্র হইতে কতদূরে থাকিলে তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য 116 cm হইবে?

দোলকের ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ কত?

[উত্তর: 100 cm বা 16 cm ; 40 cm]

8-3.4. যৌগিক দোলক সংক্রান্ত বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের জ্যামিতিক চিত্র। যৌগিক দোলকের ক্রিয়ায় যে সকল দৈর্ঘ্যের অবতারণা হইতে পারে তাহার সকলগুলির অর্থ স্পষ্ট মনে রাখা ভাল। সুবিধার জন্য সেগুলি এখানে আবার বলা হইল।

l_1 = লম্বনকেন্দ্র O এবং ভারকেন্দ্র G-র মধ্যে দূরত্ব OG (8.7 চিত্র) ;

l_2 = দোলনকেন্দ্র O' এবং ভারকেন্দ্র G-র মধ্যে দূরত্ব $O'G$;

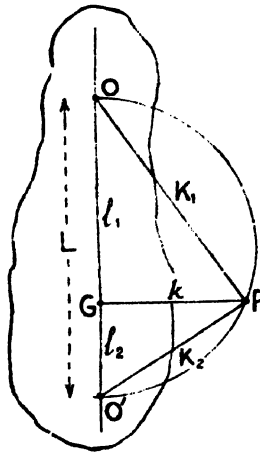
$L = l_1 + l_2$ = তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য ;

k = ভারকেন্দ্র G-র মধ্য দিয়া দোলন অক্ষের সমান্তরাল অক্ষে দোলনের ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ ;

K_1 = দোলন অক্ষে দোলকের ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ ;

K_2 = দোলনকেন্দ্র O'-এর মধ্য দিয়া লম্বিত এবং দোলন অক্ষের সমান্তরাল অক্ষে দোলকের ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ ।

এই রাশিগুলির মধ্যে সম্পর্ক নিচের মত :

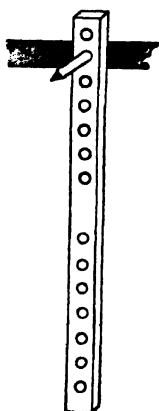
$$\left.\begin{array}{ll} L = l_1 + l_2 ; & k^2 = l_1 l_2 ; \\ K_1^2 = k^2 + l_1^2 ; & K_2^2 = k^2 + l_2^2 . \end{array}\right\} \quad (8\text{-}3.8)$$

8.7 চিত্র

রাশিগুলি ও উহাদের সম্পর্ক 8.7 চিত্রে জ্যামিতিক উপায়ে দেখান হইয়াছে। $OO' = L$ ব্যাসের একটি অর্ধবৃত্ত আঁকিয়া G হইতে লম্ব টানিয়া পরিধিকে P-তে ছেদ কর। OP এবং $O'P$ রেখা টানিলেই অঙ্কন পূর্ণ হইবে। চিত্রে

$OG = l_1$, $O'G = l_2$, $OO' = L = l_1 + l_2$,

$GP = k$ (কারণ $GP^2 = OG.OG' = l_1 l_2 = k^2$),

$OP = K_1$, $O'P = K_2$

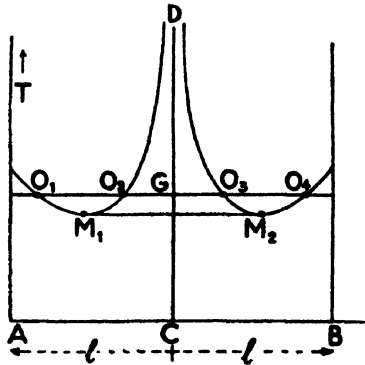
8-3.5. দণ্ডদোলক (Bar pendulum)। দোলক হিসাবে সুষম দণ্ড ব্যবহার করিয়া যৌগিক দোলকের আচরণ সহজে বোঝা যায়। দণ্ডের এক মাথা হইতে অন্য মাথা পর্যন্ত সমান দূরে দূরে অনেকগুলি ছিদ্র থাকা দরকার (8.8 চিত্র)। স্থির ক্ষুরধার (knife edge) হইতে দণ্ড বিভিন্ন ছিদ্রে ঝুলাইয়া প্রত্যেকবার দোলকের দোলনকাল দেখিতে হইবে।

8.8 চিত্র

দণ্ডের ভারকেন্দ্র হইতে ক্ষুরধারের দূরত্ব l-কে ভুজ এবং ঐ দূরত্বে দোলনকাল T-কে কোটি করিয়া একটি লেখ আঁকিলে 8.9 চিত্রের বক্রের মত রেখা পাওয়া যাইবে। ভুজের C বিন্দু ভারকেন্দ্রের অবস্থান বুঝায়। দোলন দণ্ডের এক প্রান্ত (A) হইতে অন্য প্রান্ত (B) পর্যন্ত দোলন অক্ষ সরাইতে থাকিলে দোলনকাল প্রথমে কমিয়া অবম মান M_1-এ আসে এবং পরে বাড়িয়া ভারকেন্দ্রে অসীম হয়। দোলন অক্ষ ভারকেন্দ্রের অন্য পাশে গেলে ইহারই পুনরাবৃত্তি হয়। এক অর্ধের l-T বক্র CD রেখায় প্রতিফলিত করিলে অন্য অর্ধের বক্র পাওয়া যায়।

ভুজ AB-র সমান্তরাল কোন রেখা যদি বক্রকে O_1, O_2, O_3, O_4 বিন্দুতে এবং CD রেখাকে G বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে $GO_1 = GO_4 = l_1$, এবং $GO_2 = GO_3 = l_2$ হইবে। $O_1O_3 = O_2O_4 = l_1 + l_2 = L$ তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য। $M_1M_2 = 2k =$ অবম দোলনকালে তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য।

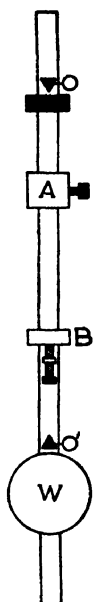
8-4. বিপর্যেয় দোলক (Reversible pendulum)। দোলকের সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণ g-র মান বাহির করা যায়। কিন্তু সাধারণ

দোলকের সাহায্যে খুব সূক্ষ্মভাবে ইহা করা সম্ভব নয়। সূক্ষ্ম কাজে বিশেষ গঠনের দোলক ব্যবহার করা হয়; এগুলিকে 'বিপর্যেয় দোলক' বলে।

যৌগিক দোলকের লম্বনকেন্দ্র ও দোলনকেন্দ্র বিনিমেয়, এবং উহাদের মধ্যের দূরত্ব তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্যের সমান—এই দুইটি ধর্মের উপর বিপর্যেয় দোলকের ক্রিয়া নির্ভর করে। বিপর্যেয় দোলকে দোলকের ভারকেন্দ্রের দুই পাশে মুখামুখি দুখানা ক্ষুরধার থাকে। পালা করিয়া এক এক

8.9 চিত্র

ক্ষুরধারে দোলকের দোলনকাল দেখা হয়, এবং হয় ক্ষুরধার সরাইয়া না হয় দোলকের ভারকেন্দ্র সরাইয়া উভয় ক্ষুরধারে দোলনকাল সমান করিতে হয়। ভারকেন্দ্র হইতে দুই ক্ষুরধারের দূরত্ব অবশ্যই অসমান রাখিতে হইবে। এই কারণে বিপর্যেয় দোলকের গঠন ভারকেন্দ্র সাপেক্ষে প্রতিসম করা হয় না। ভারকেন্দ্র হইতে অসমান দূরত্বে দোলনকাল সমান হইলে দুই দোলন অক্ষের অর্থাৎ, দুই ক্ষুরধারের, দূরত্ব তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্যের সমান হইবে। এই দূরত্ব খুব সূক্ষ্মভাবে মাপা সম্ভব এবং এই জন্য বিপর্যেয় দোলকের সাহায্যে g খুব সূক্ষ্মভাবে মাপা যায়।

8-4.1 কেটারের বিপর্যেয় দোলক (Kater's reversible pendulum)। 8.10 চিত্রে ক্যাপ্টেন কেটারের ব্যবহৃত বিপর্যেয় দোলকের প্রকৃতি বুঝান হইয়াছে। O এবং O' মুখামুখি দুইটি স্থির ক্ষুরধার; উহাদের দূরত্ব ছিল প্রায় এক মিটার। (ইহাতে দোলকটি কার্যতঃ 'সেকেণ্ড দোলক' হইয়াছিল, অর্থাৎ উহার দোলনকাল ছিল প্রায় 2 সেকেণ্ড।) তিনটি ভরের সাহায্যে দোলকের ভারকেন্দ্রের অবস্থার পরিবর্তন করা যায়। উহাদের মধ্যে W সবচেয়ে ভারী, এবং উহা O' ক্ষুরধারের বাহিরে এক জায়গায়

আটকান। দ্বিতীয় ভর *A* দোলক দণ্ডে *O*-র কাছাকাছি ইচ্ছামত জায়গায় আটকাইয়া রাখা যায়। তৃতীয় ভর *B* সবচেয়ে হালকা। দোলক দণ্ডের মাঝামাঝি কাটা সূক্ষ্ম স্কেলের উপরে উহা স্ক্রুর সাহায্যে ইচ্ছামত সরান যায়।

8.10 চিত্র

কার্যকালে *A* ও *B* সরাইয়া উভয় ক্ষুরধারে দোলনকাল ঠিক সমান করিতে হয়। প্রথম *A* সরাইয়া দোলনকাল মোটামুটি সমান করা হয়। পরে সূক্ষ্ম নিয়ন্ত্রণে *B* ব্যবহার হয়। কেটারের পরীক্ষায় 24 ঘণ্টায় দুই ধারে দোলন সংখ্যার প্রভেদ এক দোলনের ভগ্নাংশ মাত্র ছিল।

দুই দোলনকাল কার্যতঃ এক হওয়ায় *O* এবং *O′*-এর একটি লম্বনকেন্দ্র হইলে অন্যটি দোলনকেন্দ্র, এবং উহাদের দূরত্ব তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য *L*। কেটার তাঁহার পরীক্ষায় *L* এবং *T* মাপনের ত্রুটি দশ লক্ষে (10^6) দু-এক ভাগের অনধিক বলিয়া মনে করেন। ইহাতে *g*-র মান বা সেকেণ্ড দোলকের দৈর্ঘ্য ছয়টি সার্থক অংক (significant digits) পর্যন্ত জানা গিয়াছিল। সেকেণ্ড দোলকের দৈর্ঘ্য l_s হইলে $2=2\pi\sqrt{l_s/g}$। আলোচ্য

পরীক্ষায় $T = 2\pi \sqrt{L/g}$। অতএব

$$l_s = 4L/T^2 \text{ এবং } g = \pi^2 l_s \qquad (8\text{-}4.1)$$

কেটারের পরীক্ষা লণ্ডনে অনুষ্ঠিত হইয়াছিল। তিনি সেখানে $l_s = 39.1393$ ইঞ্চি পাইয়াছিলেন।

T মাপনে কয়েকটি শুদ্ধি প্রয়োগ করিতে হইয়াছিল। 8-5 অনুচ্ছেদে এগুলি আলোচিত হইয়াছে।

8-4.2. **বিপর্যেয় দোলক ব্যবহারে বেসেলের উপায় (Bessel's method)।** বিপর্যেয় দোলকের দুই ধারে দোলনকাল ঠিক সমান করা অত্যন্ত সময় সাপেক্ষ এবং একঘেয়েও বটে। বেসেল দেখান যে দুই দোলনকাল একেবারে সমান না করিয়াও মাপনের সূক্ষ্মতা অক্ষুণ্ণ রাখা যায়। ইহাতে সময় অনেক বাঁচে।

ধরা যাক ভারকেন্দ্র হইতে O-র দূরত্ব l_1 এবং O'-এর দূরত্ব l_2, এবং দুই ক্ষেত্রে দোলনকাল যথাক্রমে T_1 ও T_2। তাহা হইলে

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + l_1^2}{gl_1}} \text{ এবং } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + l_2^2}{gl_2}}$$

অথবা $gl_1T_1^2/4\pi^2 = k^2 + l_1^2$

এবং $gl_2T_2^2/4\pi^2 = k^2 + l_2^2$.

প্রথমটি হইতে দ্বিতীয়টি বিয়োগ করিলে পাই

$$g(l_1T_1^2 - l_2T_2^2)/4\pi^2 = l_1^2 - l_2^2$$

বা $$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{l_1T_1^2 - l_2T_2^2}{l_1^2 - l_2^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{T_1^2 + T_2^2}{l_1 + l_2} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{l_1 - l_2}\right\} \qquad (8\text{-}4.2)$$

T_1 ও T_2 কাছাকাছি হইলে উপরের সমীকরণের ডানদিকের প্রথম পদটি দ্বিতীয়ের তুলনায় অনেক বড় হয়। তাছাড়া, $l_1 + l_2$ দোলকের দুই ক্ষুরধারের দূরত্ব বলিয়া উহা খুব সূক্ষ্মভাবে মাপা যায়। দ্বিতীয় পদের $T_1^2 - T_2^2$ রাশিটি ছোট, অথচ $l_1 - l_2$ রাশিটি মোটামুটি বড়। এক্ষেত্রে $l_1 - l_2$ মাপনে $l_1 + l_2$ মাপনের মত সূক্ষ্মতার দরকার হয় না, দোলকের ভারকেন্দ্রে উহার ভারসাম্য (balance) ঘটাইয়া ঐ স্থান হইতে দুই ক্ষুর-ধারের দূরত্ব মাপিয়া $l_1 - l_2$ বাহির করিলে সূক্ষ্মতার হানি হয় না। দেখা

যায় $T_1 - T_2$ যদি $1.5 \times 10^{-4} T_1$-এর চেয়ে কম হয়, তাহা হইলে $l_1 - l_2$ উপরোক্তভাবে মাপিয়া g বাহির করিতে 8-4.2 সমীকরণ প্রয়োগ করিলে যে ত্রুটি থাকে, তাহা বিপর্যেয় দোলকের L ও T মাপনের সহজাত ত্রুটির চেয়ে বেশী নয়।

8-5. দোলকে শুদ্ধি প্রয়োগ (Corrections in the use of a pendulum)। ভৌত সকল পরীক্ষায়ই এক বা একাধিক রাশি মাপিয়া কোন সমীকরণের সাহায্যে নির্ণেয় রাশি বাহির করা হয়। দোলকের সাহায্যে g বাহির করাও এরূপ।

সমীকরণ প্রতিষ্ঠার সময় জটিলতা এড়াইবার জন্য কোন কোন বিষয় সরল করিয়া ধরা হয়। কার্যক্ষেত্রে হয়ত এই সকল সরলতা থাকে না। তখন ইহাদের জন্য শুদ্ধি দরকার হয়, অথবা চেষ্টাকৃত ব্যবস্থায় ঐ সরলতা আনিতে হয়।

দোলক সংক্রান্ত পরীক্ষায় কি কি শুদ্ধির দরকার হয় এবং কিভাবে শুদ্ধি প্রয়োগ করা হয় বা ত্রুটি এড়ান যায় তাহা নিচে আলোচনা করা হইল।

(১) দোলকের বিস্তারজনিত শুদ্ধি (Amplitude correction)। দোলনকাল হিসাব করিতে দোলকের বিস্তারের ক্ষুদ্রতা সীমাহীন ধরা হইয়াছে। কার্যতঃ বিস্তার সসীম থাকে। কাজেই α কৌণিক বিস্তারে প্রেক্ষিত দোলনকাল T-কে 8-2.4 বা 8-2.5 সমীকরণ প্রয়োগে T_0-তে পরিণত করিয়া লইতে হইবে।

(২) বায়ুর শুদ্ধি (Air correction)। দোলক বায়ুতে দুলিলে উহার জন্য তিন প্রকারের শুদ্ধি দরকার হয়—(ক) বায়ুর প্লবতা (buoyancy), (খ) দোলকে চালিত বায়ুর গতিশক্তি ও (গ) বায়ুর সান্দ্রতা (viscosity) জনিত বাধা।

(ক) বায়ুর প্লবতা দোলকের ভারের বিপরীতে ক্রিয়া করিয়া উহার কার্যকর ভর কমায়। এ কারণে দোলনকাল বাড়ে। প্লবতা স্থানচ্যুত বায়ুর ওজনের সমান ; ইহা হিসাব করিয়া বাহির করা যায়।

(খ) দোলক দুলিতে থাকিলে উহার সঙ্গে কিছু বায়ুও চালিত হয়। ইহার ক্রিয়ায় দোলকের কার্যকর জাড্য ভ্রামক বাড়ে। তাহাতে দোলনকালও বাড়ে। হিসাব করিয়া জাড্য ভ্রামকের বৃদ্ধি বাহির করা কার্যতঃ সম্ভব নয়। বেসেল দেখাইয়াছেন যে বিপর্যেয় দোলকের গঠনে যদি উহার জ্যামিতিক কেন্দ্র সাপেক্ষে দোলকের প্রতিসাম্য থাকে, তাহা হইলে বায়ুর (ক) ও (খ) ক্রিয়ার ফল অপনীত হয় এবং 8-4.2 বা কেটারের

$T = 2\pi\sqrt{(l_1 + l_2)/g}$ সমীকরণ শুদ্ধই থাকে। রেপসোল্ড (Repsold) এই প্রকার দোলক ব্যবহার করিয়াছিলেন।

বায়ুর ঘনত্ব ধাতব দোলকের পদার্থের ঘনত্বের প্রায় 1.5×10^{-4} অংশ। উপরের (ক) ও (খ) মোটামুটি বায়ুর ঘনত্বের আনুপাতিক। অতএব যে সকল মাপনে সূক্ষ্মতা 10^4 অংশে 1 অংশের চেয়েও স্থূল হইলে চলে, সে মাপনে বায়ুর শুদ্ধির (ক) ও (খ) উপেক্ষা করা যায়।

(গ) বায়ুর সান্দ্রতাজনিত বাধায় দোলকের বিস্তার ক্রমশঃ কমিয়া আসে। দোলন অবমন্দিত (damped) হইলে দোলনকাল একটু বাড়ে (3-16.6 সমীকরণ দেখ)। দোলনের বিস্তার যদি 5 মিনিটেই অর্ধেক হয় তাহা হইলেও ইহার জন্য দোলনকালের পরিবর্তন 10^6 অংশে 1 অংশের চেয়ে বেশী হয় না। কাজেই বায়ুর সান্দ্রতার বাধা সাধারণ কাজে উপেক্ষা করা যায়।

বায়ুর জন্য দোলনকালের শুদ্ধি $a\rho + b\sqrt{\rho}$ রূপে প্রকাশ করা যায়। ρ পরীক্ষাকালে বায়ুর ঘনত্ব; a ও b রাশি দুইটি দোলকের গঠনের উপর নির্ভর করে এবং কোন প্রদত্ত দোলকে উহারা স্থিরমান, কিন্তু বিভিন্ন দোলকে বিভিন্ন। পরীক্ষার সাহায্যে প্রদত্ত দোলকের a ও b বাহির করা যায়।

বর্তমানে সূক্ষ্ম মাপনে দোলক বায়ুশূন্য আধারে রাখিয়া কাজ করা হয়। ইহাতে বায়ুর জন্য কোন শুদ্ধিই দরকার হয় না।

(৩) **ক্ষুরধারের বক্রতা (Curvature of knife edge** । ক্ষুরধারের ধার রেখামাত্র নয়; উহা কার্যতঃ বেলনের বক্রতল। দোলকের দোলন অক্ষ এই বেলনের অক্ষ। বেলনের ব্যাসার্ধ r হইলে দোলন অক্ষ ও ভারকেন্দ্রে দূরত্ব l না হইয়া $l + r$ হয়। বিপর্যেয় দোলকের দুই ক্ষুরধারের ব্যাসার্ধ r_1, r_2 হইলে উহার তুল্য দোলকের দৈর্ঘ্য $L + r_1 + r_2$; L দুই ক্ষুরধারের দূরত্ব। দৈর্ঘ্য বাড়িবার ফলে দোলনকাল বাড়ে। r 0.1mm ক্রমের হইলে সেকেণ্ড দোলকের দোলনকাল প্রায় 10^4 অংশে 1 অংশ বাড়ে।

বেসেল বিপর্যেয় দোলকে ক্ষুরধারের বক্রতার ক্রিয়া অপনীত করার একটি উপায় বাহির করিয়াছিলেন। তাহাতে দোলকের দুই ক্ষুরধার বদলাবদলি করিয়া আর একবার দুই ধারে নিকট-সমতা আনিতে হয়। কিন্তু ক্ষুরধার বদলাবদলি করার চেষ্টায় বিপদের আশঙ্কা আছে, কারণ ক্ষুরধার দোলকের সঙ্গে ঠিক জায়গায় এবং আঁট করিয়া লাগানর ত্রুটি থাকিতে পারে।

ক্ষুরধার দোলকের সঙ্গে না লাগাইয়া যদি আধারের সঙ্গে লাগান থাকে এবং দোলকে ক্ষুরধারের বদলে যদি যথার্থ সমতল মোটা পাত থাকে, তাহা হইলে ক্ষুরধারের বক্রতার জন্য কোন ত্রুটি আসে না। যে সকল মাপনে সূক্ষ্মতা চরম হওয়া দরকার সে সব ক্ষেত্রে এরূপ ব্যবস্থা করা হয়।

ব্যবহারের সঙ্গে ক্ষুরধারের তীক্ষ্ণতা কমে এবং উহা স্থূল হয় অর্থাৎ উহার বক্রতা ব্যাসার্ধ বাড়ে। ক্ষুরধার সাধারণতঃ ইস্পাত বা অ্যাগেট (agate) পাথরে, এবং কোন কোন ক্ষেত্রে কোয়ার্টজে তৈয়ারি হয়।

(৪) আধারের বিচলন (Yield or sway of support)। দোলনকালে দোলক উহার আধারের উপর বল প্রয়োগ করে। বলকে খাড়া ও অনুভূমিক উপাংশে ভাগ করা যায়। খাড়া উপাংশের ক্রিয়া অনুভূমিকের তুলনায় দুর্বল। আধার দৃঢ় না হইলে উহার কিছু অনুভূমিক সরণ হইবে। ইহাতে দোলন অক্ষ কার্যতঃ একটু উপরে ওঠে (8.11 চিত্র), অর্থাৎ দোলনের কার্যকর দৈর্ঘ্য বাড়ে এবং ফলে দোলন কালও বাড়ে।

8.11 চিত্র

গণনায় দেখা যায় দোলনে আধারের অনুভূমিক সরণ দোলকের ভারের সমান অনুভূমিক বলের ক্রিয়ায় উহার সরণের সমান। যেখানে এই শুদ্ধি দরকার সেখানে ঐরূপ বল প্রয়োগ করিয়া সরণ মাপিতে হয়। দৃঢ় আধারে সরণ এত কম যে আলোকের ব্যতিচারের (optical interference) সাহায্য ছাড়া ইহা মাপা যায় না। অন্যথায় মাইক্রোস্কোপ ব্যবহার করা যায়।

গৌণভাবে আধারের সরণের জন্য শুদ্ধি মাপা যায়। ইহার জন্য অনুরূপ আর একটি দোলক একই আধার হইতে ঝুলান থাকে; উহাকে দোলান হয় না। প্রথম দোলক দোলাইয়া দিলে আধারের মাধ্যমে প্রথম হইতে দ্বিতীয় দোলকে গতি সঞ্চারিত হয় এবং দ্বিতীয় দোলক দুলিতে আরম্ভ করে।

ইহা যুগ্মিত দোলন (coupled oscillation)। t_1 হইতে t_2 অবসরে দ্বিতীয় দোলকের বিস্তার α_1 হইতে α_2-তে এবং প্রথম দোলকের বিস্তার β_1 হইতে β_2-তে পরিণত হইলে, আধারের সরণের জন্য দোলনকাল T-র শুদ্ধির মান

$$\delta T = T^2 \; \frac{(\alpha_2/\beta_2 - \alpha_1/\beta_1)}{\pi(t_2 - t_1)} \qquad (8\text{-}5.1)$$

এই শুদ্ধির মান 10^{-5} T-র কম হইলে একই রকম দুইটি দোলক একই আধার হইতে সমান বিস্তারে ও বিপরীত দশায় দোলাইয়া উহাদের T বাহির করিলে আধারের সরণের জন্য আলাদা শুদ্ধির দরকার হয় না। (8-6.1 ও 8-7.1 সমীকরণ এবং উহাদের সংক্রান্ত আলোচনাও দেখ।)

(৫) **উষ্ণতার পরিবর্তন।** উষ্ণতা পরিবর্তনে দোলকের দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন হয় বলিয়া উহার দোলনকালও বদলায়। একই দোলক দুই স্থানে দোলাইয়া দুই স্থানের g তুলনা করা যায় (8-6.3 অনুচ্ছেদ দেখ)। কিন্তু দোলনকালে উষ্ণতা একই না থাকিলে শুদ্ধির দরকার হয়। $t_1°$ ও $t_2°$ উষ্ণতায় দোলনকাল যথাক্রমে T_1 ও T_2 হইলে

$$\frac{T_1}{T_2} = \left[\frac{l}{l\{1 + \alpha(t_2 - t_1)\}} \right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha(t_2 - t_1) \qquad (8\text{-}5.2)$$

8-6. g **নির্ণয়।** কোন স্থানে g জানার প্রয়োজনীয়তা অবশ্যই আছে। বস্তুর ভার স্থানীয় g-র উপর নির্ভর করে। তাছাড়া, পৃথিবীর বিভিন্ন স্থানে g জানিতে পারিলে উহার সাহায্যে পৃথিবীর জিয়য়্‌ডের (geoid ; 8-1.2 অনুচ্ছেদ দেখ) আকার বাহির করা যায়। ইহা করিতে পারা ভূগণিতের (Geodesy) একটি মুখ্য উদ্দেশ্য। ভূত্বকের বেধ ও উহাতে ভর বিন্যাস বিভিন্ন স্থানে g মাপিয়া পাওয়া যায়। g-র স্থানীয় ব্যতিক্রম ত্বকের উপরাংশের ভর বিন্যাসের উপর নির্ভর করে বলিয়া ইহা হইতে ভূবিজ্ঞান (Geology) সংক্রান্ত অনেক তথ্য জানা যায়। ভূপৃষ্ঠের কাছাকাছি খনিজ তেল থাকিলে সেখানে g-র মান একটু কম হয়, কারণ তেল পাথরের তুলনায় অনেক হালকা। এইজন্য খনিজ তেলের অনুসন্ধানে g-র সামান্য প্রভেদ মাপিতে পারার সার্থকতা অনেক।

g নির্ণয় সংক্রান্ত কাজকে তিন অংশে ভাগ করা যায়—

(১) কোন স্থানে g-র নিরপেক্ষ মাপন (absolute determination) ;

(২) দুই স্থানে g-র অনুপাত মাপা ; ও

(৩) দুই স্থানে g-র প্রভেদ মাপা।

বহুপ্রকার আধুনিক যন্ত্রে সুসজ্জিত বীক্ষণাগার ছাড়া যথেষ্ট সূক্ষ্মভাবে g মাপন অন্যত্র সম্ভব নয়। জিওডেসি সংক্রান্ত মাপনে ত্রুটি 10^7 অংশে 5 অংশের মধ্যে থাকাই কাম্য। অতএব দোলকের দৈর্ঘ্য এবং দোলনকাল এইরূপ সূক্ষ্মতায় মাপিতে হইবে। দৈর্ঘ্য মাপিতে ইহার জন্য আলোকের ব্যতিচারের সাহায্য লইতে হয়, এবং সময় মাপিতে ক্রিস্ট্যাল দোলকের (crystal oscillator)। উন্নত দেশগুলির রাষ্ট্রীয় বীক্ষণাগারে এরূপ মাপন হইয়াছে ; অন্যান্য বৈজ্ঞানিক প্রতিষ্ঠানেও কিছু কিছু হইয়াছে।

পৃথিবীর বিভিন্ন স্থানে যথেষ্ট সংখ্যক জায়গায় g-র সূক্ষ্ম মান জানা থাকিলে তবেই জিয়য়ডের আকার নির্ধারণে উহা কাজে লাগান যায়। এত জায়গায় g-র নিরপেক্ষ মাপনের সুবিধা না থাকায় যেখানে g জানা আছে তাহার আশেপাশে একই দোলকের দোলনকাল দেখিয়া বিভিন্ন স্থানের g তুলনা করিয়া বাহির করা হয়। ইহাকে 'অভিকর্ষ জরিপ' (gravity survey) বলে। খনিজ তেল বা আকরিক পদার্থ অনুসন্ধানের কাজেও g জরিপ করা হয় ; কিন্তু এখানে g-র পরিবর্তন অত্যন্ত কম (মিলিগ্যাল বা তাহার ভগ্নাংশ) বলিয়া দোলকের বদলে গ্র্যাভিমিটার (gravimeter) যন্ত্র ব্যবহার করা হয় (8-6.4 অনুচ্ছেদ দেখ)। তাছাড়া, শেষোক্ত জরিপ অল্প স্থানের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে।

l ও T মাপনে কতটা ত্রুটি থাকিলে g-র মানে কতখানি ত্রুটি থাকিবে তাহা সহজেই হিসাব করা যায়।

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \text{ বা } g = 4\pi^2 l/T^2$$

অতএব $\log g = \log 4\pi^2 + \log l - 2\log T$

এবং $\dfrac{dg}{g} = \dfrac{dl}{l} - 2\,\dfrac{dT}{T}$

dl ও dT রাশিকে l ও T মাপনের ত্রুটি ধরিলে, উহারা পজিটিভ বা নিগেটিভ উভয় প্রকারেরই হইতে পারে বলিয়া g-র আপেক্ষিক ত্রুটি dg/g-র মান হইবে

$$\frac{dg}{g} \quad \frac{dl}{l} + 2\,\frac{dT}{T}$$

সাধারণ শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে ছাত্রদের যেরূপ যন্ত্র দেওয়া হয় তাহাতে dl/l বা dT/T 10^4 অংশে 1 অংশের বেশী বই কম হয় না। অতএব g মাপনে এক্ষেত্রে প্রায় 1 cm/s^2 ত্রুটি থাকাই স্বাভাবিক। এরূপ স্থূল মাপনে আগের অনুচ্ছেদে যে সকল শুদ্ধির উল্লেখ করা হইয়াছে তাহাদের

মধ্যে সম্ভবতঃ এক বিস্তারের শুদ্ধি ছাড়া অন্যগুলি অর্থহীন। বিস্তার 5° হইলে T-তে শুদ্ধি প্রায় 10^4 অংশে 4 অংশ।

8-6.1. দোলকের সাহায্যে g-র নিরপেক্ষ মাপন। ইহার জন্য বিপর্যেয় দোলক ব্যবহার করা হয়। সূক্ষ্ম মাপনে দোলকে ক্ষুরধারের বদলে যথার্থ সমতল পাত দোলকের অক্ষের অভিলম্বে দৃঢ়ভাবে লাগান থাকে। ক্ষুরধার দোলকের আধারের সঙ্গে শক্ত করিয়া আঁটা থাকে। এই ব্যবস্থায় ক্ষুরধারের বক্রতাজনিত কোন শুদ্ধির দরকার হয় না এবং বিপর্যেয় দোলকের দুই দোলন অক্ষের দূরত্ব বেশী সূক্ষ্মভাবে মাপা যায়।

বায়ুঘটিত শুদ্ধি এড়াইবার জন্য দোলকের আধার হইতে বায়ু নিষ্কাশন করিয়া উহাকে মাত্র কয়েক মিলিমিটার পারার চাপে আনা হয়। বিস্তার ঘটিত শুদ্ধি অবশ্যই করিতে হয়। বিস্তার সাধারণতঃ 1°-র মত রাখা হয়। যে উষ্ণতায় দোলনকাল দেখা হয় সেই উষ্ণতায়ই দৈর্ঘ্য মাপা না হইলে দৈর্ঘ্য প্রসারণের শুদ্ধি দরকার। ইহার জন্য দোলকদণ্ডের প্রসারণ গুণাঙ্ক ও উষ্ণতা পরিবর্তন জানা দরকার।

দৈর্ঘ্য মাপনের ত্রুটি মাপন যন্ত্রের সূক্ষ্মতার উপর নির্ভর করে। এ জাতীয় দোলকের দৈর্ঘ্য সাধারণতঃ এক মিটারের মত হয়; ইহাতে দোলক প্রায় সেকেণ্ড দোলকের মত হয়। কোন কোন ক্ষেত্রে দোলক দণ্ড ছোট করিয়া উহার দোলনকাল প্রায় 1 সেকেণ্ডের কাছাকাছি করা হয়; ইহাতে দোলকের দৈর্ঘ্য হয় প্রায় 25 cm। দৈর্ঘ্য মাপনে আলোকের ব্যতিচারের সাহায্য নেওয়া সাধারণ ক্ষেত্রে দুর্ঘট। অন্যথায় কম্পারেটর (comparator) বা ক্যাথেটোমিটারের (cathetometer) সাহায্যে দৈর্ঘ্য এক মিলিমিটারের শতাংশ অবধি সূক্ষ্মতায় মাপা যায়। ইহাতে মাপনে ত্রুটি হয় প্রায় 10^5 অংশে 1 অংশ। ব্যতিচারে দৈর্ঘ্য মাপিয়া মাপনের ত্রুটি 10^7 অংশে দু-এক অংশ বা তাহারও কিছু নিচে নামান যায়।

সময় মাপনে ক্রিস্ট্যাল দোলক ব্যবহারের সুবিধা সাধারণ পরীক্ষাগারে বড় একটা নাই। ইহার সাহায্যে সেকেণ্ডের সহস্রাংশও মাপা যায়, এবং হাজার সেকেণ্ড (15-16 মিনিট) ধরিয়া দোলন দেখিলে দোলনকাল মাপনে ত্রুটি 10^6 অংশে 2 অংশের মধ্যে রাখা যায়। কার্যক্ষেত্রে দোলনকাল এক হইতে ছ' ঘণ্টা ধরিয়া দেখা হয়। ইহাতে ত্রুটি 10^7 অংশে দু-এক অংশ হয়।

সেকেণ্ড দোলকবিশিষ্ট মানক ঘড়ি (standard clock) থাকিলে সময় 10^5 অংশে 1 অংশ সূক্ষ্মতায় সহজেই মাপা যায়। এই দোলক দণ্ডের ও আলোচ্য দোলক দণ্ডের অক্ষ চিহ্নিত করিয়া পরীক্ষণীয় দোলক এমনভাবে

রাখিতে হয় যাহাতে দুই দোলক একে অন্যের সম্মুখে সমান্তরাল তলে দোলে এবং ঐ তলের অভিলম্বে টেলিস্কোপের ভিতর দিয়া দেখিলে দুই অক্ষ সমান্তরাল হইলে তাহা বোঝা যায়। দুই দোলকের দোলনকাল কাছাকাছি থাকায় উভয়ে দুলিতে থাকিলে কোন সময় দুই দণ্ডের অক্ষ সমান্তরাল হইবে। দুই অক্ষের এইরূপ সমাপতন (coincidence) ঘটিলে তখন একবার সময় দেখা হয়। ইহার পর দ্বিতীয়বার আবার যখন সমাপতন ঘটে তখন আবার সময় দেখা হয়। অতিক্রান্ত সময় t সেকেণ্ড হইয়া থাকিলে ইতিমধ্যে ঘড়ি দোলকের $t/2$ দোলন হইয়াছে, এবং আলোচ্য দোলকের দোলন সংখ্যা $t/2\pm1$। অতএব দোলনকাল

$$T=\frac{t}{\frac{1}{2}t\pm1}=\frac{2t}{t\pm2}$$

সমীকরণে + কি − চিহ্ন লইতে হইবে তাহা কোন্ দোলক তাড়াতাড়ি চলে তাহা দেখিয়া ঠিক করা হয়।

t বড় হইলে সঠিক কখন সমাপতন হইয়াছে তাহা বোঝা দুষ্কর হয়। ধরা যাক δt সময় ধরিয়া সমাপতনের ইতর বিশেষ বোঝা যায় না। এক্ষেত্রে সময় মাপনে আপেক্ষিক ত্রুটি হইবে $\pm 2\delta t/t^2$। $t=1000$ s এবং $\delta t=5$ s হইলে ত্রুটি প্রায় 10^5 অংশে 1 অংশ।

যে ঘড়ি এ কাজে ব্যবহার করা হইল তাহার ত্রুটি কত সঠিক জানা দরকার।

8-6.2. g-র নিরপেক্ষ মাপনের অন্য উপায়। g-র নিরপেক্ষ মাপনে প্রধানতঃ দোলকই ব্যবহৃত হইয়া আসিয়াছে। সম্প্রতি এ উদ্দেশ্যে অন্যান্য উপায়ও প্রযুক্ত হইয়াছে। তাহাদের মধ্যে অভিকর্ষের ক্রিয়ায় অবাধ গতি অন্যতম। স্থিতি হইতে কোন বস্তু অবাধে পড়িলে t সময় পরে উহার অবস্থান

$$x=x_0+v_0t+\tfrac{1}{2}gt^2.$$

x ও t মাপিয়া x_0, v_0, g পাওয়া যায়। সূক্ষ্ম স্কেল কাটা এক মিটার লম্বা একটি দণ্ড বায়ুশূন্য স্থানে খাড়াভাবে অবাধে পড়িতে দিয়া ঠিক নির্দিষ্ট সময় পর পর 0.3 মাইক্রোসেকেণ্ডব্যাপী আলোকসম্পাতে (exposure) সেকেণ্ডে 50 বা 100 বার হারে উহার ফটো তুলিয়া মাপন হইয়াছে। x ও t 10^7 অংশে কয়েক অংশের সূক্ষ্মতায় মাপিতে পারিলে g-র ত্রুটি 10^6 অংশে 1 অংশের কম হইবে। ইহা দোলকে g মাপনের সূক্ষ্মতার সঙ্গে তুলনীয়।

অন্য এক ব্যবস্থায় কোন গোলক খাড়াভাবে উপরে ছুড়িয়া h দূরত্বে

অবস্থিত দুইটি অনুভূমিক তল অতিক্রম করিতে উহা কি সময় নেয় তাহা মাপিয়া g বাহির করা হইয়াছে। নিচের তল দুইদিকে (ওঠা ও নামার সময়) অতিক্রম করিতে δt_1 সময় ও উপরের তলে অনুরূপ δt_2 সময় লাগিলে

$$g = \frac{8h}{(\delta t_1)^2 - (\delta t_2)^2}$$

এই উপায়কে আগেরটির চেয়ে ভাল মনে করা হয়। বিজ্ঞানে উন্নত দেশগুলির রাষ্ট্রীয় গবেষণাগারে এই সকল পরীক্ষা হইয়াছে ও হইতেছে, এবং ইহার জন্য আধুনিকতম যন্ত্র ও উপায় ব্যবহৃত হইয়াছে। দৈর্ঘ্য মাপা হইয়াছে Kr 86-এর কমলা রংয়ের আলোক তরঙ্গের সাহায্যে (1-1 অনুচ্ছেদ দেখ) এবং সময় মাপিতে আণবিক ঘড়ি (atomic clock) ব্যবহার হইয়াছে।

8-6.3. **তুলনায় g-র মান নির্ণয়—অভিকর্ষ জরিপ।** কোন কেন্দ্রীয় স্থানে g-র মান সঠিক জানা থাকিলে অন্য একটি দোলক ঐ স্থানে এবং উহার পার্শ্ববর্তী অঞ্চলে (প্রায় 500 mgal-এর মধ্যে) দোলাইয়া দুই স্থানে উহার দোলনকাল দেখিয়া দুই স্থানের g তুলনা করা যায়, কারণ

$$T_1^2/T_2^2 = g_2/g_1$$

বিভিন্ন স্থানে g-র নিরপেক্ষ মাপনের তুলনায় এ কাজ অনেক সহজ, কিন্তু ইহার জন্য কয়েকটি সতর্কতা অবলম্বন করা দরকার।

এইরূপ জরিপের কাজে ব্যবহৃত দোলক সাধারণতঃ অর্ধ সেকেণ্ড দোলক (half-seconds pendulum) হইয়া থাকে এবং ইহার একটি মাত্র স্থির ক্ষুরধার থাকে; ইহা বিপর্যেয় দোলক নয়। ইহার দোলনকাল প্রায় 1 সেকেণ্ড এবং দৈর্ঘ্য প্রায় 25 cm। বিভিন্ন স্থানে লইয়া যাইতে হইবে বলিয়া ইহা সুবহ (portable) হওয়া দরকার। বিভিন্ন আবহাওয়ায় কাজ করিতে হইবে বলিয়া ইহা আবহাওয়ার ক্রিয়া রোধক পদার্থে তৈয়ারি করিতে হয়। সাধারণতঃ ইহারা ব্রোঞ্জ, ইনভার বা গলান কোয়ার্টজে তৈয়ারি হয়। ইনভার ও কোয়ার্টজের দৈর্ঘ্য প্রসারণ গুণাঙ্ক খুবই কম। (10^6 অংশে 1 অংশ বা আরও কম)। যন্ত্রের উষ্ণতা 0.1°C-র মধ্যে নিয়ন্ত্রিত রাখিলে উষ্ণতা পরিবর্তন জনিত কোন শুদ্ধির দরকার হয় না। কোয়ার্টজ দোলকে শুধু একটি দণ্ড থাকে, দোলকপিণ্ড থাকে না। দোলন অক্ষ ও দণ্ডের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব k-র সমান করা হয়। ইহাতে দোলনকাল অবম হয় (8-3.7 সমীকরণ দেখ), এবং দৈর্ঘ্যের অল্প পরিবর্তনে দোলনকালের কোন উল্লেখযোগ্য কোন পরিবর্তন হয় না।

কোয়ার্টজ দোলকে স্থির বৈদ্যুতিক আধান জমিতে পারে। ইহার ক্রিয়ায় দোলনে বিঘ্ন হইতে পারে বলিয়া দোলকের আধারে একটু তেজষ্ক্রিয় (radioactive) পদার্থ রাখা হয়। উহাতে সৃষ্ট আয়ন স্থির আধানকে প্রশমিত করে।

ইনভার চৌম্বক পদার্থ বলিয়া উহা ব্যবহার কালে একটি বৈদ্যুত কুণ্ডলীর সাহায্যে ভূচুম্বক ক্ষেত্রের খাড়া উপাংশ নিষ্ক্রিয় করিয়া লইতে হয়। ইনভার ও ব্রোঞ্জ দোলকে ভারী দোলকপিণ্ড থাকে।

ভূমিতে নানা স্থানে মৃদুকম্পন লাগিয়াই থাকে; ইহাদের microseism বলে। সমুদ্রের কাছাকাছি বা ভারী যানবাহন যাতায়াতের পথের কাছে ইহারা কিছু জোরাল হয়। এই কম্পন সত্ত্বেও যাহাতে দোলনকাল প্রয়োজনীয় সূক্ষ্মতায় বাহির করা যায় সেজন্য একই আধার হইতে দুটি একই দৈর্ঘ্যের দোলক প্রায় সমান বিস্তারে ও বিপরীত দশায় দোলান হয়। কম্পনের জন্য দোলনতলে আধারের অনুভূমিক সরণ x হইলে দুই দোলকের সমীকরণ হইবে

$$\ddot{\theta}_1 + (g/l_1)\theta_1 + \ddot{x}/l_1 = 0$$
$$\ddot{\theta}_2 + (g/l_2)\theta_2 + \ddot{x}/l_2 = 0$$

$l_1 = l_2$ হইলে পাই

$$(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + (g/l_1)(\theta_1 - \theta_2) = 0 \qquad (8\text{-}6.1)$$

ইহা l_1 দৈর্ঘ্যের একটি অলীক দোলকের সমীকরণ। দোলক দুটিতে ঠিক মত লাগান আয়না হইতে আলোকরশ্মি প্রতিফলিত করিয়া এই অলীক দোলকের দোলন ও তাহা হইতে দোলনকাল পাওয়া যায়। ইহাতে কম্পনের ক্রিয়া অপনীত হয়।

এই ব্যবস্থায় আধারের অনুভূমিক সরণজনিত ত্রুটিও (8-5(8) অনুচ্ছেদ দেখ) অপনীত হইতে পারে। নহিলে একই আধারে তৃতীয় আর একটি সমান দৈর্ঘ্যের দোলক প্রথমে স্থির রাখিয়া উহার ঘূর্ণিত দোলন দেখা হয়। আধারের বিচলনজনিত ত্রুটি 8-5.1 সমীকরণের সাহায্যে দূর করা যায়।

দোলকের আধারের ভিতরের বায়ুর চাপ কমাইয়া মাত্র কয়েক মিলিমিটার পারা বা তাহারও কম করা হয়। দোলকে লাগান আয়নার সাহায্যে আলোকরশ্মি প্রতিফলিত করিয়া বিপরীত দশার দোলকের $\theta_1 - \theta_2$ এবং স্থির দোলকের θ একই ফটোগ্রাফিক কাগজে ফেলা হয়। উহাতে সেকেণ্ড বা তাহার ভগ্নাংশের দাগও ফেলিতে হয়। এই চিত্রলিপি হইতে T বাহির

করা হয়। এক একবারে দোলকের দোলন ঘণ্টাখানেক ধরিয়া চলে এবং কয়েকবার এইরকম করা হয়। দোলক বদলাইবার রীতিও প্রচলিত আছে।

প্রেক্ষিত T-তে বিস্তারের শুদ্ধি করিতে হয়। অন্য শুদ্ধির বড় একটা দরকার থাকে না কারণ সেগুলি সবই অপনীত করা হইয়াছে। ক্ষুরধার দোলকের আধারে লাগান থাকে এবং দোলক উহার উপর সমতল পাতের সাহায্যে দোলে বলিয়া ক্ষুরধারের বক্রতায় ত্রুটি ঘটে না।

জরিপের আরম্ভে ও পরে দোলকগুলিকে কেন্দ্রীয় স্টেশনে (যেখানে g-র নিরপেক্ষ মাপন হইয়াছে) দোলাইয়া T দেখিতে হয়। জরিপের সময় দোলকের দৈর্ঘ্যের বা ভরের কোন পরিবর্তন হইয়া থাকিলে ইহাতে সে ত্রুটি ধরা পড়ে।

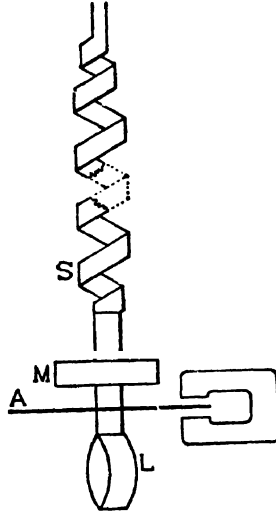
উপরোক্ত উপায়ে তুলনায় g মাপনের ত্রুটি 0.5 mgal-এর মধ্যে রাখা যায়। অনুকূল অবস্থায় ত্রুটি কমিয়া 0.2 mgal হইতে পারে।

গ্র্যাভিমিটার যন্ত্রের ক্রমোন্নতির সঙ্গে দোলনের সাহায্যে g-র অনুপাত মাপার প্রচলন কমিয়া গিয়া বর্তমানে প্রায় লোপ পাইয়াছে। গ্র্যাভিমিটার দুই স্থানে g-র প্রভেদ মাপে এবং মাপনের ত্রুটি সহজেই 0.1 mgal-এর নিচে রাখা যায়।

8·6.4. **গ্র্যাভিমিটার বা অভিকর্ষ মিটার (Gravimeter)**। গ্র্যাভিমিটার বা গ্র্যাভিটিমিটার দুই স্থানের অভিকর্ষের প্রভেদ মাপিবার সুবেদী যন্ত্রবিশেষ। ইহার সাহায্যে প্রভেদের পাঠ পাইতে মাত্র কয়েক মিনিট সময় লাগে এবং আধুনিক যন্ত্রে প্রায় 0.01 mgal-এর প্রভেদ ধরা যায়। ভূপৃষ্ঠে মাত্র 3 cm উচ্চতার পরিবর্তনে g-র পরিবর্তন প্রায় 0.01 mgal হয়। দোলকের তুলনায় ইহার সুবেদিতা অনেক বেশী এবং ইহাতে কাজও অনেক তাড়াতাড়ি হয়। কিন্তু ইহা ব্যবহারের আগে দুই স্থানে জানা g-র প্রভেদের সাহায্যে ইহার স্কেল ক্রমাঙ্কিত করিয়া লইতে হয়। জানা বল প্রয়োগে স্কেল ক্রমাঙ্কিত করিবার উপায়ও উদ্ভাবিত হইয়াছে।

এ পর্যন্ত অনেক রকম গ্র্যাভিমিটার উদ্ভাবিত হইয়াছে; বিভিন্ন যন্ত্রের পাল্লা 5000 mgal হইতে 30 mgal পর্যন্ত। বড় পাল্লার যন্ত্রের সুবেদিতা কম। যন্ত্রগুলিকে তিন শ্রেণীতে ভাগ করা যায়। কিন্তু ইহাদের বিশদ আলোচনায় না গিয়া আমরা মাত্র দুইটি সুবেদী গ্র্যাভিমিটারের কথা সংক্ষেপে বলিব।

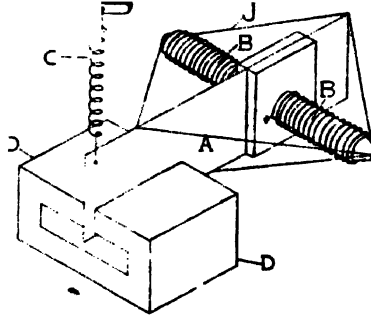
হয়্‌টের (Hoyt) উদ্ভাবিত Gulf-Hoyt নামে খ্যাত গ্র্যাভিমিটারে 0.02 mgal প্রভেদ ধরা যায়। ইহাতে (8.12 চিত্র) খাড়া পেঁচান

স্প্রিংয়ের সাহায্যে চাকতির আকারের একটি ভর ঝুলান থাকে। স্প্রিং পেঁচান পাতে তৈয়ারী এবং পাতের প্রস্থ বেধের তুলনায় বেশী। তাছাড়া স্প্রিং উপরের দিকে সরু এবং নিচের দিকে ক্রমশঃ চওড়া। ভরের উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বাড়িলে ভার বৃদ্ধির জন্য স্প্রিং লম্বায় বাড়ে ও উহার পাক খোলে। চাকতিটি লাগাইলে স্প্রিং আট পাক খোলে অর্থাৎ 2880° ঘোরে। 1 mgal পরিবর্তনে পাকের পরিবর্তন হয় 10 সকেণ্ড।

S = স্প্রিং ; *M* = স্থায়ী ভর ; *L* = আলো প্রতিফলনের ব্যবস্থা ; *A* = দোলন দ্রুত দমন করিবার জন্য আংশিক চৌম্বক ক্ষেত্রে রাখা অ্যালুমিনিয়াম পাত।

8.12 চিত্র

আলোকরশ্মির একাধিক প্রতিফলনের সাহায্যে স্প্রিংয়ের কৌণিক বিচলন বিবর্ধিত করিয়া 1 mgal পরিবর্তনে যন্ত্রে আবদ্ধ স্কেলের পাঠ 100 ঘর করা হয়। পাঠের ত্রুটি 0.02 mgal-এর নিচে থাকে। যন্ত্রের ওজন প্রায় 12 kg। ইহার মাপনের পাল্লা মাত্র 30 mgal। ইহা স্থলে এবং জলের নিচেও ব্যবহার করা যায়।

গ্রাফের (Graf) উদ্ভাবিত Graf-Askania নামে আর একটি যন্ত্রও স্থলে এবং জলে ব্যবহার করা হয়। ইহা 0.01 mgal মাপিতে পারে। ইহার গঠনের আভাস 8.13 চিত্রে দেওয়া হইয়াছে। *A* হালকা একখানা আড়া। অনুভূমিক স্প্রিং *B*-র মোচড়ের (torsion) সাহায্যে *A*-কে অনুভূমিক

রাখা হইয়াছে। g বদলাইলে A-র মাথা নামে বা ওঠে। সূক্ষ্ম নিয়ন্ত্রণে এবং যন্ত্রের পাল্লা বাড়াইতে আরও স্প্রিং ব্যবহার হয়; ইহা C-তে দেখান হইয়াছে। আড়ার প্রান্তে একখানা অ্যালুমিনিয়াম পাত লাগান। উহা

8.13 চিত্র

বিদ্যুচ্চুম্বক D-র চৌম্বক ক্ষেত্রে থাকে। আড়া নড়িলে এই পাতে ঘূর্ণী-ধারা (eddy current) আবিষ্ট হইয়া উহার কম্পন দমন (damp) করে। ইহা ছাড়া বৈদ্যুত অ্যামপ্লিফায়ারের সাহায্যেও কম্পন দমন করা হয়। যন্ত্রে পাঠ লইতে প্রায় 5 মিনিট সময় লাগে এবং যে কোন পাঠ আগের পাঁচ মিনিটের গড় মান। পাঠের চিত্রলিপি (record) স্বয়ংক্রিয়ভাবে যন্ত্রে লিখিত হইয়া যায়। স্থির বালব হইতে আলোকরশ্মি বাহির হইয়া আড়ায় লাগান চিড়ের (slit) মধ্য দিয়া ফটো সেলে (photo cell) পড়ে। ফটো সেল ভেদদর্শী (differential); উহাই আড়ার অবস্থান বলিয়া দেয়। অনুভূমিক ত্বরণের ক্রিয়া বন্ধ করিয়া আড়ার সরণ একই তলে আবদ্ধ রাখিবার জন্য আট গাছা সরু তন্তুর (J) সাহায্যে আড়া আধারের সঙ্গে লাগান থাকে। যন্ত্রের উষ্ণতা নিয়ন্ত্রিত। নাড়াচাড়া করিবার সময় আড়া আটকাইয়া রাখা হয়। জলে ব্যবহারের সময় গাইরোস্ট্যাটের সাহায্যে উহার পাটাতন অনুভূমিক রাখা হয়। যন্ত্র ক্রমাঙ্কিত করার ব্যবস্থা যন্ত্রের সঙ্গেই থাকে। আড়ার ঘূর্ণাক্ষ সাপেক্ষে খুব ছোট একটি গোলকের স্থান পরিবর্তন করিয়া ইহা করা হয়। যন্ত্রস্থ বায়ুর ঊর্ধ্ব চাপের জন্য শুদ্ধির ব্যবস্থা থাকে। যন্ত্রের ওজন 22 kg।

8-6.5. খনিজ পদার্থের সন্ধানে গ্র্যাভিমিটারের প্রয়োগ। খনিজ পদার্থের, বিশেষ করিয়া তেলের, সন্ধানে গ্র্যাভিমিটারের ব্যাপক প্রয়োগ হইয়াছে। তেলের সন্ধানে পৃথিবীর প্রায় সকল সম্ভাব্য স্থান ইহার সাহায্যে জরিপ করা হইয়াছে।

এ উদ্দেশ্যে প্রথমে কিছু দূর দূর অঞ্চলে g-র প্রভেদ মাপা হয়। অনুকূল অবস্থায় ইহাতে তেলের অস্তিত্বের আভাস পাওয়া যাইতে পারে। সম্ভাব্য স্থানে আরও ঘনভাবে জরিপ করা হয়। সাধারণতঃ কেবল অভিকর্ষীয় জরিপের সাহায্যে তেলের খনির অবস্থান সঠিকভাবে বাহির করা যায় না। উহার জন্য নকল ভূকম্পন সৃষ্টি করিয়া ভূকম্প তরঙ্গের বেগ, প্রতিফলন ও প্রতিসরণ-ইত্যাদি মাপিতে হয়। কয়েকটি জায়গায় কেবল g জরিপের সাহায্যেই তেলের খনির অবস্থান ও গভীরতা জানা গিয়াছিল; এ সকল জায়গায় আশেপাশের ভূমিতে ভরবিন্যাসের কোন জটিলতা ছিল না।

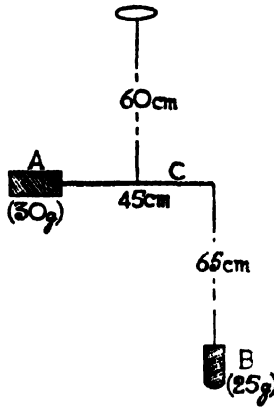
কার্যক্ষেত্রে গ্র্যাভিমিটারের সাহায্যে পাওয়া g-র ম্যানে 8-8 অনুচ্ছেদে উল্লিখিত সমস্থিতিক শুদ্ধি ছাড়া আর সকল শুদ্ধিগুলিই প্রয়োগ করিতে হয়, এবং 8-1.3 সমীকরণের সাহায্যে উহাতে অক্ষাংশের শুদ্ধি করা হয়। এইভাবে শোধিত g-র মান লইয়া জরিপ করা অঞ্চলের মানচিত্র আঁকা হয়। ভূনিম্নের পাথরের ঘনত্বের তুলনায় তেলের ঘনত্ব অনেক কম বলিয়া বিস্তীর্ণ অঞ্চল ব্যাপিয়া তেলের খনি থাকিলে ঐ স্থানে g-র মানে ব্যতিক্রম (anomaly) ধরা পড়িবে। g-র ব্যতিক্রম দেখিয়া খনির অবস্থান ও আয়তন বাহির করা সহজ কাজ নয়, কারণ একাধিক অবস্থায় একই রকম ব্যতিক্রম হইতে পারে। ব্যতিক্রমের দ্ব্যর্থহীন ব্যাখ্যার জন্য প্রচুর অভিজ্ঞতা ও আনুষঙ্গিক তথ্যের দরকার হইতে পারে।

উপরোক্ত মাপনে ত্রুটি 0.1 mgal বা তাহার কম হওয়া দরকার।

অন্য খনিজের খনি সন্ধানে অভিকর্ষ জরিপ বেশী কার্যকর নয় কারণ এরূপ ক্ষেত্রে খনির আকার তেলের খনির তুলনায় অনেক বিষম, খনির আয়তন কম এবং ঘনত্বের প্রভেদও কম। তাছাড়া অন্য খনিজের সান্নিধ্য g-র ব্যতিক্রম ব্যাখ্যা করায় সমাধানের অযোগ্য জটিলতা সৃষ্টি করিতে পারে। এ সকল ক্ষেত্রে বৈদ্যুত, চৌম্বক ও ভূকম্পীয় (seismic) উপায় অবলম্বন করা যায়; কিন্তু এগুলির আলোচনা আমাদের গণ্ডীর বাহিরে।

8-6.6. Eötvös*-এর ব্যাবর্তন তুলা। খনিজের অনুসন্ধানে ৭৫ বৎসর পূর্বে (1895 খৃঃ) Eötvös এর উদ্ভাবিত Eötvös torsion balance নামে একটি ব্যাবর্তন তুলার উল্লেখ এখানে করা যাইতে পারে। ভারী খনিজ পদার্থ ও তেলের সন্ধানে ইহার ব্যাপক প্রয়োগ হইয়াছে। যন্ত্রের

* নামটির প্রকৃত উচ্চারণ জানিতে পারি নাই। বিশ্বাসযোগ্য একখানা encyclopaedia-র উচ্চারণ উৎভুস' বলিয়া পাইয়াছি। অন্যত্র অন্যরকম দেখিয়াছি বা শুনিয়াছি। কেহ সঠিক উচ্চারণ জানাইলে বাধিত হইব।

গঠন 8.14 চিত্রে বুঝান হইয়াছে। 30 ও 25 গ্রামের দুইটি ভর, A ও B 45 cm লম্বা হালকা অ্যালুমিনিয়াম আড়ায় 65 cm উপর নিচ করিয়া লাগান। আড়া C 60 cm লম্বা প্ল্যাটিনাম-ইরিডিয়াম তারে ঝুলান। আড়ায় লাগান আয়নায় টেলিস্কোপের সাহায্যে স্কেলের প্রতিফলন দেখিয়া তুলার সাম্য অবস্থান পাওয়া যায়। যন্ত্রের সঙ্গে স্কেল-টেলিস্কোপ লাগান এবং তুলার ঝুলন তারের মাথার সঙ্গে উহা সমপরিমাণ ঘুরান যায়।

8.14 চিত্র

ভূপৃষ্ঠে কোন বিন্দুতে অভিকর্ষীয় বিভব V হইলে, দোলক বা গ্র্যাভিমিটার অভিকর্ষীয় তীব্রতার খাড়া উপাংশ $g = \partial V/\partial z$ মাপে।

Eötvös-এর তুলা অনুভূমিক তলে দূরত্বের সহিত g-র পরিবর্তন, অর্থাৎ $\partial g/\partial x = \partial^2 V/\partial x\partial z$ এবং $\partial g/\partial y = \partial^2 V/\partial y\partial z$ মাপে। তাছাড়া ইহা $\partial^2 V/\partial x\partial y$ এবং $\partial^2 V/\partial y^2 - \partial^2 V/\partial x^2$ ও মাপে। অভিকর্ষীয় সমবিভব তল গোলীয় তল হইতে কতটা পৃথক শেষ রাশিটি তাহার মান বুঝায়। অনুভূমিক তলে প্রতি সেণ্টিমিটারে g-র পরিবর্তন $10^{-11}g$ হইলেও এ যন্ত্রে তাহা ধরা যায়।

যন্ত্রের অবস্থানে অনুভূমিক তলে g স্থিরমান না হইয়া $g = f(xyz)$ হইলে A, B-র উপর অসমান বল ক্রিয়া করিয়া C-কে অনুভূমিক তলে একটু ঘুরাইবে। g স্থির থাকিলে C-র সাম্যাবস্থান যাহা হইত, এই দ্বন্দ্ব সেখান হইতে তাহাকে বিচ্যুত করিবে। কিন্তু স্থির g-তে সাম্যাবস্থা কি তাহা জানা নাই। এইজন্য একই স্থানে আড়া C 60° করিয়া ঘুরাইয়া ছয়বার উহার সাম্যাবস্থার পাঠ

নেওয়া হয়। যন্ত্রের গঠন সংক্রান্ত কতকগুলি স্থির রাশি জানা থাকিলে এই পাঠগুলি হইতে $\partial g/\partial x$, $\partial g/\partial y$, $\partial^2 V/\partial x \partial y$ ও $\partial^2 V/\partial y^2 - \partial^2 V/\partial x^2$ হিসাব করিয়া বাহির করা যায়।

যে অঞ্চলে জরিপ দরকার সে অঞ্চলে বিভিন্ন স্থানে এই প্রকার মাপনের সাহায্যে অনুভূমিক তলে g-র সর্বোচ্চ পরিবর্তনের হারের রেখাচিত্র আঁকা হয়। একই চিত্রে সমবিভব তলের বক্রতাও নির্দেশ করা হয়। এই প্রকার চিত্রের সাহায্যে ভূনিম্নে ভরবিন্যাসে কোন অনিয়ম আছে কি না বোঝা যাইতে পারে। থাকিলে উহা কোন প্রকার খনিজের জন্য হওয়া সম্ভব। খনিজের ঘনত্ব বেশী হইলে চিত্রের ব্যাখ্যা সহজ হয়।

8-7. সমুদ্রে g নির্ণয়। পৃথিবীব্যাপী g জরিপের ফল জানা থাকিলে জিয়য়্ডের আকার, ভূপৃষ্ঠে ও নিচে ভরবিন্যাস ইত্যাদি পৃথিবী সংক্রান্ত নানা তথ্য জানা যাইবে। স্থলভাগে g-র তিন হাজারের বেশী নির্ভরযোগ্য মান জানা আছে। ভূপৃষ্ঠের শতাংশের প্রায় 70 অংশ সমুদ্র। কাজেই সমুদ্রে নানাস্থানে g মাপা দরকার। সমুদ্রে মাপন তিনভাবে হইতে পারে—

(১) ডোবা সাবমেরিনে, (২) সমুদ্রগর্ভে (নিচের মাটিতে) ও (৩) সমুদ্র-পৃষ্ঠে জাহাজে।

সমুদ্রের জলে স্রোত থাকে, উপরে ঢেউ থাকে এবং সাবমেরিন বা জাহাজ স্থির হইয়া দাঁড়াইয়া থাকিতে পারে না ; উহার গতি থাকে। এই সকল কারণে দোলকের উপর g ছাড়া অন্য ত্বরণও ক্রিয়া করে। অন্য ত্বরণগুলিকে দোলনতলে অনুভূমে $\ddot{x}$, ইহার অভিলম্ব অনুভূমে $\ddot{y}$ এবং খাড়া দিকে $\ddot{z}$, এই তিন উপাংশে ভাগ করা যায়।

দোলকের সাহায্যে সমুদ্রে ডোবা সাবমেরিনে g মাপন 1923 খৃষ্টাব্দে আরম্ভ হয়। ইহাতে একই আধারে তিনটি একই রকম দোলক নেওয়া হয়। উহার দুইটি বিপরীত দশায় সমান বিস্তারে দোলে, এবং তৃতীয়টি প্রথমে স্থির থাকে। পরে উহার যুগ্মিত দোলন হয় (8-6.3 অনুচ্ছেদ দেখ)। এইভাবে তিনটি দোলক ব্যবহারের রীতি ভেনিং-মাইনৃস্ (Vening-Meinesz)-এর উদ্ভাবিত। দোলকগুলির আধার গাইরোস্কোপের মত জিম্ব্যাল আংটায় (gimbal ring ; 6-12 অনুচ্ছেদ) ঝুলান থাকে।

দোলকের উপর মোট ত্বরণ

$$G = \sqrt{(g+\ddot{z})^2 + \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

g-র তুলনায় অন্য ত্বরণগুলি খুব কম হইলে লেখা যায়

$$G \approx g\{1+\ddot{z}/g+(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)/2g^2\}$$

অন্য ত্বরণগুলির মান স্থির নয় বলিয়া $t=0$ হইতে $t=\tau$ অবসরে গড় মানগুলির সম্পর্ক

$$\overline{G}=g\{1+(\dot{z}_\tau-\dot{z}_0)/\tau g+\overline{(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)}/2g^2\} \qquad (8\text{-}7.1)$$

ত্বরণগুলির ক্রিয়ার বিশদ বিচারে 8-7.1 সমীকরণের ডানদিকে $-\overline{\ddot{z}^2}/4g$ পদটি যোগ করিতে হয়। সামুদ্রিক সকল মাপনে এই সমীকরণ, অর্থাৎ

$$G=g\{1+(\dot{z}_\tau-\dot{z}_0)/\tau g+\overline{(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)}/2g^2-\overline{\ddot{z}^2}/4g^2\} \qquad (8\text{-}7.2)$$

ব্যবহার করা হয়।

τ বেশী হইলে এই সমীকরণের ডানদিকের দ্বিতীয় পদের মান কমে। তৃতীয় পদ সর্বদাই পজিটিভ এবং ইহার জন্য ত্রুটি 10 mgalও হইতে পারে। শুদ্ধির মান পাইতে যন্ত্রের সঙ্গে আরও দুইটি দোলক ব্যবহার করা হয়। ইহারা পরস্পর অভিলম্ব তলে দোলে এবং দোলন অক্ষ ভরকেন্দ্রের কাছে রাখিয়া ইহাদের দোলনকাল দীর্ঘ (প্রায় 30 সেকেণ্ড) করা হয়।

দোলন তল উল্লম্বের সহিত β কোণে আনত হইলে দোলক g না মাপিয়া $g\cos\beta$ মাপে (8-9 অনুচ্ছেদ দেখ)। এরূপ ক্ষেত্রে প্রেক্ষিত g-র সঙ্গে $g(1-\cos\beta)\approx\frac{1}{2}g\beta^2$ অবশ্যই যোগ করিতে হইবে।

সবগুলি দোলকের গতি ফটোগ্রাফির কাগজে লিপিবদ্ধ করা হয়। এই লেখনগুলি (records) হইতে নিম্নোক্ত রাশিগুলি বাহির করা হয়—

(১) 8-6.1 সমীকরণের অলীক দোলকের দোলনকাল ;

(২) বিস্তারের জন্য শুদ্ধি ;

(৩) 8-7.2 সমীকরণের দ্বিতীয় ক্রমের (second order) শুদ্ধি।

এইভাবে শোধিত মানে আবার 8-8.2 অংশে উল্লিখিত শুদ্ধিগুলি প্রয়োগ করিতে হয়।

বর্তমানে সমুদ্রগর্ভে গ্র্যাভিমিটার (8-6.4 অনুচ্ছেদ) নামাইয়া g-র পরিবর্তন মাপা প্রচলিত হইয়াছে। জলে অভেদ্য একটি কুঠরিতে মাপন যন্ত্র রাখিয়া উহা জাহাজ হইতে সমুদ্রগর্ভে নামাইয়া দেওয়া হয়। উপর হইতে যন্ত্রের পাটাতন যথার্থ অনুভূমিক করিবার ব্যবস্থা থাকে। স্বয়ংক্রিয় যন্ত্র g-র পরিবর্তন লিপিবদ্ধ করে। ইহাতে মাত্র 0·1 mgal বা তাহারও কম পরিবর্তন ধরা পড়ে। যন্ত্রের এই সুবেদিতার জন্য সমুদ্র-

কূলের অনতিদূরে ভূগর্ভে খনিজ তেল অনুসন্ধানের কাজে ইহাকে সাফল্যের সঙ্গে প্রয়োগ করা হইয়াছে।

ভাসন্ত জাহাজে গাইরোস্ট্যাটের সাহায্যে কোন পাটাতন অনুভূমিক রাখিয়া উহা হইতে দোলক বা গ্র্যাভিমিটারের আধার জিম্ব্যাল (gimbal) আংটায় খাড়া অক্ষে ঝুলাইয়া g-র পরিবর্তন মাপার ব্যবস্থা বর্তমানে সম্ভব হইয়াছে।

8-8. প্রেক্ষিত g-কে সমুদ্রপৃষ্ঠের মানে পরিণত করা (Reduction of observed gravity to sea-level)। প্রেক্ষিত g-কে জিওডেসির কাজে লাগাইতে হইলে উহাতে কয়েকটি শুদ্ধির দরকার। নিরীক্ষার জায়গার অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমায় কল্পিত গোলাভ পৃথিবীর পৃষ্ঠে উহা কত হইবে তাহাই বাহির করিতে হইবে। শুদ্ধিগুলি নিচে বলা হইল।

8-8.1. স্থলে মাপা g-র শুদ্ধি।

(১) উচ্চতার শুদ্ধি (Elevation correction, free air correction or Faye's correction)। স্থলভাগে ভূকেন্দ্র হইতে দূরত্ব বাড়ায় g কমে। গোলাভের পৃষ্ঠে g বেশী হইবে, এবং অক্ষাংশের উপরেও ইহা নির্ভর করিবে। ভূপৃষ্ঠের কাছাকাছি সমুদ্রপৃষ্ঠ হইতে h মিটার উচ্চতায় ও λ অক্ষাংশে শুদ্ধি

$$\delta g_h = 0.3086\ (1 + 0.00071 \cos 2\lambda)\ h \qquad (8\text{-}8.1)$$

δg_h মিলিগ্যালে প্রকাশিত। পরবর্তী সব শুদ্ধিগুলিও মিলিগ্যালে।

(২) বুগের শুদ্ধি (Bouguer's correction)। সমুদ্রপৃষ্ঠ ও নিরীক্ষার স্থানের মধ্যে যে পদার্থ আছে তাহার আকর্ষণ প্রেক্ষিত g হইতে বাদ দিতে হইবে। ইহাকে বুগের শুদ্ধি বলে এবং ইহার মান ধরা হয়

$$\delta g_B = -0.0421\ \sigma h \qquad (8\text{-}8.2)$$

σ মধ্যাঞ্চলে পদার্থের ঘনত্ব ; ইহা সাধারণতঃ 2.67 ধরা হয়।

(৩) স্থলাকৃতিজনিত শুদ্ধি (Terrain correction)। ইহা অত্যন্ত ক্লান্তিকর। ইহার জন্য আশেপাশের বিভিন্ন গঠনের উচ্চতা জানা দরকার। লেখ (graph) ও সারণীর (tables) সাহায্যে শুদ্ধি হিসাব হয়।

(৪) সমস্থিতিক সংতুলনের শুদ্ধি (Isostatic compensation correction)।

ভূপৃষ্ঠে কোথাও পর্বত, উচ্চ মালভূমি ইত্যাদি থাকিলে উহার নিচে ভূত্বক বেশী দূর প্রলম্বিত হয়। সমুদ্রের নীচে ইহা অল্প দূর প্রলম্বিত। জলে

ভাসন্ত বরফের বাহিরের অংশের ওজনের সহিত নিমজ্জিত অংশের ওজনের যেরূপ সম্পর্ক, এখানেও ভূপৃষ্ঠের বাহিরের অংশের ওজনের সহিত নিচের অংশের ওজনের সম্পর্ক কতকটা অনুরূপ বলিয়া মনে করা হয়। উল্লিখিত কারণে ভূনিম্নে ভরবিন্যাসের অসমতার জন্য শুদ্ধিকে সমস্থিতিক সংতুলনের শুদ্ধি বলা হয়।

8-8.2. **সমুদ্রে মাপা g-র শুদ্ধি**। এ প্রকার মাপন সাধারণতঃ জলে ডোবা সাবমেরিনে বা সমুদ্রগর্ভে (sea-bed) করা হয় বলিয়া গভীরতার ও উপরের জলের আকর্ষণের জন্য শুদ্ধি দরকার হয়। গভীরতার শুদ্ধি 8-8.1 সমীকরণের সমান, কিন্তু উহা নিগেটিভ। সমুদ্রপৃষ্ঠে মাপন হইলে ঐ স্থান হইতে নিরীক্ষার স্থান পর্যন্ত জলস্তরের আকর্ষণ থাকিত। ইহার জন্য g-র শুদ্ধি ধরা হয়

$$\delta g'_B = +0.06867\, h$$

এখানে h মিটারে মাপা জলস্তরের গভীরতা। তীর বা দ্বীপের কাছাকাছি মাপন হইয়া থাকিলে স্থলাকৃতিজনিত শুদ্ধিও (terrain correction) দরকার।

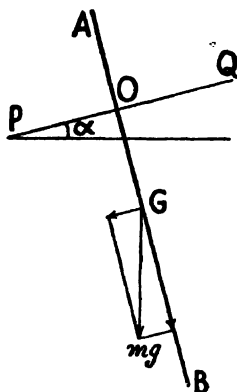
চলন্ত জাহাজ বা সাবমেরিনে মাপন হইয়া থাকিলে উহার গতির জন্য অভিকেন্দ্র ত্বরণের পরিবর্তন ঘটে বলিয়া গতিজনিত শুদ্ধি দরকার হয়। ইহার মান

$$\delta g_E = 4.04\, v \cos \lambda \sin \alpha.$$

প্রেক্ষিত g-তে ইহা যোগ করিতে হইবে। v দ্বারা km/hr এককে জাহাজের বেগ বুঝায়; λ স্থানীয় অক্ষাংশ এবং α উত্তর হইতে পূবের দিকে মাপা গতির দিক্। ইহাকে Eötvös শুদ্ধি বলে। মাঝামাঝি অক্ষাংশে 20 km/hr বেগে পূব-পশ্চিমে চলন্ত জাহাজে এই শুদ্ধির মান প্রায় $\pm$ 5 mgal। ইহা এড়াইতে হইলে জাহাজ উত্তর-দক্ষিণ রেখায় চালান দরকার।

শোধিত g-র মান 8-1.3 সমীকরণের সাহায্যে হিসাব করা মানের সঙ্গে তুলনা করিলে g-র স্থানীয় ব্যতিক্রম (anomaly) পাওয়া যায়। ব্যতিক্রম যথার্থ হইলে উহার ব্যাখ্যা খুঁজিতে হয়। ইহা ভূগর্ভে ভরবিন্যাসের ব্যতিক্রমজনিত।

8-9. **অনুভূমিক দোলক (Horizontal pendulum)**। দোলকের দোলন অক্ষ অনুভূমিক না হইয়া প্রায় খাড়া হইলে দোলকদণ্ড প্রায় অনুভূমিক হয়। এইরূপ দোলককে অনুভূমিক দোলক বলে। ইহার প্রয়োগ আলোচনা করিবার আগে আমরা ইহার দোলনকাল বাহির করিব।

8-15 চিত্রে AB দোলক PQ অক্ষে ঘোরে। PQ রেখা অনুভূমের সহিত α কোণ করে। দোলকের দোলনতল O বিন্দুগামী ও PQর অভিলম্ব।

8.15 চিত্র

দোলকের ভার AB বরাবর ও উহার অভিলম্বে দুই উপাংশে ভাগ করা গেল। দোলকের গতির উপর অভিলম্ব উপাংশ $mg \sin \alpha$-র কোন ক্রিয়া নাই।

দোলকের সাম্য অবস্থান হইতে উহাকে দোলনতলে সামান্য পরিমাণ θ কোণে বিচ্যুত করিলে দোলকের ভারের জন্য যে বল উহাকে সাম্যে ফিরাইতে চায়, তাহার মান $mg \cos \alpha . \sin \theta \backsimeq mg\, \theta \cos \alpha$। G ভার-কেন্দ্র এবং $OG = l$ হইলে দোলকের উপর ক্রিয়াশীল প্রত্যানয়ক দ্বন্দ্বের মান $mgl\, \theta \cos \alpha$। অতএব দোলকের গতীয় সমীকরণ

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\, l\, \theta \cos \alpha .$$

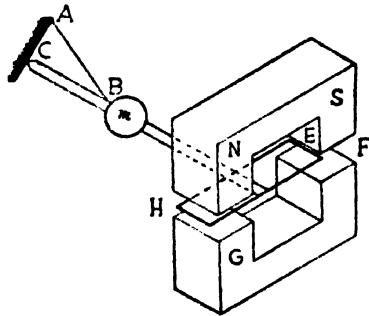
দেখা যায় গতি সরল দোলীয় এবং দোলনকাল

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl \cos \alpha}} \tag{8-9.1}$$

α বাড়িলে $\cos \alpha$ কমে ও T বাড়ে। α প্রায় $90°$ হইলে T খুব বাড়িয়া যায়। $\alpha = 0$ হইলে ইহা সাধারণ দোলক এবং উহার তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য $L = I/ml$। এই L নিয়া লিখিলে দোলনকাল

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g \cos \alpha}} \tag{8-9.2}$$

দরজা বা ফটকের কব্জা ঠিক খাড়া রেখায় না রাখিয়া একটু হেলাইয়া দিলে উহার পাল্লা কার্যতঃ অনুভূমিক দোলকের মত ক্রিয়া করিবে। ঘর্ষণ যথেষ্ট থাকিলে খোলা দরজা নিজ হইতে বন্ধ হইয়া যাইবে। কম ঘর্ষণে উহা অবমন্দিত দোলনে ক্রমে বন্ধ হইবে।

অনুভূমিক ভূকম্পলেখী (Horizontal seismograph)। ভূকম্পলেখী যন্ত্রে ভূকম্পনে ভূমির বিচলন বিবর্ধিত হইয়া স্বয়ংক্রিয় যন্ত্রে লিখিত হইয়া যায়। ভূমির যে কোন বিচলন তিন উপাংশে ভাগ করা যায়—(১) খাড়া, (২) অনুভূমিক পূব-পশ্চিম, (৩) অনুভূমিক উত্তর-দক্ষিণ। অনুভূমিক উপাংশের জন্য অধিকাংশ ক্ষেত্রে অনুভূমিক দোলক ব্যবহার করা হয়।

8.16 চিত্র

8.16 চিত্রে সরল গঠনের এরূপ একটি যন্ত্রের ব্যবস্থা বুঝান হইয়াছে। চিত্রের CB দোলকদণ্ড। ইহার দোলন অক্ষ উল্লম্বের সহিত β কোণে অবস্থিত। আধারের সঙ্গে দণ্ডের C প্রান্ত এমনভাবে লাগান যে নিজ দোলনতলে দুলিতে CB দণ্ড কোন বাধা পায় না। AB তারের সাহায্যে BC-কে স্বস্থানে রাখা হয়। m ভারী পিণ্ড। ইহা থাকায় C প্রান্তে ঘর্ষণ উপেক্ষণীয় হয়।

ভূকম্পে আধারের বিচলন হওয়ায় লম্বনকেন্দ্র C-রও বিচলন ঘটে। ইহাতে দোলকের দোলন হয়। দোলকের গতিতে বিদ্যুচ্চুম্বকীয় বা সান্দ্র (viscous) বাধার সৃষ্টি করিয়া দোলন অবমন্দিত (damped) করা হয়, এবং মন্দনের মাত্রা করা হয় প্রায় ক্রান্তিক (critical ; 3-16 অনুচ্ছেদ

দেখ)। *CB* দণ্ড লিভারের সাহায্যে একখানা হালকা আয়না ঘুরায় ও উহা হইতে প্রতিফলিত রশ্মির সাহায্যে গতির ফটোগ্রাফিক প্রতিলিপি চলন্ত ফিলমে লিখিত হইয়া যায়। বিকল্প ব্যবস্থায় *BC* দণ্ডে লাগান কুণ্ডলী চৌম্বক ক্ষেত্রে থাকে। দোলনে কুণ্ডলীতে বিদ্যুচ্চুম্বকীয় আবেশ হয়। অ্যামপ্লিফায়ারের সাহায্যে আবিষ্ট বিভব বাড়াইয়া গ্যালভ্যানোমিটারে প্রয়োগ করা হয়। গ্যালভ্যানোমিটারের আয়না হইতে প্রতিফলিত আলোক-রশ্মি চলন্ত ফিলমে লিপি লেখে।

অনুভূমিক সাইজমোগ্রাফের সরল তত্ত্ব। ভূকম্পে দোলকের লম্বন-কেন্দ্র বিচলিত হয়। বিচলন অনুভূমিক ও *BC* দণ্ডের অভিলম্বে ধরিয়া দোলকের ক্রিয়ার একটি সহজ তত্ত্ব খাড়া করা যায়। দোলকের গতি অবমন্দিত, কিন্তু উহার লম্বনকেন্দ্র সচল।

মনে কর দোলকের ভর m উহার দোলনকেন্দ্রে (centre of oscillation) সংহত এবং দোলন অক্ষ উল্লম্বের সহিত β কোণে অবস্থিত। $\beta=\pi/2$ হইলে তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য যদি L হয়, তবে $T=2\pi\sqrt{L/g\sin\beta}$। সাম্যাবস্থা সাপেক্ষে দোলকের কৌণিক বিক্ষেপ θ হইলে প্রত্যানয়ক বল $mg\,\theta\sin\beta$। আধারের রৈখিক সরণ x হইলে $\theta=x/L$ এবং প্রত্যানয়ক বল

$$mg\,\theta\sin\beta=(mg\,x/L)\sin\beta=m\,\omega_0{}^2x\ [\ \omega_0{}^2=g\sin\beta/L\ ]$$

অবমন্দনের বল দোলক কণার বেগের সমানুপাতিক ধরিয়া ইহার মান $2a\,m\,\dot{x}$ লেখা যায়। দোলকের x বিচলনে ফিলমে আলোকরশ্মির বিচলন X উহার n_s গুণ হয় ধরা যাক অর্থাৎ $X=n_s x$। n_s-কে স্থিতীয় বিবর্ধন (static magnification) বলে।

ভূকম্পে আধারের সরণ সরল দোলীয় ধরিয়া উহা $\xi=a\sin\omega t$ লেখা যায়। ইহার জন্য দোলন কেন্দ্র সাপেক্ষে দোলক কণার ত্বরণ $-\ddot{\xi}$ (5-2 অনুচ্ছেদ দেখ)। দোলক কণার উপর অলীক বল $-m\,\ddot{\xi}$। এক্ষেত্রে দোলক কণার গতীয় সমীকরণ হইবে

$$m\ddot{x}+2a\,m\,\dot{x}+m\,\omega_0{}^2x=-m\,\ddot{\xi}$$

x-এর বদলে ফিলমে আলোকরশ্মির বিক্ষেপ X দিয়া উপরের সমীকরণ লিখিলে পাই

$$\ddot{X}+2a\,\dot{X}+\omega_0{}^2X=-n_s\,\ddot{\xi}=n_s a\,\omega^2\sin\omega t$$

ইহা প্রণোদিত কম্পনের (forced vibration) সুপরিচিত সমীকরণ। গতির স্থায়ী দশায় (steady state) ইহার সমাধান

$$X = \frac{n_s\, a\, \omega^2 \sin(\omega t - \phi)}{\{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

এখানে $\tan \phi = \cdot \quad 2a\omega$

ω কম হইলে ϕ ছোট হয় ; $\omega \to 0$ হইলে $\phi \to 0$ হয়। তখন X ও ξ সমদশায় থাকে। $\omega \gg \omega_0$, অর্থাৎ ভূকম্প তরঙ্গের পর্যায়কাল $T = 2\pi/\omega$ দোলকের অবাধ দোলনকাল T_0 $(= 2\pi/\omega_0)$র তুলনায় অনেক ছোট, হইলে $\phi \to \pi$ হয়। তখন X-এর দশা ξ-এর দশার কার্যতঃ বিপরীত।

X-এর বিস্তার ও ξ-এর বিস্তারের অনুপাত n_mকে গতীয় বিবর্ধন (Dynamic magnification) বলে।

$$n_m = \frac{\omega^2 . n_s}{\{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

অবমন্দন ক্রান্তিক হইলে $a = \omega_0$। তখন

$$\omega_0{}^2 + \omega^2$$

এবং $\phi = 2 \tan^{-1} \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

অনুভূমিক দোলকের T_0 বড় এবং $\omega_0 = 2\pi/T_0$ ছোট। যন্ত্রের n_s জানা থাকিলে ফিলমের লিপি হইতে ভূকম্পের বিস্তার জানা যায়।

প্রশ্ন

1. অভিকর্ষীয় তীব্রতা কি কি বিষয় দ্বারা এবং কিভাবে প্রভাবিত হয় আলোচনা কর।

ভূপৃষ্ঠে λ অক্ষাংশে ওলনদড়ি যথার্থ উল্লম্বের সহিত কত কোণে থাকিবে হিসাব কর।

ভূপৃষ্ঠে কোন বস্তু পশ্চিম হইতে পূবে ভূপৃষ্ঠ সাপেক্ষে সুষম v বেগে চলিতে থাকিলে উহার ভারের পরিবর্তন কত হইবে?

2. যৌগিক দোলকের তত্ত্ব আলোচনা কর। লম্বনকেন্দ্র ও দোলনকেন্দ্র কাহাকে বলে? উহারা বিনিমেয় প্রমাণ কর।

অবম দোলক বলিতে কি বুঝায়? উহা ব্যবহারে সুবিধা কি?

3. বিপর্যেয় দোলক কাহাকে বলে? উহার তত্ত্ব আলোচনা কর।

কেটার কি করিয়া এইরূপ দোলকের সাহায্যে g মাপিয়াছিলেন?

বিপর্যেয় দোলক ব্যবহারে বেসেলের রীতি কি? উহাতে সুবিধা কি হয়?

4. দোলকের সাহায্যে সূক্ষ্মভাবে g মাপিতে হইলে কোন্ কোন্ কারণে মাপনে ত্রুটি ঘটিতে পারে? ইহাদের যেগুলি অপনেয় তাহাদের অপনয়ন কিভাবে করা যায় বল।

যাহা অপনেয় নয় তাহার শুদ্ধি কিভাবে হয়?

5. g এক মিলিগ্যাল সূক্ষ্মতায় মাপিতে হইলে কি উপায় অবলম্বন করিবে? সূক্ষ্মতা মাত্র 0.1 গ্যাল হইলে কোন্ কোন্ সতর্কতা শিথিল করা যায় এবং কাজটি কিভাবে করা যায়?

6. বিভিন্ন স্থানে একই দোলক ব্যবহার করিয়া কিভাবে অভিকর্ষ জরিপ করা যায়? এই প্রকার কাজে কি কি সতর্কতা অবলম্বন করা দরকার? মাপনের সূক্ষ্মতা কি ক্রমের?

7. যে কোন প্রকার গ্র্যাভিমিটারের গঠন বল। উহার সাহায্যে অভিকর্ষ জরিপ কিভাবে করা যায়? দোলকের সাহায্যে জরিপের তুলনায় ইহাতে সুবিধা কি?

8. খনিজ পদার্থের সন্ধানে অভিকর্ষ জরিপ কি কি ভাবে করা যায়? উহাদের সুবিধা অসুবিধা বল।

9. সমুদ্রে g মাপনের প্রয়োজনীয়তা কি? এই মাপন কি কি ভাবে করা যায়? উহাদের সুবিধা অসুবিধা বল।

10. ভূপৃষ্ঠে নানা স্থানে g মাপনের প্রয়োজনীয়তা কি? প্রেক্ষিত মান সমুদ্রপৃষ্ঠের মানে পরিণত করিতে কি কি শুদ্ধির দরকার হয়? শোধিত মান কি কাজে লাগে?

11. অনুভূমিক দোলক কাহাকে বলে? ইহার দোলনকাল হিসাব কর। ভূকম্প মাপনে অনুভূমিক দোলক কিভাবে কাজে লাগান যায় বুঝাইয়া বল।

12. l দৈর্ঘ্যের একটি সুষম দণ্ড এক প্রান্ত হইতে উল্লম্বতলে দোলাইলে উহার তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য $2l/3$ হইবে প্রমাণ কর।

প্রান্ত হইতে দোলন অক্ষ প্রায় $0.21\ l$ দূরে সরাইলে দণ্ড সবচেয়ে তাড়াতাড়ি দুলিবে দেখাও।

13. a বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার সুষম পাত পাতের তলের অভিলম্ব অনুভূমিক অক্ষে দোলে। লম্বনকেন্দ্র পাতের এক কোণে অবস্থিত হইলে তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য $(2\sqrt{2}/3)a$ হইবে দেখাও।

দোলনকাল অবম হইলে লম্বনকেন্দ্রের সঞ্চার পথ $a/\sqrt{6}$ ব্যাসার্ধের বৃত্ত হইবে প্রমাণ কর।

14. কোন কেটার দোলক সেকেণ্ড দোলকের তুলনায় 18 সেকেণ্ডে এক দোলন আগায়। উলটাইয়া দিলে উহা 16 সেকেণ্ডে এক দোলন আগায়। ভারকেন্দ্র হইতে ক্ষুরধারের দূরত্ব প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে যথাক্রমে 60.75 cm ও 20.75 cm হইলে g-র মান কত?

g নির্ণয়ের এই প্রকার পরীক্ষা কিভাবে করিবে তত্ত্বসমেত বল।

15. নিচের উপাত্তগুলির সাহায্যে 300 m গভীর খনিতে ও ভূপৃষ্ঠে g-র প্রভেদ কত হইবে হিসাব কর :—

ভূত্বকের ঘনত্ব $= 2.5\ g/cm^3$; পৃথিবীর ব্যাস 12,700 km ; মহাকর্ষীয় নিত্যসংখ্যা $= 6.7 \times 10^{-8}$ সিজিএস একক ; ভূপৃষ্ঠে $g = 9.8\ m/s^2$।

ব্যবহার্য সমীকরণ স্থাপনা কর।

16. কোন বিপর্যেয় দোলকের দুই ক্ষুরধারে দূরত্ব 90 cm ও উহার রৈখিক বিস্তার 4 cm। দোলনকাল বাহির করিতে স্টপওয়াচের সাহায্যে 500 s ধরিয়া দোলন দেখা হইল। দূরত্ব মিটার স্কেলে মাপা।

স্টপওয়াচে সময় মাপনের ত্রুটি 0.2 s ও মিটার স্কেলে দৈর্ঘ্য মাপনের ত্রুটি 0.2 mm হইয়াছে ধরিয়া দোলনকাল ও দৈর্ঘ্য মাপনের আপেক্ষিক ত্রুটি হিসাব কর। g মাপনে এক্ষেত্রে বিস্তারজনিত শুদ্ধি দরকার কিনা আলোচনা কর। নির্ণীত g-তে আপেক্ষিক ত্রুটি কত হইবে? $g = 980$ হইলে g-র আসল ত্রুটি কত?

এই মাপনে আরও সূক্ষ্মতা আনিতে হইলে কোন্ ত্রুটি সবার আগে কমাইতে হইবে? ইহা কিভাবে করিতে পার?

[উত্তর—মাপনের আপেক্ষিক ত্রুটি $dl/l = 0.00022$, $dT/T = 0.0004$; বিস্তারের শুদ্ধি 0.00012। বিস্তারের শুদ্ধি না করিলে g-র ত্রুটি 1.2 গ্যাল ; করিলে $0.98 \simeq 1$ গ্যাল।]

নবম পরিচ্ছেদ

স্থিতিস্থাপকতা
(Elasticity)

9-1. সূচনা। দৈনন্দিন অভিজ্ঞতা হইতে আমরা দেখিতে পাই কোন বস্তুতে প্রতিমিত (balanced) বল প্রয়োগ করিলে উহার আকার বা আয়তন বা উভয়েরই অল্পবিস্তর পরিবর্তন হয়, এবং বল সরাইয়া লইলে বস্তু পূর্বের আকার ও আয়তন পুরাপুরি বা আংশিক ফিরিয়া পায়। পুরাপুরি ফিরিয়া পাইলে আমরা উহাকে 'সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক' (perfectly elastic) বলি। প্রযুক্ত বল সরাইয়া লইবার পর বস্তু যদি তাহার পরিবর্তিত আকার বা আয়তনেই থাকিয়া যায় তাহা হইলে উহাকে 'সম্পূর্ণ নমনীয়' (perfectly plastic) বলা হয়। কোন কোন ক্ষেত্রে বল সরাইয়া লইলে বস্তু পূর্বের আকার বা আয়তনে সঙ্গে সঙ্গেই ফিরিয়া যায় না; যাইতে সময় নেয়। কাচ ইহার উদাহরণ। এই প্রকার আচরণের নাম 'স্থিতিস্থাপকীয় শৈথিল্য' (elastic hysteresis)।

সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপকতা প্রযুক্ত বলের মানের উপর নির্ভর করে; মান বেশী হইলে কিছু স্থায়ী বিকৃতি থাকিয়া যাইতে পারে। নমনীয় পদার্থের ক্ষেত্রেও দেখা যায় বল খুব কম হইলে উহা পূর্বতন আকার বা আয়তনে ফিরিয়া যাইতে পারে। কাজেই কোন বস্তুকে সাধারণভাবে 'সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক' বা 'সম্পূর্ণ নমনীয়' বলা সঙ্গত নয়। উহাদের প্রভেদের সীমারেখা অস্পষ্ট।

কোন বস্তুর সকল অংশ একই উপাদানে গঠিত হইলে উহাকে 'সমসত্ত্ব' (homogeneous) বলে। সকল দিকে উহার ধর্ম একই হইলে উহা 'সমদৈশিক' (isotropic)। বিভিন্ন দিকে ধর্মের বিভিন্নতা থাকিলে উহা 'অসমদৈশিক' (anisotropic)। অধিকাংশ কেলাস (crystal) অসমদৈশিক। সাধারণ ধাতব পদার্থকে সমসত্ত্ব ও সমদৈশিক মনে করা যায়। আমরা কেবল সমসত্ত্ব, সমদৈশিক পদার্থের স্থিতিস্থাপকতা আলোচনা করিব। বস্তুটি সাম্যে আছে ধরা হইবে।

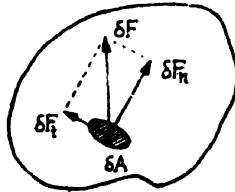
9-2. পীড়ন ও বিকৃতি (Stress and strain)। বলপ্রয়োগে কোন বস্তুকে বিকৃত করিলে উহার ভিতরে প্রতিক্রিয়ার বল গঠিত হয়। বস্তুর এক অংশ অন্য অংশের উপর যে বল প্রয়োগ করে তাহা **পৃষ্ঠ বল**

(surface force)। বস্তুর ভিতরে কল্পিত যে কোন তলের দু পাশে বস্তুকণাগুলির মধ্যে যে পারস্পরিক ক্রিয়া তাহা ঐ তলের সংলগ্ন দুই পাশের কণার মধ্যেই সীমাবদ্ধ থাকে। কণাগুলির বলের ক্রিয়া খুব অল্প দূরত্বের মধ্যে (প্রায় $10^{-7}-10^{-8}$cm) আবদ্ধ থাকাই ইহার কারণ। বস্তু বিকৃত করিলে প্রতিক্রিয়ায় যে বল সৃষ্ট হয় তাহা বস্তুকণার পারস্পরিক আকর্ষণ-বিকর্ষণজনিত ; এই কারণে ঐ বলকে পৃষ্ঠ বলরূপে কল্পনা করা হয়।

কোন কল্পিত তল দিয়া বস্তুকে দুই অংশে ভাগ করিলে, প্রত্যেক ভাগই সাম্যে আছে বলিয়া, কল্পিত তল ভেদ করিয়া এক অংশ অন্য অংশের উপর বল প্রয়োগ করে বুঝিতে হইবে। বস্তুর ভিতরে যে কোন স্থানে একটি কল্পিত ক্ষেত্র ধরিলে ইহা ভেদ করিয়া দুই পাশে সমান ও বিপরীত বল ক্রিয়া করে ; ইহাদের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া মনে করা যায়।

বলাধীন কোন বস্তুর ভিতরের কোন বিন্দুকে ঘেরিয়া δA মানের অতি ক্ষুদ্র তল কল্পনা কর। এই তল ভেদ করিয়া বস্তুর এক অংশ অন্য অংশের উপর সমান ও বিপরীত বল প্রয়োগ করে। এই বল তলের লম্বের সহিত যে কোন কোণে থাকিতে পারে। তলের উপর ক্রিয়াশীল পীড়ক বলের মান δF হইলে

$$S=\lim_{\delta A\to 0}\frac{\delta F}{\delta A}=\frac{dF}{dA} \text{ রাশিটিকে,}$$

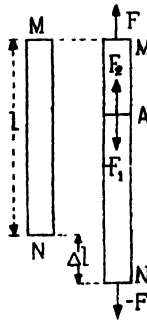
অর্থাৎ একক তলে ক্রিয়াশীল পীড়ক বলকে ঐ তলের উপর 'পীড়ন' বা 'পীড়নাংক' (stress) বলে। বিকৃত বস্তুর ভিতরে কোন ক্ষুদ্র তলের উপর পীড়ন ঐ তলের অবস্থান ও দিক্‌-বিন্যাসের (orientation) উপর নির্ভর করে।

9.1 চিত্র

তলের মান ও দিক্‌-বিন্যাস ঠিক রাখিয়া উহাকে বস্তুটির ভিতরে বিভিন্ন স্থানে লইলেও যদি উহার উপর ক্রিয়াশীল বলের মান স্থির থাকে তাহা হইলে পীড়নকে সুষম (homogeneous) বলে। অন্যথায় উহা অসম (non-homogeneous)।

পীড়নকে তলের অভিলম্বে ও উহার সমতলে উপাংশে ভাগ করা যায়। তলের উপর ক্রিয়াশীল বল δF ও তলের ক্ষেত্রফল δA হইলে (9.1 চিত্র), δF_n বলের অভিলম্ব উপাংশ ও δF_t ক্ষেত্রতলে উপাংশ। $\lim_{\delta A\to 0} \delta F_n/\delta A$-কে 'লম্বপীড়ন' (Normal stress ; S_n বা σ*) ও $\lim_{\delta A\to 0} \delta F_t/\delta A$-কে 'স্পার্শক পীড়ন' (Tangential stress ; S_t বা τ*) বলে।

পীড়নের ক্রিয়ায় বস্তুর কল্পিত কোন ক্ষুদ্র অংশের যে আপেক্ষিক বিকৃতি ঘটে তাহাকে 'তর্তি' (strain) বলে। কোন্ ক্ষেত্রে আপেক্ষিক বিকৃতি কিভাবে মাপা হইবে তাহা সেই প্রসঙ্গে বলা হইবে। পীড়ন যেমন সুষম বা অসম হইতে পারে, তর্তিও তাহাই।

যে বস্তুর কোন স্থানে পীড়ন স্থানীয় তর্তি দ্বারা, বা তর্তি স্থানীয় পীড়ন দ্বারা সম্পূর্ণভাবে নির্ণীত হয়, তাহাই আদর্শ স্থিতিস্থাপক। এই উক্তিকে আদর্শ স্থিতিস্থাপকতার সংজ্ঞা ধরা যাইতে পারে। পরে দেখা যাইবে এরূপ হইতে হইলে পীড়ন পদার্থ বিশেষে নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকিতে হইবে (9-4 অনুচ্ছেদ)।

9-13 অনুচ্ছেদে পীড়ন ও তর্তি সম্বন্ধে কিছু অতিরিক্ত কথা বলা হইয়াছে।

9.2 চিত্র

9-2.1. মৌলিক পীড়ন ও তর্তি (Primary stresses and strains)। তিন প্রকারের পীড়ন ও তর্তিকে মৌলিক বলা হয়—(ক) টান সংক্রান্ত (tensile), (খ) চাপ সংক্রান্ত (compressive) ও (গ) কৃন্তন সংক্রান্ত (shearing)। টানে দৈর্ঘ্য বাড়াইবার দুইটি সমান ও বিপরীত বল একই রেখায় বস্তুর দুই প্রান্তে ক্রিয়া করে। চাপে দৈর্ঘ্য কমাইবার

* লম্বপীড়ন (Normal stress) ও স্পার্শক পীড়ন (Tangential stress)-এর আন্তর্জাতিক শংসিত (recommended) চিহ্ন (symbol) যথাক্রমে σ ও τ।

ঐরূপ বল থাকে। কৃন্তনে থাকে একই অক্ষে বিভিন্ন তলে দুইটি সমান ও বিপরীত দ্বন্দ্ব। কৃন্তন-পীড়নের বল ক্ষেত্রের তলে ক্রিয়া করে।

(ক) টানের তভি ও পীড়ন। 9.2 চিত্রে $MN = l_0$ দৈর্ঘ্যের সমান ছেদের তার। উহাতে টান $(F, -F)$ প্রয়োগ করিলে দৈর্ঘ্য বাড়িতে থাকে; সঙ্গে সঙ্গে অভ্যন্তরীণ, বিকার-প্রতিরোধী বল ক্রিয়া করিতে সুরু করে। দৈর্ঘ্য বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে অভ্যন্তরীণ বলও বাড়ে। এই বল বাড়িয়া প্রযুক্ত বলের সমান হইলে দৈর্ঘ্য আর বাড়ে না। নূতন সাম্যাবস্থায় তারের দৈর্ঘ্য Δl পরিমাণ বাড়িয়া থাকিলে $\Delta l/l_0 = \epsilon$* অনুপাতকে 'টানের আপেক্ষিক বিকার' বা 'টানের তভি' অথবা 'টানজ তভি' (Tensile strain) বলে। Δl এবং l_0 উভয়ে দৈর্ঘ্য বলিয়া এই অনুপাত একটি বিশুদ্ধ সংখ্যা; উহাতে কোন এককের উল্লেখ দরকার হয় না।

তারের অভিলম্বে কল্পিত কোন A তল দিয়া তার দুই অংশে ভাগ করিয়া উহার MA অংশের সাম্য বিচার কর। F-এর সমান ও বিপরীত বল নিশ্চয়ই উহাকে নিচের দিকে টানিতেছে। A-র আড়াআড়ি অভ্যন্তরীণ $-F_1$ বল ছাড়া এরকম আর কোন বল থাকিতে পারে না। NA-র সাম্য বিবেচনা করিয়া একইভাবে দেখা যায় অভ্যন্তরীণ F_2 বল ছাড়া আর কোন বল নাই। সাম্যাবস্থায় $|F| = |F_1| = |F_2|$ হইবে। NA অংশ MA অংশের উপর $-F_1 = -F$ বল প্রয়োগ করে; MA অংশ NA অংশের উপর $F_2 = F$ বল প্রয়োগ করে। এই অভ্যন্তরীণ বলগুলি দৈর্ঘ্য পরিবর্তনে বাধা দেয় এবং প্রযুক্ত বল সরাইয়া লইলে তারের দৈর্ঘ্য কমাইয়া প্রথম অবস্থায় লইয়া যাইতে প্রয়াস পায়।

কল্পিত তলের অভিলম্ব অভ্যন্তরীণ এই বলগুলিকে টানের পীড়ক বল (tensile stresses) বলে। প্রযুক্ত বল তারের ছেদের সম্পূর্ণ ক্ষেত্র জুড়িয়া সমানভাবে ক্রিয়া করিলে প্রস্থচ্ছেদের প্রতি একক বর্গক্ষেত্রে এইরূপ বলের মান সমান হইবে। একক বর্গক্ষেত্রে বলের মানই পীড়নের মান অর্থাৎ পীড়নাংক। অতএব প্রস্থচ্ছেদ A হইলে লম্ব পীড়ন $S_n = \sigma = F/A$। তারের যে কোন আড়াআড়ি ছেদের দুইদিকের অংশের উপর ইহারা বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে।

কল্পিত তল তারের দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে লইয়া আগের মত দুই অংশের সাম্য বিবেচনা করিলে দেখা যাইবে এই তল ভেদ করিয়া কোন অভ্যন্তরীণ বল ক্রিয়া করে না। ছেদ অন্যভাবে নিলে, ছেদের লম্ব যদি MN-এর অক্ষের সঙ্গে θ কোণ করে, তাহা হইলে এই ছেদের ক্ষেত্রফল $A \sec\theta$ এবং ছেদে

* টানজ তভির আন্তর্জাতিক শংসিত চিহ্ন $\epsilon\ (= \Delta l/l_0)$।

পীড়ন $F/A \sec\theta = S\cos\theta$। ছেদের অভিলম্বে ইহার উপাংশ $S_n = \sigma = S\cos^2\theta$ ও ছেদের তলে উপাংশ $S_t = \tau = S\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}S\sin 2\theta$। $\theta = 45°$-তে ইহার মান সবচেয়ে বেশী। তার টানিয়া ছিঁড়িতে গেলে প্রায় এইরকম কোণেই প্রথম ফাটল দেখা দেয়।

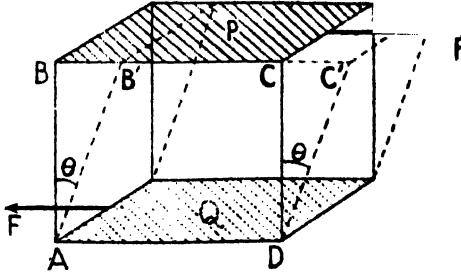
পদার্থের কেলাসের অণুগুলির মধ্যে আকর্ষণ ও বিকর্ষণ উভয় প্রকার বলই ক্রিয়া করে। স্বাভাবিক অবস্থায় আকর্ষণ ও বিকর্ষণে সাম্য ঘটিয়া আণবিক দূরত্ব একটি নির্দিষ্ট মানে থাকে। সাম্য অবস্থান হইতে বলের ক্রিয়ায় অণুর স্থানচ্যুতি ঘটিলে উহাদের পারস্পরিক আকর্ষণ-বিকর্ষণে অসমতা ঘটায় পরিবর্তন প্রতিরোধী অভ্যন্তরীণ বল দেখা দেয়। দূরত্ব বাড়িলে আকর্ষণের তুলনায় বিকর্ষণ বেশী কমে ; ফলে দুই অণুতে আকর্ষণ হয়। দূরত্ব কমিলে আকর্ষণের তুলনায় বিকর্ষণ বেশী বাড়ে ; তখন দুই অণুতে বিকর্ষণ ঘটে। বাহির হইতে টান প্রয়োগে দুই অণুর দূরত্ব বাড়াইলে অণুগুলির পারস্পরিক আকর্ষণ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি প্রতিরোধ করে। চাপ প্রয়োগে দূরত্ব কমাইলে বিকর্ষণ দৈর্ঘ্য হ্রাস প্রতিরোধ করে।

এখানে লক্ষ্য করা উচিত যে আকর্ষণ ও বিকর্ষণ অণুর দূরত্বের সঙ্গে একই নিয়মে বদলায় না। দূরত্ব r হইলে এবং আকর্ষণকে r^{-m}-এর ও বিকর্ষণকে r^{-n}-এর আনুপাতিক ধরিলে $|m| < |n|$ হইবে।

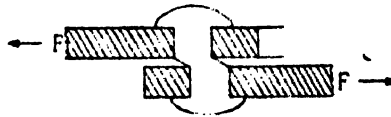
(খ) চাপের ততি ও পীড়ন। 9.2 চিত্রের F, $-F$ বলের ক্রিয়ামুখ উলটাইয়া দিলে বল টান না হইয়া চাপ হইবে। ইহাতে তারের দৈর্ঘ্য কমিবে। আগের মত Δl দৈর্ঘ্য পরিবর্তন হইলে, $\Delta l/l_0$ হইবে 'চাপের ততি' বা 'চাপজ ততি' (compressive strain) এবং F/A-কে ধরা হইবে চাপের পীড়ন (compressive stress)। অভ্যন্তরীণ বলের ক্রিয়া এখানেও আগের মত, কিন্তু উহাদের ক্রিয়ামুখ আগের বিপরীত।

(গ) কৃন্তনের ততি ও পীড়ন। দুই হাতের মধ্যে একখানা মোটা বই লইয়া মলাটের সমতলে বাঁধান দিকের আড়াআড়ি এক হাতে ঠেলা দিলে বইয়ের পাতাগুলি একে অন্যের উপর দিয়া একটু করিয়া সরে। বইয়ের পাশের দিকে তাকাইলে দেখা যাইবে আগে যাহা দেখিতে আয়তক্ষেত্রের মত ছিল, তাহা ঠেলার পর সামান্তরিকের মত হইয়াছে। এক জোড়া তাস লইয়াও এরূপ করিয়া দেখা যায়। এক্ষেত্রে স্পার্শক বলের (tangential force) প্রয়োগে বস্তুর বিভিন্ন তল বলের সমান্তরালে একটু করিয়া সরে, কিন্তু বস্তুর আয়তন পরিবর্তন হয় না।

আয়তাকার কোন বস্তুর (9.3 চিত্রের $ABCD$) এক তল (Q) স্থির

রাখিয়া তাহার বিপরীত তল *P*-র সমতলে এক কিনারার (*BC*-র) সমান্তরালে *F* বল প্রয়োগ করিলে বস্তুটির আকারের পরিবর্তন হইবে কিন্তু আয়তন বদলাইবে না। বস্তুর যে *ABCD* তল আগে আয়তাকার ছিল তাহা সামান্তরিকে পরিণত হইবে। এরূপ ক্ষেত্রে আমরা বলি বস্তুটির কৃন্তন (shear) ঘটিয়াছে। বস্তুর উপরের তল *BB'* পরিমাণ সরিয়া থাকিলে, BB'/AB অনুপাতকে কৃন্তনের তবির মান বলিয়া ধরা হয়। কৃন্তন-বল (*F*) প্রয়োগে

9.3 চিত্র

বলের অভিলম্ব কোন রেখা (*AB*) θ কোণে হেলিয়া গেলে θ-কে 'কৃন্তন-কোণ' (angle of shear) বলে। θ খুব ছোট হইলে $\theta = BB'/AB$ ধরা যায়।

BB'/AB অনুপাতে $AB = 1$ হইলে কৃন্তনের তবি $= BB'$ হয়। এই কারণে কৃন্তন-বলের অভিলম্বে একক দূরত্বে অবস্থিত দুই তলের আপেক্ষিক স্থানচ্যুতিকেও কৃন্তনের তবি (shearing strain) বলা যায়। সকল ক্ষেত্রেই কৃন্তনের তবি *BB'*-এর মান $BB' = AB \tan\theta$।

9.4 চিত্র

কৃন্তনের সমান্তরালে কোন বস্তুর ছেদ ধরিলে, ছেদের একদিকের অংশ অন্যদিকের অংশের উপর ছেদতলে স্পার্শিক (tangential) বল প্রয়োগ করে। দুই অংশের উপর এই বল সমান ও বিপরীতমুখী, এবং সাম্য অবস্থায় ইহারা প্রযুক্ত বলের সমান। অতএব ছেদের ক্ষেত্রফল *A* হইলে এবং প্রযুক্ত বল *F* ছেদতলে সুষমভাবে ক্রিয়া করিলে, প্রতি একক বর্গক্ষেত্রে অভ্যন্তরীণ বলের মান F/A-ই কৃন্তনের পীড়ন (shearing stress)।

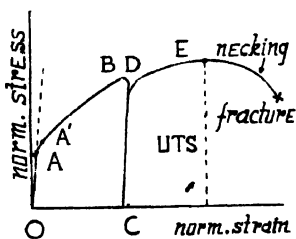
রিভেট (Rivet) দিয়া আঁটা দুখানা পাতকে বিপরীত দিকে টানিলে (9.4 চিত্র) রিভেটে কৃন্তন প্রযুক্ত হয়। রিভেটের দুই প্রান্ত টানিলে উহাতে টান প্রয়োগ হয়। কাঁচির সাহায্যে কিছু কাটিবার সময় কাঁচি উহাতে কৃন্তন প্রয়োগ করে।

সংক্ষেপে মনে রাখা যায়, পদার্থের ভিতরে কোন তলের এক পাশের অংশ অন্য পাশের অংশকে

(১) তলের অভিলম্বে টানিলে ঐ তলে পীড়ন 'টানজ পীড়ন',

(২) ঠেলিলে উহা 'চাপজ পীড়ন' এবং

(৩) বল তলের সমান্তরালে ক্রিয়া করিলে উহা 'কৃন্তন'।

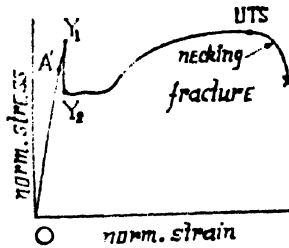
9-3. তভি-পীড়ন বক্র (Stress-strain curve)। কোন কঠিন পদার্থে টানের পীড়ন ক্রমশঃ বাড়াইতে থাকিলে উহার বিকৃতি প্রথমে 'স্থিতিস্থাপক' (elastic) থাকে, পরে 'নমনীয়' (plastic) হয় এবং শেষ পর্যন্ত উহা ভাঙ্গে বা ছেঁড়ে। বিকৃতি স্থিতিস্থাপক বলিতে বুঝায় পীড়ন সরাইয়া লইলে বিকৃতি সম্পূর্ণ লোপ পায়, এবং বস্তুটি পীড়ন প্রয়োগের আগের অবস্থায় ফিরিয়া যায়। বিকৃতি নমনীয় বলিতে বুঝায় পীড়ন সরাইয়া লইলেও কিছু বিকৃতি স্থায়ীভাবে থাকিয়া যায়।

9.5 চিত্র

[চিত্রে **'norm'**-এর বদলে **'nom' (nominal)** পড়িতে হইবে]

টানের ক্রিয়ায় পদার্থের আচরণ তভি-পীড়ন বক্রের সাহায্যে দেখান হয়। পদার্থ দণ্ডের আকারে নেওয়া হয়। দণ্ডের সুষম অংশের দুই দাগের মধ্যের দৈর্ঘ্য পরিবর্তনকে দুই দাগের অবিকৃত অবস্থার দূরত্ব দিয়া ভাগ করিয়া তভি মাপা হয়। প্রযুক্ত বলকে দণ্ডের অবিকৃত অবস্থার প্রস্থচ্ছেদ দিয়া ভাগ করিয়া পীড়ন মাপা হয়। যে যন্ত্রের সাহায্যে ইহা করা হয় তাহাকে টান পরীক্ষণ যন্ত্র (Tensile testing machine) বলে। মাপনে সাধারণতঃ তভি সুষম হারে বাড়ান হয় এবং কোন্ তভিতে প্রযুক্ত বল

কত তাহা দেখা হয়। স্বয়ংক্রিয় যন্ত্রে প্রযুক্ত বল ও দৈর্ঘ্য পরিবর্তন নিজ হইতেই রেখায় চিত্রিত হয়।

টানে দৈর্ঘ্য বাড়িলে প্রস্থচ্ছেদ কমে ; কিন্তু পীড়ন মাপনে প্রস্থচ্ছেদের পরিবর্তন না ধরিয়াই তাঁত-পীড়ন বক্র টানা হয়। ধরিলে বক্রের প্রকৃতি একটু অন্যরকম হয়। 9.5 ও 9.8 চিত্র তুলনা করিলে এই প্রভেদ বোঝা যাইবে।

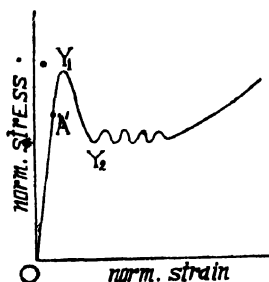
অ্যানীল করা (annealed) তামা, অ্যালুমিনিয়াম, স্টেইনলেস স্টীল ও অন্যান্য অনেক ধাতুর আচরণ 9.5 চিত্রের তাঁত-পীড়ন বক্রের মত। চিত্রের মূলবিন্দু O হইতে A পর্যন্ত অংশে তাঁত ও পীড়ন সমানুপাতিক ও তাঁত-পীড়ন রেখা সরল। A বিন্দুকে 'সমানুপাতিকতার সীমা' (limit of proportionality) বলে। ইহার পর রেখা সরল না থাকিয়া বাঁকিতে থাকে ও টান বৃদ্ধির তুলনায় দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি বেশী হয়। A হইতে অল্প দূর

9.6 চিত্র

[চিত্রে **'norm'**-এর বদলে **'nom'** (**nominal**) পড়িতে হইবে]

(A') পর্যন্ত টান সরাইয়া লইলেও দণ্ড পূর্বের দৈর্ঘ্য ফিরিয়া পায়। পীড়নের যে সীমা (A') পর্যন্ত এইরূপ ঘটে তাহাকে 'স্থিতিস্থাপকতার সীমা' (Elastic limit) বলে। এই সীমা ছাড়াইলে দণ্ড পূর্বের দৈর্ঘ্য ফিরিয়া পায় না। অল্প বৃদ্ধি স্থায়ীভাবে থাকিয়া যায়। ইহাকে 'স্থায়ী বৃদ্ধি' (permanent set) বলে। A' পর্যন্ত দণ্ডের বিকৃতিতে স্থিতিস্থাপক (elastic) বলা হয়। A'-এর পরে বিকৃতিকে নমনীয় (plastic) বলে।

বিকৃতি নমনীয় হওয়ার পর টান সম্পূর্ণ সরাইয়া লইলে স্থায়ী বৃদ্ধি থাকিয়া যায়। স্থায়ী বৃদ্ধির পর নূতন করিয়া পীড়ন বাড়াইতে থাকিলে প্রথমে পীড়নের অনুপাতেই তাঁত বাড়ে এবং সমানুপাতিকতার সীমা আগের চেয়ে উপরে ওঠে। 9.5 চিত্রের B বিন্দুতে পৌঁছিবার পর বল

কমাইয়া শূন্যে পরিণত করিলে ততি-পীড়ন সম্পর্ক হয় *BC* রেখার মত। *OC* স্থায়ী বৃদ্ধি। টান আবার বাড়াইতে থাকিলে *CD* রেখা পাওয়া যায়। *E* বিন্দুতে পৌঁছিবার পর বল কমিতে থাকে। *E* বিন্দুতে প্রবুক্ত বলের মান চরম। প্রবুক্ত চরম বলকে অবিকৃত অবস্থার প্রস্থচ্ছেদ দিয়া ভাগ করিয়া যে মান পাওয়া যায় তাহাকে 'টানের চরম পীড়ন' (Ultimate tensile stress বা সংক্ষেপে *UTS*) বলে। কেহ কেহ ইহাকে 'ভঞ্জক পীড়ন' (Breaking stress) ও বলেন। *E* বিন্দু পর্যন্ত দণ্ডের সর্বত্র দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি সুষম, কিন্তু উহার প্রস্থচ্ছেদ আগের চেয়ে কম। ইহার পরে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি অসম হইতে থাকে এবং দণ্ডের স্থান বিশেষ সরু হইয়া যায়। ইহাকে 'মধ্যকৃশন' (Necking) বলে। শেষ পর্যন্ত সবচেয়ে সরু অংশে দণ্ড ছিঁড়িয়া যায়।

নরম ইস্পাত (mild steel), পিতল, ব্রোঞ্জ এবং অন্যান্য নানা প্রকার সংকর ধাতুর ততি-পীড়ন বক্র একটু অন্য রকম। ইহা 9.6 চিত্রে দেখান হইয়াছে। বক্রের স্থিতিস্থাপক সীমা (*A'*) অতিক্রম করার পর নমনীয়

9.7 চিত্র

[চিত্রে '**norm**' এর বদলে '**nom**' (**nominal**) পড়িতে হইবে।]

অংশে ততি একটু বাড়ে ও পীড়ন দ্রুত বাড়িয়া এক চরম মানে পৌঁছায়। ইহার পর নমনীয় ততি বাড়িতে থাকিলেও পীড়ন কমিয়া এক অবম মানে আসে ও একই পীড়নে ততি বাড়িতে থাকে। কোন কোন ক্ষেত্রে এই অংশে পীড়ন স্থির না থাকিয়া বাড়ে ও কমে (9.7 চিত্র)। এই অংশে দণ্ডের সর্বত্র দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি সমান হয় না। ততি-পীড়ন বক্রের বাকী অংশ 9.5 চিত্রের মত।

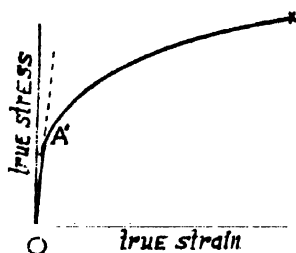
নমনীয় অংশে প্রথমে পীড়নের যে চরম মান হয় তাহাকে 'ঊর্ধ্ব পরাভব বিন্দু' (Upper yield point ; Y_1) বলে। উহা কমিয়া যে মানে প্রায় স্থির হয় তাহাকে 'নিম্ন পরাভব বিন্দু' (Lower yield point ; Y_2)

বলে। ঊর্ধ্ব বিন্দুর পীড়ন ও ততিকে 'পরাভব পীড়ন' (Yield stress) ও 'পরাভব ততি' (Yield strain) বলে।

পরাভব বিন্দুর উপরোক্ত দুই প্রকার আচরণ উপেক্ষা করিয়া সাধারণ ভাবে অনেক সময় বলা হয় 'যে পীড়নে পীড়ক বল আর না বাড়াইলেও ততি বাড়িতে থাকে তাহাকে পরাভব বিন্দু বলে'।

উষ্ণতা বাড়িলে ঊর্ধ্ব ও নিম্ন পরাভব বিন্দুর দূরত্ব কমে। ততি পরিবর্তন ধীরে হইলেও ইহা কমে। পদার্থের বিশুদ্ধতা ও সংকর ধাতুর গঠনের উপরও ইহা নির্ভর করে। কোন কোন ক্ষেত্রে বিন্দু দুইটি আলাদা করিয়া পাওয়া না যাইতেও পারে। এ অবস্থায় পরাভব বিন্দুতে পৌঁছিয়া কার্যতঃ একই পীড়নে ততি বাড়িতে থাকে ; মনে হয় পদার্থ যেন টান প্রতিরোধ করার ক্ষমতা হারাইয়া ফেলিয়াছে। মোটামুটিভাবে দেখা যায় পরাভব বিন্দু অতিক্রম করিলে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি দ্রুত বাড়ে। এ অবস্থায় তার নমনীয় (plastic) হইয়াছে বলা চলে কারণ পীড়নের ক্রিয়াকালের উপর ততি নির্ভর করে।

পদার্থ স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যেই বা সীমা অতিক্রম করার অনতিপরেই ভাঙ্গিলে তাহাকে 'ভঙ্গুর' (brittle) বলা হয়।

স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম করার পরই দস্তা, টিন ও সীসা দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির সুসমতা হারায় এবং স্থান বিশেষ সরু হইয়া পড়ে, অর্থাৎ মধ্যকৃশন হয়। ইহাদের চরম পীড়ন (UTS) স্থিতিস্থাপক সীমার পীড়নের চেয়ে সামান্য বড়।

9.8 চিত্র

ততি-পীড়ন বক্রে পীড়ন হিসাব করিতে প্রযুক্ত বলকে সব অবস্থায় অবিকৃত অবস্থার প্রস্থচ্ছেদ দিয়া ভাগ করার রীতি প্রচলিত থাকিলেও ইহা দোষমুক্ত নয়। যথার্থ পীড়ন পাইতে বলকে সেই বলাধীন অবস্থার প্রস্থচ্ছেদ দিয়া ভাগ করিতে হইবে। মধ্য কৃশন সুরু হইলে পীড়ন মাপিতে সবচেয়ে সরু অংশের প্রস্থচ্ছেদ দিয়া ভাগ করা উচিত। এইভাবে হিসাব করা তামার তারের ততি-পীড়ন বক্র 9.8 চিত্রে দেখান হইয়াছে।

9.5 চিত্রের সঙ্গে ইহার প্রভেদ লক্ষণীয়। যথার্থ পীড়ন কখনো কমে না ; না ভাঙ্গা পর্যন্ত উহা বাড়িয়াই চলে। 9.8 চিত্রকে 'যথার্থ' (true) তথি-পীড়ন বক্র ও 9.5 চিত্রকে 'তথা-কথিত' (nominal) তথি-পীড়ন বক্র বলা যায়।

ইঞ্জিনীয়ারিং-এর কাজে বিভিন্ন বাস্তু সামগ্রীর (building materials) তথি-পীড়ন বক্র জানা খুবই দরকার।

9-4. হুকের সূত্র এবং স্থিতিস্থাপকতার বিভিন্ন গুণাংক (Hooke's law and elastic moduli)। স্থিতিস্থাপকতার মূল সূত্র বাহির করেন রবার্ট হুক। ইনি বয়েল সূত্রের আবিষ্কর্তা রবার্ট বয়েলের সমসাময়িক ছিলেন। হুক দেখান যে পীড়ন একটা সীমা না ছাড়াইলে পীড়ন ও তথি সমানুপাতিক। ইহাকেই **হুকের সূত্র** বলে। এই সূত্র অনুসারে তথি-পীড়ন বক্রের সমানুপাতিকতার সীমার ভিতরে

$$\frac{\text{পীড়ন}}{\text{তথি}} \text{ অর্থাৎ } \frac{\text{পীড়নাংক}}{\text{আপেক্ষিক বিকৃতি}} = \text{স্থিররাশি।}$$

এই স্থির রাশিকে স্থিতিস্থাপকতার গুণাংক (Modulus of elasticity) বলে। ইহা পদার্থ ও পীড়নের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে। তাছাড়া উষ্ণতা ও বস্তুর পূর্ব ইতিহাস ইহাকে কিছু প্রভাবিত করে। উষ্ণতা বাড়িলে সাধারণতঃ স্থিতিস্থাপকতা কমে।

9-4.1. স্থিতিস্থাপকতার বিভিন্ন গুণাংক। সমসত্ত্ব সমদৈশিক পদার্থের স্থিতিস্থাপক আচরণ বিচারে চারটি রাশি বিশেষ মূল্যবান। ইহাদের তিনটি স্থিতিস্থাপক গুণাংক ও অন্যটি দুই তথির অনুপাত। ইহাদের নাম

(১) ইয়ং-এর গুণাংক (Young's modulus ; E)*

(২) পোয়াসঁর অনুপাত (Poisson's ratio ; μ)

(৩) আয়তন-বিকার গুণাংক (Bulk modulus ; K) ও

(৪) কৃন্তন গুণাংক (Shear modulus বা modulus of rigidity ; G)।

পীড়ন সকল ক্ষেত্রেই একক বর্গক্ষেত্রে প্রযুক্ত বল দিয়া নির্ধারিত হয়। কাজেই পীড়নের মাত্রা = [বল / বর্গক্ষেত্র] $= MLT^{-2}/L^2 = ML^{-1}T^{-2}$। তথি সকল ক্ষেত্রেই সংখ্যা মাত্র। কাজেই (১), (৩) ও (৪) গুণাংক তিনটির মাত্রা $ML^{-1}T^{-2}$। সিজিএস এককে ইহাদের dyn/cm² এককে প্রকাশ করা হয় ; এমকেএস এককে হয় newton/m² দিয়া। পোয়াসঁর অনুপাত দুইটি তথির অনুপাত বলিয়া উহা মাত্রাহীন সংখ্যা। মনে রাখিতে

* E, μ, K ও G যথাক্রমে (১) হইতে (৪) রাশি কয়টির আন্তর্জাতিক শংসিত (recommended) চিহ্ন। পোয়াসঁর অনুপাতকে ν-ও লেখা চলে।

হইবে যে এই চারটি রাশি পরস্পর নিরপেক্ষ নয়। ইহাদের মধ্যে মাত্র দুইটি নিরপেক্ষ রাশি।

(১) **ইয়ং-এর গুণাংক**। কোন বস্তুতে টান প্রয়োগ করিলে উহা টানের দিকে দৈর্ঘ্যে বাড়ে ও টানের অভিলম্বে (প্রস্থে) একটু সংকুচিত হয়। এই সংকোচনে কোন বাধা না থাকিলে টানের পীড়ন ও বিকৃতির অনুপাতকে ইয়ং-এর গুণাংক বলে। টানের বদলে চাপ প্রয়োগ করিলে চাপের দিকে বস্তুর দৈর্ঘ্য কমে ও তাহার অভিলম্বে একটু বাড়ে। অভিলম্বে (প্রস্থে) বৃদ্ধির কোন বাধা না থাকিলে এখানেও চাপের পীড়ন ও বিকৃতির অনুপাতকে একই নাম দেওয়া হয়। বস্তুর আদি দৈর্ঘ্য l, প্রস্থচ্ছেদ A. প্রযুক্ত বল F ও দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি বা হ্রাস Δl হইলে

$$E = \text{ইয়ং-এর গুণাংক} = \frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}} = \frac{F/A}{\Delta l/l} \qquad (9\text{-}4.1)$$

প্রশ্ন। (1) 7 মিটার লম্বা ও 1 মিলিমিটার ব্যাসের একগাছা ইস্পাতের তারে 30 kg টান প্রয়োগ করিলে উহা 1.21 cm বাড়ে। বিকৃতি, পীড়ন ও ইয়ং-এর গুণাংক কত? [উত্তর : 0.00173; 38.2 kg-wt/mm^2 বা 3.74×10^9 dyn/cm^2; 2.21×10^6 kg-wt/cm^2 বা 2.16×10^{12} dyn/cm^2। পীড়ন বা গুণাংক যে অন্য এককেও প্রকাশ করা যায় তাহা দেখান হইল।]

(2) 24 ft উঁচু ও 10.8 in^2 প্রস্থচ্ছেদের একটি ইস্পাতের স্তম্ভ 60 ton ওজন বহন করে। স্থিতিস্থাপক গুণাংক 30×10^6 lb/in^2 হইলে স্তম্ভের দৈর্ঘ্য পরিবর্তন কত হইবে? (1 ton = 2240 lb) [উত্তর : 0.112 in]

(3) 2 m লম্বা 0·8 mm ব্যাসের একগাছা ইস্পাতের তার অনুভূমে দুই প্রান্তে দৃঢ়ভাবে আটকান। তারের ইয়ং গুণাংক 2×10^{12} dyn/cm^2 হইলে উহার মধ্য বিন্দুতে কত ভার ঝুলাইলে ঐ স্থানে তার 1 cm দাবিবে?

[সংকেত—প্রয়োজনীয় চিত্র আঁকিয়া লও। ভার ঝুলাইবার পর তারের এক অর্ধের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $= (100^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - 100 = 0.005$ cm। ঝোলা অবস্থায় তারে টান T, এবং উল্লম্বের সহিত উহার কোণ θ ধরা যাক। তাহা হইলে ভার $= 2T \cos \theta$। কার্যতঃ $\cos \theta = 1/100$ বলিয়া, $T = 50 \times$ ভার। পীড়ন $= T/$প্রস্থচ্ছেদ ও বিকৃতি $=$ 0·005/100। ইয়ং গুণাংক = পীড়ন/বিকৃতি সমীকরণে মানগুলি বসাইলে পাওয়া যায় ভার = 10.3 kg।

(4) 1 mm ব্যাসের তারে কিছু ভার ঝুলাইয়া উহাকে ঠিক টানটান রাখা হইয়াছে। উষ্ণতা 20°C কমিলে তারের দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত রাখিতে অতিরিক্ত কত ভার ঝুলাইতে হইবে? ইয়ং গুণাংক $= 2 \times 12^{12}$ সিজিএস একক; দৈর্ঘ্য-প্রসারণ গুণাংক 1×10^{-5}/°C।

[সংকেত—তারের দৈর্ঘ্য l হইলে উহার সংকোচন $l.10^{-5}.20$। ভারের জন্য বৃদ্ধি ইহার সমান হইতে হইবে। উত্তর : 3.2 kg।]

(5) $2l$ দৈর্ঘ্য ও A প্রস্থচ্ছেদের তার অনুভূমে টানা দেওয়া আছে। উহার

মধ্য বিন্দুতে W ভার ঝুলান হইল। ইয়ং গুণাংক E হইলে প্রমাণ কর যে ইহাতে মধ্য বিন্দু d পরিমাণ নামিয়া আসিলে $d^3 = Wl^3/EA$ হইবে।

[সংকেত—উপরের 3 নং প্রশ্ন দেখ]

(২) পোয়াসঁর অনুপাত। টান বা চাপে দৈর্ঘ্যের যেমন তবিকৃতি হয় প্রস্থেরও তেমন হয়, একথা আগে বলা হইয়াছে। প্রস্থের তবিকৃতিতে বাধা না থাকিলে

$$\frac{\text{প্রস্থের তবিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্যের তবিকৃতি}}\text{-কে পোয়াসঁর অনুপাত বলে।}$$

দৈর্ঘ্য l ও প্রস্থ b এবং দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি Δl ও প্রস্থ হ্রাস Δb হইলে

$$\text{পোয়াসঁর অনুপাত } \mu = \frac{\Delta b/b}{\Delta l/l} \qquad (9\text{-}4.2)$$

দৈর্ঘ্য হ্রাস Δl এবং প্রস্থ বৃদ্ধি Δb হইলেও উপরের সম্পর্ক খাটিবে।

প্রশ্ন। অ্যালুমিনিয়ামের একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য 2 m এবং ব্যাস 2 cm। 70 kg ভারে দৈর্ঘ্য দশ লক্ষে তিরিশ ভাগ বাড়ে। অ্যালুমিনিয়ামে পোয়াসঁর অনুপাত 0.33 হইলে, ঐ ভারে প্রস্থ কতটুকু কমিবে? [উত্তর : 2.10^{-5} cm]

(৩) আয়তন বিকার গুণাংক। কোন বস্তুর উপর সব দিকে সমান চাপ (প্রেষ) দিলে উহার আয়তন কমে। dP প্রেষ বৃদ্ধিতে আয়তনের হ্রাস $-dV$ ও হ্রাসের পূর্বে আয়তন V_0 থাকিলে, পীড়ন dP (প্রতি একক বর্গক্ষেত্রে প্রযুক্ত চাপ বা চাপ বৃদ্ধি) এবং তবিকৃতি $-dV/V_0$। এই পীড়ন ও তবিকৃতির অনুপাতকে আয়তন বিকার গুণাংক (Bulk modulus) বলে।

$$\text{আয়তন বিকার গুণাংক } K = -\frac{dP}{dV/V_0} \qquad (9\text{-}4.3)$$

K-র বিপরীত রাশি $1/K$-কে সংনম্যতা (compressibility) বলে।

$$\text{সংনম্যতা } C = 1/K = -\frac{dV/V_0}{dP} \qquad (9\text{-}4.4)$$

প্রশ্ন। 10 kg/cm² প্রেষে এক লিটার গ্লিসারিনের আয়তন 0.21 cm³ কমে। গ্লিসারিনের আয়তন বিকার গুণাংক কত? [উত্তর : 4.76×10^4 kg.wt/cm² বা 4.66×10^{10} dyn/cm²]

(8) কৃন্তন গুণাংক। A বর্গক্ষেত্রের কোন তলে স্পার্শক বল F প্রয়োগ করিলে স্পার্শক পীড়ন $= F/A = \tau$। ইহাতে কৃন্তন কোণ θ হইলে

কৃন্তন গুণাংক $G = \dfrac{F/A}{\tan\theta} \quad \tan\theta$ বা $\quad tg\,\theta$ (9-4.5)

θ খুব ছোট হইলে $\tan\theta$-র বদলে রেডিয়ান মাপে θ লেখা চলে।

প্রশ্ন। (1) 2 ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট একটি অ্যালুমিনিয়াম ঘনকের বিপরীত তলে উহার কোন বাহুর সমান্তরালে সমান ও বিপরীতমুখী কৃন্তনের বল প্রয়োগ করা হইল। ঘনকের কৃন্তন কোণ $0.01°$ হইতে হইলে প্রযুক্ত বলের মান কত হইবে? ($G = 4.2 \times 10^6$ lb/in^2)

[উত্তর : $2{\cdot}9 \times 10^4$ lb-wt]

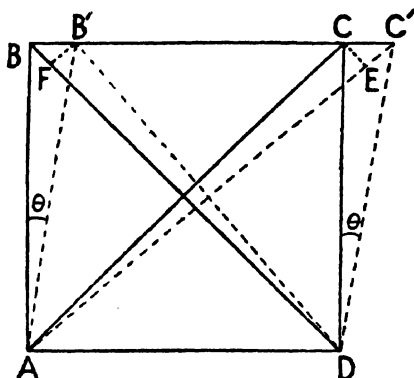
(2) 4 ft বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার একখানা ধাতুপাত আধ ইঞ্চি মোটা। উহাতে কৃন্তনের বল এমনভাবে প্রযুক্ত হইল যে পাত বর্গাকার না থাকিয়া রম্বাসে পরিণত হয়। 180 ton বল প্রয়োগে পাতের এক ধার যদি 0.069 ইঞ্চি সরে তাহা হইলে কৃন্তনের তাতি, পীড়ন ও গুণাংক কত?

[উত্তর : 0.00144 ; 16800 lb/in^2 ; 1.17×10^7 lb/in^2]

স্থিতিস্থাপক গুণাংকের তালিকা

পদার্থ	ইয়ং গুণাংক		আয়তন বিকার গুণাংক		কৃন্তন গুণাংক		μ
	dyn/cm^2	lb. wt./in^2	dyn/cm^2	lb. wt./in^2	dyn/cm^2	lb. wt/in^2	
অ্যালুমিনিয়াম	7×10^{11}	10×10^6	7×10^{11}	10×10^6	2.5×10^{11}	3.6×10^6	0.34
তামা	10 „	14 „	12 „	17 „	4·2 „	6·1 „	0.33
লোহা (তার)	20 „	29 „	9·6 „	14 „	5·1 „	7·4 „	0.26
লোহা (ঢালাই)	11·5 „	16·8 „	—	—	—	—	—
ইস্পাত (নরম)	22 „	32 „	16 „	23 „	8 „	11·6 „	0.28
জল	—	—	0·2 „	0·3 „	—	—	
পারা	—	—	2·6 „	3·7 „	—	—	

9-5. সমদৈশিক পদার্থে স্থিতিস্থাপক রাশিগুলির মধ্যে সম্পর্ক (Relation between elastic constants of an isotropic solid)। উপরে উল্লিখিত তিনটি গুণাংক ও পোয়াসঁর অনুপাত পরস্পর সম্পর্কিত। সম্পর্কগুলি স্থাপনা করার আগে কৃন্তনকে কিভাবে টান ও চাপে বিভক্ত করা যায় তাহা দেখা দরকার।

9-5.1. কৃন্তনের ক্রিয়া একদিকে টান ও তাহার অভিলম্বে সমান চাপের ন্যায়। 9.9 চিত্রে $ABCD$ একটি ঘনকের ছেদ। BC-র সমান্তরালে স্পার্শিক বল প্রয়োগে $ABCD$ বর্গক্ষেত্র $AB'C'D$ রম্বাসে পরিণত হইয়াছে। কৃন্তনে AC কর্ণ বাড়িয়া AC' হইয়াছে, BD কর্ণ কমিয়া $B'D$ হইয়াছে। চিত্রে কৃন্তন কোণ θ সুবিধার জন্য অনেক বড় করিয়া আঁকা হইয়াছে।

9.9 চিত্র

AC'-এর উপরে CE এবং BD-র উপরে $B'F$ লম্ব টান। BFB' ও CEC' ত্রিভুজ দুইটি কার্যতঃ সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। θ কোণ খুব ছোট বলিয়া AC-র বৃদ্ধি EC' ধরা যাইতে পারে।

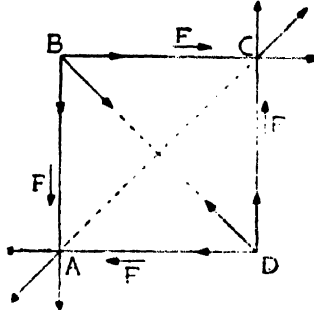
$$EC' = \frac{CC'}{\sqrt{2}} = \frac{DC.\theta}{\sqrt{2}} = \frac{AC}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\theta}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2} AE.\theta.$$

অতএব টানের ততি $= EC'/AE = \frac{1}{2}$।

অনুরূপে, চাপের ততি

$$= \frac{BF}{BD} = \frac{BB'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{BD} = \frac{BB'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{AB.\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{BB'}{AB} = \tfrac{1}{2}\theta.$$

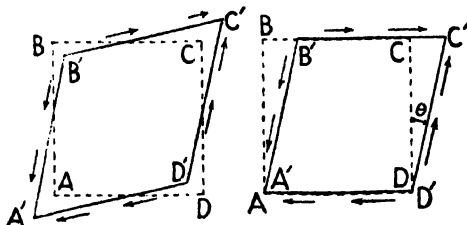
দেখা যায় কৃন্তনের ততি θ, কৃন্তনের $45°$ কোণে টানের ততি $\frac{1}{2}\theta$ এবং তাহার অভিলম্বে চাপের ততি $\frac{1}{2}\theta$-র সমান।

কৃন্তনে টান ও চাপ কিভাবে আসে তাহা সহজেই বোঝা যায়। বর্গাকার ছেদের কোন বস্তু কল্পনা কর। ছেদের বাহু *BC*-র (9.10 চিত্র) সমান্তরালে বস্তুটির উপরের তলে যেন কৃন্তন-বল *F* প্রয়োগ করা হইল। বস্তুটিকে সাম্যে রাখিতে হইবে বলিয়া উহার উপরে অন্যান্য বলও প্রয়োগ করিতে হইবে। *F*-কে

9.10 চিত্র

প্রতিমিত (balance) করিতে উহার সমান ও বিপরীত বল বস্তুটির *AD* তলে প্রয়োগ করা যায়। কিন্তু এই দুই বল একটি দ্বন্দ্বের সৃষ্টি করিয়া *ABCD* তলকে দক্ষিণাবর্তে ঘুরাইতে চায়। এই দ্বন্দ্বকে প্রতিমিত করার জন্য *AB* ও *CD* তলে *F* মানের দুইটি সমান ও বিপরীত বল প্রয়োগ করিয়া একটি বামাবর্তী দ্বন্দ্বের সৃষ্টি করিতে হইবে। এইরূপ করিলে বস্তুটি সাম্যে থাকিবে এবং উহাতে ঈপ্সিত কৃন্তন পীড়নের সৃষ্টি হইবে। অতএব কৃন্তনে বল মাত্র একটি নয়; সক্রিয় বলগুলি একই অক্ষে সমান ও বিপরীত দ্বন্দ্বের সৃষ্টি করে।

ছেদের *A* ও *C* বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলগুলির লব্ধি *AC* রেখায় টানের সৃষ্টি করে। ইহা *BD* কর্ণের অভিলম্বে। অনুরূপে দেখা যায়, *B* ও *D* বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলগুলির লব্ধি *BD* রেখায় সমান চাপের সৃষ্টি করে। ইহা *AC* কর্ণের অভিলম্বে। অতএব দেখা গেল কৃন্তনে ক্রিয়াশীল বলগুলি কৃন্তনের 45° কোণে একদিকে টান ও উহার অভিলম্বে সমান চাপের সহিত অভিন্ন।

9.11 চিত্রে কৃন্তন এবং টান ও চাপের অভিন্নতা দেখান হইয়াছে। 9.11 (*a*) চিত্রে *ABCD* বর্গক্ষেত্র উহার কর্ণ বরাবর সমান টান ও চাপে *A'B'C'D'* রম্বাসে পরিণত হইয়াছে। *A'D'* বাহুকে *AD*-র সহিত মিলাইয়া রাখিলে (9.11*b* চিত্র) দেখা যাইবে উহাতে কৃন্তন ঘটিয়াছে।

9-5.2. E, K ও μ-র সম্পর্ক। 9.12 চিত্রে একক বাহুর একটি ঘনক দেখান হইয়াছে। উহার যে কোন কোনা O-কে মূলবিন্দু এবং ঘনকের ঐ স্থানের তিন কিনারাকে x, y, z অক্ষ ধর। ঘনকের ছয়টি তলেই তলের অভিলম্বে F টান প্রয়োগ করা হইল। x অক্ষের সমান্তরালে দুই F-এ P পীড়নের* একটি টান বুঝায়, কারণ F যে ক্ষেত্রের উপর ক্রিয়া করে তাহা একক মানের। ঘনকের পদার্থের ইয়ং গুণাংক E এবং পোয়াসঁর অনুপাত μ ধরা

(a) (b)

9.11 চিত্র

যাক। তাহা হইলে P টানে x অক্ষে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হইবে P/E, এবং x-এর অভিলম্বে y এবং z অক্ষে দৈর্ঘ্যের হ্রাস হইবে $\mu P/E$। অনুরূপে y এবং z অক্ষ আলাদা আলাদাভাবে ধরিয়া দেখা যাইবে প্রত্যেক অক্ষে টানের জন্য P/E দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি ও অভিলম্ব দুই অক্ষে $\mu P/E$ করিয়া দৈর্ঘ্য হ্রাস হইবে। অতএব x, y, z-এর যে কোন অক্ষে মোট দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি

$$=P/E-2\mu P/E=(1-2\mu)P/E.$$

ছয়টি P মিলিয়া আয়তন বিকার ঘটায়। আয়তন বিকার পীড়ন P এবং গুণাংক K। আয়তনের পরিবর্তন সহজেই হিসাব করা যায়। যে বাহু আগে একক পরিমিত ছিল তাহা বহির্মুখী টানে $1+(1-2\mu)P/E$ হইয়াছে। অতএব নূতন আয়তন $\{1+(1-2\mu)P/E\}^3$। P/E খুব ছোট বলিয়া নূতন আয়তন $1+3(1-2\mu)P/E$ ধরা যায়। (ইহাতে P/E-এর বর্গ ও ঘনমান উপেক্ষা করা হইয়াছে)। অতএব আয়তনের পরিবর্তন $3(1-2\mu)P/E$। আয়তন বিকারের তথিও ইহাই কারণ গোড়ায় আয়তন ছিল 1।

$$\therefore K=\frac{\text{পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকারের তথি}}=\frac{P}{3(1-2\mu)P/E}=\frac{E}{3(1-2\mu)}$$

অর্থাৎ $$E=3K(1-2\mu) \qquad (9\text{-}5.1)$$

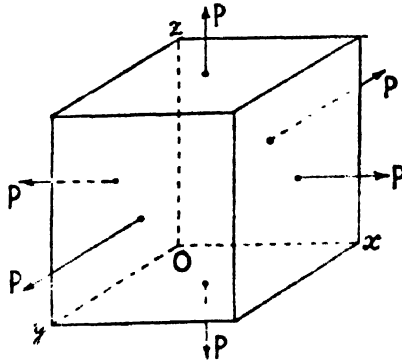
* P গুলি লম্বপীড়ন σ (9-2.1 অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য)

9-5.3 E, G ও μ র সম্পর্ক। এই সম্পর্ক বাহির করিতে ঘনকে কেবল x অক্ষে P চাপজ পীড়ন ও y অক্ষে P টানজ পীড়ন প্রয়োগ কর (9.13 চিত্র)। ইহাতে বিভিন্ন অক্ষে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি নিচের মত হইবে ঃ

x অক্ষে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $= -P/E - \mu\, P/E,$

y ,, ,, ,, $= P/E + \mu P/E,$

z ,, ,, ,, $= -\mu P/E + \mu P/E = 0.$

অতএব x অক্ষে চাপের তাতি $(1+\mu)P/E$, এবং y অক্ষে টানের তাতি $(1+\mu)P/E$।

9.12 চিত্র

9-5.1 অনুচ্ছেদে আমরা দেখিয়াছি পরস্পর অভিলম্বে সমান টান ও চাপ কৃন্তনের ন্যায় ক্রিয়া করে, এবং কৃন্তন কোণ θ টান বা চাপের তাতির দ্বিগুণ। অতএব এক্ষেত্রে $\theta = 2(1+\mu)P/E$।

G কৃন্তন গুণাংক হইলে

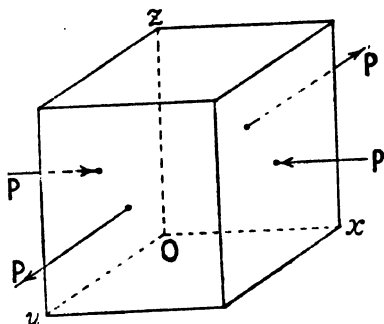
$$G = \frac{P}{\theta} = \frac{P}{2(1+\mu)P/E} = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\text{বা } E = 2G(1+\mu) \tag{9-5.2}$$

9-5.4. G, K ও μ-র সম্পর্ক। 9-5.1 ও 9-5.2 সমীকরণ হইতে E অপনীত করিলে নির্ণেয় সম্পর্ক পাওয়া যাইবে। এই দুই সম্পর্ক অনুসারে

$$3K(1-2\mu) = 2G(1+\mu)$$

$$\text{বা } \mu = \frac{3K-2G}{6K+2G} \tag{9-5.3}$$

G-র তুলনায় K অনেক বড় হইলে $\mu \to \frac{1}{2}$ হয়। K-র তুলনায় G অনেক বড় হইলে $\mu \to -1$ হয়। অতএব μ-র মান $\frac{1}{2}$ হইতে -1-এর মধ্যে থাকিতে হইবে। অধিকাংশ পদার্থে μ-র মান 0.2 হইতে 0.4-এর মধ্যে।

9.13 চিত্র

9-5.1 ও 9-5.2 সমীকরণ হইতে μ অপনীত করিলে পাওয়া যায়

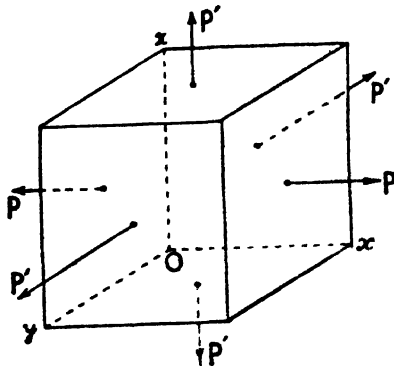
$$\frac{9}{E} = \frac{1}{K} + \frac{3}{G} \text{ বা } E = \frac{9GK}{3K+G} \qquad (9\text{-}5.4)$$

উপরের সমীকরণগুলি হইতে দেখা যায় যে E, G, K ও μ এই রাশি চারটি 9-5.1 ও 9-5.2 সমীকরণ দুটি দিয়া সম্পর্কিত। মনে রাখিতে হইবে 9-5.3 ও 9-5.4 নূতন কোন সমীকরণ নয়। উহারা আগের সমীকরণ দুইটি হইতেই লব্ধ। অতএব রাশি চারটির যে কোন দুটির মান জানা থাকিলেই অন্য দুটির মান নির্ণয় করা যায়। অর্থাৎ সমসত্ত্ব, সমদৈশিক কঠিন পদার্থের স্থিতিস্থাপকতা মাত্র দুটি নিরপেক্ষ রাশি দিয়া নির্ণীত হয়।

Cauchy সমসত্ত্ব, সমদৈশিক পদার্থের স্থিতিস্থাপকতার তাত্ত্বিক বিচার হইতে সিদ্ধান্ত করেন পোয়াসঁর অনুপাতের মান সর্বদাই 0.25 হইবে। এই সিদ্ধান্ত সম্পূর্ণ সত্য নয়। পরীক্ষার সহিত ইহা মোটামুটি মেলে। Cauchy-র সিদ্ধান্ত সত্য ধরিলে কঠিন পদার্থে মাত্র একটি নিরপেক্ষ স্থিতিস্থাপকতার গুণাংক থাকিবে। 9-5.1 ও 9-5.2 হইতে তখন আমরা পাই $K = 2E/3$ ও $G = 2E/5$।

9-5.5. অক্ষীয় গুণাংক (Axial modulus)। এখানে আমরা নূতন একটি স্থিতিস্থাপক গুণাংকের অবতারণা করিয়া অন্য গুণাংকগুলির সহিত ইহার সম্পর্ক বাহির করিব। নূতন এই গুণাংকটির নাম 'অক্ষীয় গুণাংক' (Axial modulus) বা 'দৈর্ঘ্যীয় স্থিতিস্থাপকতা' (Elongational elasticity)। ভূকম্পে যে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের (longitudinal waves) সৃষ্টি হয় তাহার বেগ এই গুণাংক দিয়া নির্ণীত হয়। ভূমিতে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ প্রবাহকালে তরঙ্গগতির রেখায় ভূস্তরের প্রসারণ ও সংকোচন হয়। কিন্তু পৃথিবীর বিরাট আকারের জন্য এই প্রসারণ বা সংকোচনের অভিলম্বে কোন দৈর্ঘ্য পরিবর্তন ঘটিতে পারে না। ইয়ং গুণাংক বিচারে পীড়ন ও তবিকৃতি (9-4.1 অনুচ্ছেদ) যেভাবে ধরা হইয়াছে, এখানে সেভাবে ধরা চলিবে না কারণ এখানে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির আনুষঙ্গিক প্রস্থ হ্রাস নাই।

কোন অক্ষে টানের (বা চাপের) পীড়নের অনুপ্রস্থে অন্য পীড়ন থাকিয়া যদি অনুপ্রস্থ দৈর্ঘ্য পরিবর্তন রোধ করে, তাহা হইলে এই অবস্থায় টানের (বা চাপের) পীড়ন ও তবিকৃতির অনুপাতকে 'অক্ষীয় গুণাংক' বলে।

অক্ষীয় গুণাংক χ-এর সহিত অন্যান্য গুণাংকের সম্পর্ক পাইতে আমরা আগের মত একক বাহুর একটি ঘনক (9.14 চিত্র) লইয়া আলোচনা করিতে পারি। উহার x অক্ষে টানের পীড়ন P এবং y ও z অক্ষে টানের পীড়ন P' ধরা যাক। P'-এর মান এমন যে P ও P'-এর যৌথ ক্রিয়ায় y ও z অক্ষে কোন দৈর্ঘ্য পরিবর্তন হয় না।

9.14 চিত্র

y অক্ষে দৈর্ঘ্য পরিবর্তনে তিনটি অংশ—(১) y অক্ষে P' পীড়নের জন্য দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি P'/E, (২) z অক্ষে P' পীড়নের জন্য দৈর্ঘ্য হ্রাস $\mu P'/E$ এবং

(৩) x অক্ষে P পীড়নের জন্য দৈর্ঘ্য হ্রাস $\mu P/E$। z অক্ষে দৈর্ঘ্য পরিবর্তনও অনুরূপ। উভয় অক্ষেই মোট দৈর্ঘ্য পরিবর্তনের মান শূন্য বলিয়া

$$(1-\mu)P'/E - \mu P/E = 0 \text{ বা } \mu P = (1-\mu)P'$$

$$\text{বা } P' = \mu P/(1-\mu).$$

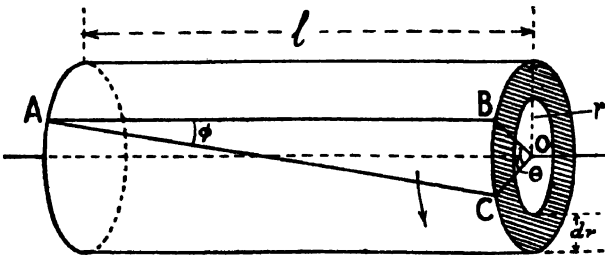
x অক্ষে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি

$$\epsilon = P/E - 2\mu P'/E = P/E - 2\mu^2 P/(1-\mu)E = \frac{P}{E} \cdot \frac{1-\mu-2\mu^2}{1-\mu}$$

$$\text{অক্ষীয় গুণাংক } \chi = \frac{Y(1-\mu)}{1-\mu-2\mu^2} = \frac{Y(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad (9\text{-}5.5)$$

9.5.1 সমীকরণ অনুসারে $E/(1-2\mu) = 3K$ এবং 9.5.3 সমীকরণ অনুসারে $1+\mu = 9K/(6K+2G)$ ও $1-\mu = (3K+4G)/(6K+2G)$। 9-5.5 সমীকরণে এই মানগুলি বসাইলে পাই

$$\chi = \frac{E}{1-2\mu} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} = 3K \cdot \frac{3K+4G}{9K} = K + \frac{4}{3}G. \quad (9\text{-}5.6)$$

9-6. তার বা বেলন মোচড়ান (Torsion of a wire or cylinder)। বেলনের এক প্রান্ত আঁট রাখিয়া উহার অক্ষের লম্বতলে অন্যপ্রান্তে দ্বন্দ্ব প্রয়োগ করিলে বেলন মোচড় খাইবে। মোচড়ে বেলনের বিভিন্ন স্তর বেলনের অক্ষ সাপেক্ষে একটু ঘুরিয়া যায়। আঁট প্রান্ত হইতে স্তর যত দূরে উহার কৌণিক বিচ্যুতি তত বেশী। প্রকৃতিতে বেলনের বিকার কৃন্তন।

9.15 চিত্র

বেলনকে সমাক্ষ অনেকগুলি পাতলা নলে বিভক্ত মনে কর। এইরূপ কোন নলের দৈর্ঘ্য l, ব্যাসার্ধ r এবং বেধ dr ধর। 9.15 চিত্রে এইরকম

একটি নল দেখান হইয়াছে। A প্রান্ত আঁটা ; B প্রান্তে দ্বন্দ্ব প্রয়োগ করা। দ্বন্দ্ব প্রয়োগ করার আগে নলের উপর যে AB রেখা অক্ষের সমান্তরাল ছিল, তাহা মোচড় খাইয়া AC অবস্থানে গিয়াছে। $\angle BAC = \phi$ কৃন্তন কোণ। $\angle BOC = \theta$ মোচড়ের কৌণিক মান। স্পষ্টতঃই $l\phi = r\theta$।

যে তলে মোচড় প্রয়োগ করা হইয়াছে সে তলে স্পার্শিক বল প্রতি বর্গক্ষেত্রে $F(=\tau)$ মনে কর। এই বলগুলি সর্বত্র নলের অক্ষের অভিলম্বে এবং একই তলের বিভিন্ন বিন্দুতে উহাদের ক্রিয়ামুখ আলাদা। কৃন্তন গুণাঙ্কের সংজ্ঞা অনুসারে $F = \tau = G \tan\phi$। ϕ খুব ছোট হইলে $\tan\phi = \phi$ লেখা যায়। এক্ষেত্রে $F = G\phi$। নলের B প্রান্তে নলের অক্ষে স্পার্শিক বলের মোট ভ্রামক

$$F.2\pi r^2 dr = G\phi.2\pi r^2 dr = G\theta.2\pi r^3 dr/l.$$

এই টর্কে নল θ রেডিয়ান মোচড় খাইয়াছে।

বেলনটিকে θ মোচড় দিতে মোট যে টর্ক C-র দরকার তাহা প্রত্যেক নলের এইরূপ টর্কগুলির যোগফল। বেলন নিরেট, এবং উহার ব্যাসার্ধ R হইলে

$$C = \int_0^R \frac{G\theta.2\pi r^3}{l}\, dr = \frac{G\pi R^4}{2l}\theta \qquad (9\text{-}6.1)$$

বেলন নিরেট না হইয়া R_1 ও R_2 ব্যাসার্ধের নল হইলে

$$C = \int_{R_1}^{R_2} \frac{G\theta.2\pi r^3}{l}\, dr = \frac{G\pi}{2l}(R_2^4 - R_1^4)\theta \qquad (9\text{-}6.2)$$

দেখা যায় বেলনের (বা তারের) মোচড় θ প্রযুক্ত টর্ক C-র সমানুপাতিক। এক রেডিয়াম মোচড়ের টর্ক c হইলে

$$c = \frac{C}{\theta} = \frac{\pi G R^4}{2l} \qquad (9\text{-}6.3)$$

প্রদত্ত তারের ক্ষেত্রে এই c রাশিটিকে ঐ তারের 'মোচড়ের স্থিরাংক' (Torsion constant) বলে। ব্যাবর্তন দোলনে (torsional oscillation) এই রাশিটি গুরুত্বপূর্ণ। কেহ কেহ ইহাকে 'মোচড়ীয় দৃঢ়তা' (Torsional rigidity)ও বলেন।

প্রতি একক দৈর্ঘ্যে ($l = 1$) মোচড়ের স্থিরাংককে, অর্থাৎ $c/l = \frac{1}{2}\pi G R^4$ রাশিটিকে 'মোচড়ের গুণাংক' (Torsional modulus) বলা হয়।

9-6.1. দ্বিতীয় উপায়ে G নির্ণয় (Statical method of determining G)। তার বা গোল ছেদের দণ্ডের পদার্থের G 9-6.1 সমীকরণের সাহায্যে বাহির করা যায়। এজন্য তার বা দণ্ডের এক প্রান্ত আঁটিয়া রাখিয়া অন্য প্রান্তে জানা টর্ক C প্রয়োগ করিয়া উহাতে মোচড় θ কতটা হয় তাহা দেখা হয়। C ও θ সমানুপাতিক এবং $C/\theta = \pi GR^4/2l$। বিভিন্ন C প্রয়োগে θ-র মান দেখিয়া C-θ গ্রাফ আঁকিলে উহা সরলরেখা হইবে এবং রেখার নতি (slope) হইতে $\pi GR^4/2l$ পাওয়া যাইবে। তার বা দণ্ডের ব্যাসার্ধ ও দৈর্ঘ্য মাপিয়া ইহা হইতে G পাওয়া যায়। (পরীক্ষা সংক্রান্ত বিশদ বর্ণনা ব্যবহারিক পদার্থ-বিজ্ঞানের বইয়ে পাওয়া যাইবে।)

9-6.2. ব্যাবর্তন দোলন (Torsional oscillation)। একগাছা তার খাড়াভাবে ঝুলাইয়া উহার মুক্ত প্রান্তে কোন দৃঢ়বস্তু এমনভাবে আটকাও যে বস্তুর ভারকেন্দ্র তারের অক্ষ বরাবর থাকে। তারসমেত বস্তুটি দোলকের মত হইল। বস্তুটিকে একপাশে টানিয়া দোলাইয়া না দিয়া, তারের অক্ষে উহাকে একটু ঘুরাইয়া ছাড়িয়া দিলে তার স্থানচ্যুত হইবে না, কিন্তু বস্তুটি একবার ডাইনে একবার বাঁয়ে ঘুরিয়া দুলিতে থাকিবে। এই দোলনকে 'ব্যাবর্তন দোলন' (torsional oscillation) বলে। ইহাতে বস্তুর কৌণিক স্থানচ্যুতি ঘটে, রৈখিক স্থানচ্যুতি ঘটে না।

কোন তারের একপ্রান্তে একটু পাক দিলে পাক খুলিয়া উহা সাম্যে ফিরিয়া আসিতে চায়। মোচড় স্থিতিস্থাপকতার সীমা অতিক্রম না করিলে ফিরাইবার জন্য তারে যে টর্কের সৃষ্টি হয় তাহা প্রযুক্ত টর্কের সমান ও বিপরীত। প্রত্যানয়ক টর্ক মোচড়ের আনুপাতিক এবং উহার মান 9-6.1 সমীকরণে দেওয়া মানের সমান। প্রতি রেডিয়ান মোচড়ে প্রত্যানায়ক টর্ক c-র মান 9-6.3 সমীকরণে দেওয়া। প্রদত্ত তারে ইহাই মোচড়ের স্থিরাংক।

ব্যাবর্তন দোলনে তারের নিচের প্রান্তে কোন মুহূর্তে মোচড় θ রেডিয়ান হইলে প্রত্যানয়ক টর্কের মান হইবে $c\theta$। লম্বন অক্ষে বস্তুটির জাড্যভ্রামক I হইলে বস্তুটির কৌণিক গতির সমীকরণ হইবে

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -c\theta \quad \text{বা} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{I}\theta = 0 \quad \text{বা} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

এই সমীকরণ হইতে দেখা যায় θ ও t-র সম্পর্ক সরল দোলীয় (3-15.3 সমীকরণ) এবং দোলনের পর্যায়কাল

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{2Il}{\pi GR^4}} \qquad 9\text{-}6.4$$

বস্তুটির I জানা থাকিলে T, l ও R মাপিয়া এই সমীকরণের সাহায্যে তারের পদার্থের G বাহির করা যায়। অন্য পক্ষে, কোন তারের c জানা থাকিলে উহার সাহায্যে কোন বস্তুর I মাপা যায়।

9-6.3. ব্যাবর্তন দোলকের সাহায্যে বস্তুর জাড্য-ভ্রামক নির্ণয়। যে অক্ষে জাড্য-ভ্রামক বাহির করিতে হইবে, বস্তুটিকে সেই অক্ষ বরাবর একগাছা সরু তারের সাহায্যে ঝুলাইয়া অল্প বিস্তারের ব্যাবর্তন দোলনে দুলিতে দিলে উহার পর্যায়কাল $T = 2\pi\sqrt{I/c}$ হইবে। ভর, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ইত্যাদি মাপিয়া কোন অক্ষে জাড্য-ভ্রামক হিসাব করিয়া পাওয়া যায় এমন কোন বস্তুর সাহায্যে তারের c বাহির করা যায়। তার হইতে পরীক্ষাধীন বস্তুটি খুলিয়া লইয়া জানা জাড্য-ভ্রামকের দ্বিতীয় বস্তুটি পূর্বোক্ত নির্দিষ্ট অক্ষ বরাবর তার হইতে ঝুলাইয়া দিলে ইহার ব্যাবর্তন দোলনের পর্যায়কাল $T_1 = 2\pi\sqrt{I_1/c}$ হইবে। I_1 জানা জাড্য-ভ্রামক। এই দুই পর্যায়কালের অনুপাত

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{I}{I_1}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ অর্থাৎ } I = I_1\left(\frac{T}{T_1}\right)^2 \qquad (9\text{-}6.5)$$

বিকল্পে, দ্বিতীয় বস্তুটিকে তাহার নির্দিষ্ট অক্ষে প্রথমটির নিচে তারের অক্ষ বরাবর ঝুলাইয়া একটি ব্যাবর্তন দোলক সৃষ্টি করিলে ইহার দোলনের পর্যায়কাল হইবে।

$$T_2 = 2\pi\left(\frac{I+I_1}{c}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{অতএব, } \left(\frac{T}{T_2}\right)^2 = \frac{I}{I+I_1}, \text{ অর্থাৎ } I = I_1\frac{T^2}{T_2^2 - T^2} \qquad (9\text{-}6.6)$$

9.7. তরল ও গ্যাসের স্থিতিস্থাপকতা (Elasticity of liquids and gases)। স্থিতিস্থাপকতা ধর্মের বিচারে আমরা কঠিন, তরল ও বায়বীয় পদার্থের প্রভেদ নিম্নোক্তভাবে করিতে পারি :

(ক) কঠিন পদার্থ আকার ও আয়তন উভয়ের বিকারই প্রতিরোধ করে। ইহার G, E, K গুণাংক তিনটিই থাকে।

(খ) তরল পদার্থ আকারের পরিবর্তন রোধ করিতে পারে না, কিন্তু উহার আয়তন বিকার প্রতিরোধের ক্ষমতা প্রায় কঠিন পদার্থের মত। তরলের G এবং E গুণাংক হয় না ; মাত্র K থাকে।

(গ) গ্যাসীয় পদার্থও আকারের পরিবর্তন রোধ করিতে পারে না, এবং ইহার আয়তন বিকার রোধের ক্ষমতা তরলের তুলনায় অনেক কম। ইহারও G বা E হয় না ; মাত্র K থাকে। K-র সহিত গ্যাসের চাপের ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধ। ইহা নীচে আলোচনা করা হইয়াছে।

তরল বা গ্যাস কেহই স্পার্শক বল প্রতিরোধ করিতে পারে না। সামান্য স্পার্শক বলের প্রয়োগেও উহাদের প্রবাহ হয়। এই কারণে তরল ও গ্যাসকে যুক্তভাবে প্রবাহী (Fluid) বলিয়া উল্লেখ করা হয়।

গ্যাসের আয়তন-বিকার গুণাংক। K-র সংজ্ঞা আমরা আগেই দিয়াছি (9-4.3 সমীকরণ দেখ)। গ্যাসকে আদর্শ গ্যাস ধরিলে উহার অবস্থা-সমীকরণ (Equation of state) হয় $PV = RT =$ স্থির রাশি। সমীকরণের উভয় দিক অবকলন করিয়া পাই

$$PdV + VdP = 0 \quad \text{বা} \quad P = -\frac{dP}{dV/V} = K \text{ (সংজ্ঞানুসারে)} \qquad (9\text{-}7.1)$$

দেখা যায় উষ্ণতা (T) স্থির থাকিলে আদর্শ গ্যাসের আয়তন বিকার গুণাংক উহার চাপের সমান।

উষ্ণতা স্থির আছে ইহা বুঝাইবার জন্য K-র বদলে অনেক সময় K_T লেখা হয়। ইহা আয়তন বিকারের 'সমোষ্ণ' গুণাংক (Isothermal bulk modulus)। ইহা দ্বারা বুঝায় আয়তন পরিবর্তনের সময় উষ্ণতার কোন পরিবর্তন হয় নাই।

দ্রুত চাপিলে গ্যাসের উষ্ণতা বাড়ে ; দ্রুত চাপ কমাইলে গ্যাস শীতল হয়। কাজেই আয়তনের পরিবর্তন দ্রুত ঘটাইলে গ্যাসের প্রথম ও শেষ উষ্ণতা সমান থাকে না। আয়তন পরিবর্তনের সময় গ্যাসে যদি কোন তাপ প্রবেশ করিতে দেওয়া না হয়, বা গ্যাস হইতে তাপ বাহিরে যাইতে না পারে, তাহা হইলে $K = K_T$ হইবে না। এরকম পরিবর্তনকে 'রুদ্ধতাপ' (adiabatic) পরিবর্তন বলে, এবং গুণাংককে বলে আয়তন বিকারের রুদ্ধতাপ গুণাংক (adiabatic bulk modulus)। K_S দ্বারা এই গুণাংক বুঝান হইবে।

রুদ্ধতাপ অবস্থায় আদর্শ গ্যাসে P ও V-র সম্পর্ক PV^{γ} = স্থিররাশি। γ দ্বারা গ্যাসের স্থির চাপে আপেক্ষিক তাপ C_p ও স্থির আয়তনে আপেক্ষিক তাপ C_v-র অনুপাত বুঝায়, অর্থাৎ $\gamma = C_p/C_v$। রুদ্ধতাপ অবস্থায় K পাইতে হইলে PV^{γ} = স্থিররাশি, এই সমীকরণ অবকলন করিয়া পাই

$$P\gamma V^{\gamma-1}dV + V^{\gamma}dP = 0 \text{ বা } \gamma PdV + VdP = 0$$

$$\text{বা} \quad \gamma P = -\frac{dP}{dV/V} = K \text{ (অর্থাৎ } K_S)$$

অতএব রুদ্ধতাপ অবস্থার আয়তন বিকার গুণাংক

$$K_s = \gamma P = \gamma K_T \qquad (9\text{-}7.2)$$

9-8. তড়িজনিত স্থিতি-শক্তি (Potential energy due to strain)। কোন বস্তুর আকার বা আয়তন বিকার ঘটাইতে অভ্যন্তরীণ বলের (পীড়নের) বিরুদ্ধে কার্য করিতে হয়। বিকার স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে থাকিলে ব্যয়িত শক্তি স্থিতিশক্তিরূপে বিকৃত পদার্থে থাকিয়া যায়। বিকার ঘটাইবার বল সরাইয়া লইলে এই শক্তি ফিরিয়া পাওয়া যায়। স্প্রিং চাপিয়া রাখিলে উহার বিকারের জন্য উহাতে স্থিতিশক্তি সঞ্চিত থাকে। চাপ ছাড়িয়া দিলে এই সঞ্চিত শক্তি নানাভাবে কার্য করিতে পারে। স্থিতিস্থাপকতার সীমা ছাড়াইলে, কৃত কার্যের কিছু অংশ তাপে পরিণত হয়। এক টুকরা তার বার বার বাঁকাইলে উহা গরম হয়।

দৈর্ঘ্য-বিকারে স্থিতিশক্তি। মনে কর l দৈর্ঘ্য, A প্রস্থচ্ছেদ ও E ইয়ং গুণাঙ্কের কোন তারকে F' বলে টানায় উহার দৈর্ঘ্য x পরিমাণ বাড়িল। তাহা হইলে

$$E = \frac{F'/A}{x/l} \text{ বা } F' = EAx/l$$

এই অবস্থা সাম্যের অবস্থা ধরিলে অভ্যন্তরীণ বলও F'। প্রযুক্ত বলকে অতি সামান্য বাড়াইয়া, x-কে সামান্য পরিমাণে আরও একটু বাড়িয়া $x + dx$ হইতে দিলে (9-16 চিত্র) অভ্যন্তরীণ বলের বিরুদ্ধে কৃতকার্য $F'dx$ ধরা যায়। অভ্যন্তরীণ বল শূন্য হইতে বাড়িয়া F হওয়ায় মনে কর দৈর্ঘ্যের

পরিবর্তন $\triangle l$ হইল। তাহা হইলে, এই পরিবর্তনের জন্য অভ্যন্তরীণ বলের বিরুদ্ধে মোট যে কার্য করিতে হইয়াছে তাহার মান

9.16 চিত্র

$$W = \int_{x=0}^{x=\triangle l} F'dx = \int_0^{\triangle l} \frac{EAx}{l}dx = \tfrac{1}{2}\, EA\, \frac{(\triangle l)^2}{l} \qquad (9\text{-}8.1)$$

F-এর মান $EA\triangle l/l$ এবং ইহাই $\triangle l$ দৈর্ঘ্য-বৃদ্ধি ঘটাইতে প্রযুক্ত বল। অতএব

$$W = \tfrac{1}{2}\, EA\, (\triangle l/l) \times \triangle l = \tfrac{1}{2} F \times \triangle l$$

$= \frac{1}{2} \times$ প্রযুক্ত বল $\times$ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি (9-8.2)

তারের আয়তন lA। W/lA তারের প্রতি একক ঘন আয়তনে স্থিতি-শক্তি। অতএব তারে সঞ্চিত স্থিতিশক্তির ঘনত্ব (Energy density)

$\frac{W}{V} = \frac{W}{lA} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\triangle l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2} \times$ ইয়ং গুণাংক $\times$ (তাতি)^2 (9-8.3)

পীড়নের মান $E \times (\triangle l/l)$ বলিয়া লেখা যায়

$\frac{W}{V} = \frac{1}{2} E\, \frac{\triangle l}{l} \cdot \frac{\triangle l}{l} = \frac{1}{2} \times$ পীড়ন $\times$ তাতি (9-8.4)

আয়তন-বিকারে স্থিতিশক্তি। দৈর্ঘ্য-বিকারের ক্ষেত্রে যেভাবে দেখান হইয়াছে, ঠিক একই রকমে দেখান যাইবে আয়তন-বিকারে

স্থিতিশক্তি $W = \frac{1}{2} P \times \triangle V = \frac{1}{2} \times$ চাপ বৃদ্ধি $\times$ আয়তন হ্রাস

$= \frac{1}{2} K \frac{(\triangle V)^2}{V}$ ও স্থিতিশক্তির ঘনত্ব $W/V = \frac{1}{2} K \left(\frac{\triangle V}{V}\right)^2$

$= \frac{1}{2} \times$ আয়তন-বিকার গুণাংক $\times$ (তাতি)^2

$\frac{1}{2} P \times \frac{\triangle V}{V} = \frac{1}{2} \times$ পীড়ন $\times$ তাতি।

এখানে P দ্বারা প্রযুক্ত চাপ বৃদ্ধি ও ΔV দ্বারা মোট আয়তন হ্রাস বুঝায়।

কৃন্তনে স্থিতিশক্তি। এ ক্ষেত্রেও যুক্তি ঠিক আগের মত এবং ফল একই প্রকার। l দৈর্ঘ্য ও A প্রস্থচ্ছেদের কোন বস্তুর বিপরীত তলে F স্পর্শক বল ক্রিয়া করিয়া θ ততি ঘটাইলে, অভ্যন্তরীণ বলের বিরুদ্ধে কৃতকার্য

$$W = \tfrac{1}{2}F \times l\theta = \tfrac{1}{2} \times \text{প্রযুক্ত টর্ক} \times \text{ততি}$$

$$\text{ও } W/V = \tfrac{1}{2}G\theta^2 = \tfrac{1}{2} \times \text{কৃন্তন গুণাংক} \times (\text{ততি})^2$$

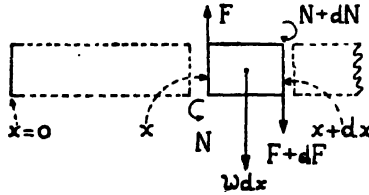
$$= \tfrac{1}{2}(F/A).\theta = \tfrac{1}{2} \times \text{পীড়ন} \times \text{ততি}\ ।$$

মোচড়ে স্থিতিশক্তি। কোন সময়ে মোচড় θ হইলে তখন অভ্যন্তরীণ টর্ক $C = \pi Gr^4\theta/2l$। মোচড় $d\theta$ বাড়িলে কৃতকার্য $Cd\theta$। θ শূন্য হইতে ϕ পর্যন্ত বাড়িলে মোট কার্য

$$W = \int_0^{\theta=\phi} C\, d\theta = \frac{\pi Gr^4}{4l}\phi^2 = \tfrac{1}{2} \times \text{প্রযুক্ত টর্ক} \times \text{মোচড়}\ ।$$

9-9 দণ্ডের বংকন বা বক্রণ (Bending of beams)। ইঞ্জিনীয়ারিং-এ নানা কাজে দণ্ড বা বীম (beam) ব্যবহার হয়। ইহাদের উপর নানাভাবে বল ক্রিয়া করে। অনেক ক্ষেত্রে বলের ক্রিয়ায় দণ্ডে যে দ্বন্দ্ব প্রযুক্ত হয় তাহার ফলে দণ্ড বাঁকে। বাঁকা দণ্ডের নমন (depression) কোথায় কতটা হইবে অধিকাংশ ক্ষেত্রেই তাহা জানা দরকার। কয়েকটি সহজ ক্ষেত্রে ইহা কিভাবে হিসাব করা যায় তাহাই বর্তমান ও পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা আলোচনা করিব। সুবিধার জন্য ধরা হইবে দণ্ড সুষম, বলমুক্ত অবস্থায় উহা অনুভূমিক এবং উহার উপর ক্রিয়াশীল বলগুলি দণ্ডের অক্ষের অভিলম্বে, অর্থাৎ খাড়া। পীড়ন সমানুপাতিকতার সীমার মধ্যে থাকে বলিয়া ধরা হইবে। গণিত প্রয়োগে দণ্ডের বাঁ প্রান্ত মূল বিন্দু ও x-অক্ষ দণ্ডের দৈর্ঘ্য বরাবর নেওয়া হইবে। y-অক্ষ নিচের দিকে পজিটিভ।

বিকৃত অবস্থায় দণ্ড সাম্যে আছে ধরা হইবে। দণ্ডকে কোন কল্পিত তল দিয়া দুই অংশে ভাগ করিলে প্রত্যেক অংশই সাম্যে আছে বলিয়া যে কোন অংশের সাম্য আলাদাভাবে বিচার করা যাইবে। আমরা সাধারণতঃ বাঁ দিকের অংশের সাম্য বিচার করিব। কল্পিত তলে এক অংশ অন্য অংশের উপর বল প্রয়োগ করে। যে কোন অংশের সাম্য বিচারে এই বল ধরিতে হইবে। বলের প্রকৃতি যতই জটিল হউক, উহাদের ছেদের তলে একটি কৃন্তনের বল ও x-y তলের অভিলম্বে অক্ষবিশিষ্ট

একটি দ্বন্দ্বের সমান বলিয়া ধরা যায়। আলোচ্য ক্ষেত্রগুলিতে এই অক্ষ ছেদে উদাসীন তলের অনুরেখ (trace) (9-9.2 অনুচ্ছেদ দেখ)। নিচের দিকে ক্রিয়াশীল বল ও দক্ষিণাবর্ত (clockwise) দ্বন্দ্ব পজিটিভ নেওয়া হইবে।

9.17 চিত্র

কল্পিত তলের বাঁ দিকের অংশের উপর ডান দিকের অংশ যে দিকে কৃন্তন বল প্রয়োগ করিবে, নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুসারে ডান দিকের অংশের উপর বাঁ দিকের অংশ তাহার বিপরীত দিকে কৃন্তন বল প্রয়োগ করিবে। দ্বন্দ্ব সম্বন্ধেও ইহা প্রযোজ্য।

9-9.1 দণ্ডের বিভিন্ন স্থানে কৃন্তন বল ও দ্বন্দ্বের সম্পর্ক। ইহা বাহির করিতে দণ্ডের বাঁ প্রান্তের মূলবিন্দু হইতে x ও $x+dx$ দূরত্বে দণ্ডের অক্ষের অভিলম্ব দুইটি তল দিয়া সীমাবদ্ধ অংশের (9.17 চিত্র) সাম্য বিচার কর। ধরা হইল এই অংশে কোন বাহ্য বল ক্রিয়া করে না। দণ্ড সুষম এবং উহার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভার w ধরা যাক। dx অংশের উপর কৃন্তন বল F ও $F+dF$ বিপরীতমুখী কারণ উহার একটি dx-এর বাঁদিকের অংশ দ্বারা ও অন্যটি ডানদিকের অংশ দ্বারা প্রযুক্ত। দ্বন্দ্ব N ও $N+dN$-ও একই কারণে বিপরীতমুখী হইবে। ডান দিকের অংশ দ্বারা বাঁদিকের অংশের উপর প্রযুক্ত বল ও দ্বন্দ্ব পজিটিভ ধরিলে dx অংশের উপর বল ও দ্বন্দ্বগুলি 9.17 চিত্রে যেমন দেখান হইয়াছে ঐরূপ হইবে।

dx-এর সাম্যের জন্য উহার উপর

মোট বল $=0$ এবং মোট টর্ক $=0$ হইতে হইবে। অতএব

$$F+dF-F+wdx=0 \quad \text{বা} \quad \frac{dF}{dx}=w \qquad (9\text{-}9.1)$$

এখানে F দ্বারা দণ্ডের x-ছেদে কৃন্তন বল বুঝায়, একথা মনে রাখিতে হইবে। দণ্ডের ছেদের ডান দিকের অংশে F উপরের দিকে ক্রিয়া করে; বাঁ দিকের অংশে করে নীচের দিকে।

dx অংশের ভার wdx উহার x প্রান্ত হইতে $\frac{1}{2}dx$ দূরত্বে ক্রিয়া করে। ইহার জন্য x-তলীয় অক্ষে ভ্রামক $\frac{1}{2}w\,(dx)^2$ পজিটিভ (দক্ষিণাবর্ত)। F বলের এইরূপ ভ্রামক 0, এবং $F+dF$ বলের ভ্রামক $(F+dF)\,dx$। শেষেরটি পজিটিভ। অতএব মোট টর্ক

$$N+dN-N+\tfrac{1}{2}w\,(dx)^2+(F+dF)dx=0$$

দ্বিতীয় ক্রমের ক্ষুদ্র রাশিগুলি, অর্থাৎ $(dx)^2$ ও $dF.dx$ উপেক্ষা করিলে পাই

$$dN+Fdx=0 \quad \text{বা} \quad \frac{dN}{dx}=-F \tag{9-9.2}$$

9.9-1 ও 9.9-2 সমীকরণ হইতে পাই

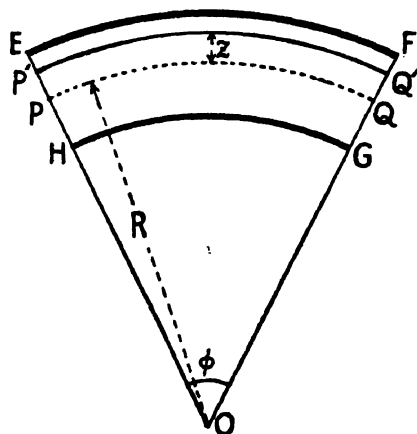
$$\frac{d^2N}{dx^2}=w \tag{9-9.3}$$

[মনে রাখা ভাল যে আমরা বল ও দ্বন্দ্ব সম্বন্ধে পজিটিভ চিহ্নের যে রীতি অবলম্বন করিয়াছি, তাহার পরিবর্তন করিলে 9-9.1 ও 9-9.2 সমীকরণে বিয়োগ চিহ্ন না থাকিতে পারে। অনেকে উপরের দিককে পজিটিভ y ধরেন। বামাবর্ত দ্বন্দ্বকেও কেহ কেহ পজিটিভ ধরেন। চিহ্ন সম্বন্ধে কোন্ লেখক কি নিয়ম মানিয়াছেন সে সম্বন্ধে পাঠককে অবহিত হইতে হইবে।]

বীমের নমন বিচারে 9-9.2 ও 9-9.3 সমীকরণ দুটি মৌলিক। এক্ষেত্রে প্রযোজ্য আরও একটি মৌলিক সূত্র আছে: ইহা নিচে আলোচনা করা হইল।

9-9.2 বংকন বা বক্রণের অভ্যন্তরীণ টর্ক (Internal bending moment)। ইহা কিভাবে আসে তাহা জানিতে এবং ইহার মান হিসাব করিতে আমরা বীমকে উহার অক্ষের সমান্তরালে অনেকগুলি সরু সরু তাঁত (filament)-এ বিভক্ত মনে করিব। বীম বাঁকিলে উপরের দিকের তাঁতগুলি লম্বায় বাড়ে, নিচেরগুলি খাট হয়। মাঝামাঝি কোন এক তলে তাঁতের দৈর্ঘ্য বদলায় না। এই তলকে 'উদাসীন তল' (Neutral plane) বলে।

বীমের অক্ষের অভিলম্ব দুই ছেদ দ্বারা সীমাবদ্ধ উহার খুব ছোট একটি অংশ লও। ইহা লম্বায় PQ এবং ইহার খাড়াই EH (9.18 চিত্র) বীমের খাড়াইয়ের সমান। বীম বাঁকায় এই অংশও একটু বাঁকিবে। চিত্রে এই বাঁকান অংশ অনেক বড় করিয়া দেখান হইয়াছে। PQ এই অংশে উদাসীন

তলের অবস্থান নির্দেশ করে। FG-তে প্রস্থচ্ছেদ অংশ 9.19 চিত্রে আলাদা করিয়া দেখান হইয়াছে। $FGLK$ এই ছেদ, QS উদাসীন তলের অবস্থান বা অনুরেখ (trace)।

8.18 চিত্র

[চিত্রে ϕ-এর বদলে $d\phi$ পড়িতে হইবে]

বাঁকার জন্য PQ রেখা যে বৃত্তচাপে পরিণত হইয়াছে তাহার কেন্দ্র মনে কর O এবং ব্যাসার্ধ R। PQ হইতে z দূরত্বে অবস্থিত কোন তাঁতের EF অংশে দৈর্ঘ্য হইবে $(R+z)\,d\phi$। অতএব তাঁতের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $e=(R+z)d\phi-Rd\phi=zd\phi$ এবং উহার টানের তাত $\epsilon=e/PQ=e/Rd\phi$ $=z/R$।

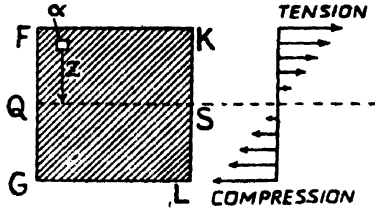
ঐ তাঁতের প্রস্থচ্ছেদ α হইলে উহাতে টান $f=\alpha Ez/R$। এখানে E বীমের পদার্থের ইয়ং গুণাংক। উদাসীন তলে এই বলের ভ্রামক $fz=\alpha Ez^2/R$। সবগুলি তাঁতের টানের ভ্রামক

$$\Sigma fz=E\Sigma\alpha z^2/R\text{।}$$

$\Sigma\alpha z^2$ জাড্যভ্রামকের মত রাশি, কিন্তু ইহাতে ভর m-এর বদলে ক্ষেত্রফল α আছে। বীমের প্রস্থচ্ছেদের সমান একখানা পাতলা পাত লইয়া উদাসীন অক্ষে (9.19 চিত্রের SQ) উহার জাড্য ভ্রামক বাহির করিয়া পাতের মোট ভর M-এর বদলে উহার ক্ষেত্রফল A লইলে $\Sigma\alpha z^2$ পাওয়া

যায়। $\Sigma az^2 = Ak^2$ লেখা যায়; এখানে k ঐ পাতের ঐ অক্ষে ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ (radius of gyration)। অতএব

বক্রন বা বংকনের অভ্যন্তরীণ টর্ক $N = \frac{E}{R}\Sigma az^2 = \frac{EAk^2}{R} = \frac{EI}{R}$

(9-9.4)

8.19 চিত্র

$EAk^2 = EI$ রাশিটিকে আলোচ্য পদার্থের বক্রন বা নমন-দৃঢ়তা (Flexural rigidity) বলে।

FG ছেদে তাঁতগুলির উপর টান ও চাপ কি করিয়া টর্কের সৃষ্টি করে তাহা 9.19 চিত্রের ডান দিকের অংশ হইতে বোঝা যাইবে। বীম নিচের দিকে বাঁকিলে ছেদের বাঁ দিকের অংশের উপর এই টর্ক দক্ষিণাবর্ত। FG-র ডাইনের অংশ FG ছেদে FG-র বাঁ দিকের অংশের উপর এই টর্ক প্রয়োগ করে। EH ছেদে বলগুলি FG ছেদের বলগুলির বিপরীতমুখী। এই বলগুলির টর্ক বামাবর্ত। EH-এর বাঁয়ের অংশ ডাইনের অংশের উপর এই টর্ক প্রয়োগ করে।

টর্কের অক্ষ ছেদে উদাসীন তলের অনুরেখ বরাবর।

অবকলন গণিত অনুসারে কোন রেখার বক্রতা

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y/dx^2}{\{1 + (dy/dx)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

আলোচ্য স্থানে $dy/dx \ll 1$ হইলে লেখা যায়

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

বীমের নতিকোণ θ সাধারণতঃ খুব ছোট হয়। অতএব $dy/dx = \tan\theta$ বলিয়া $dy/dx < 1$ ধরা চলে। সুতরাং 9-9.4 সমীকরণ এক্ষেত্রে হইয়া দাঁড়ায়

$$N = \frac{EAk^2}{R} = EAk^2 \frac{d^2y}{dx^2} \equiv EID^2y \tag{9-9.5}$$

9-9.3 ও 9-9.2 সমীকরণ দুটির বদলে এখন লেখা যায়

$$EAk^2 \frac{d^4y}{dx^4} \equiv EID^4y = w \tag{9-9.6}$$

$$\text{এবং}\quad EAk^2 \frac{d^3y}{dx^3} \equiv EID^3y = -F. \tag{9-9.7}$$

লেখার সুবিধার জন্য আমরা $Ak^2 \equiv I$ এবং $d/dx \equiv D$, $d^2/dx^2 \equiv D^2$, $d^3/dx^3 \equiv D^3$ ও $d^4/dx^4 \equiv D^4$ লইব।

অল্প নতির, সুষম, অনুভূমিক বীম সংক্রান্ত সকল প্রশ্নের মীমাংসা 9-9.5 হইতে 9-9.7 সমীকরণের সাহায্যে করা যায়। 9-10 অনুচ্ছেদে ইহাদের প্রয়োগ দেখান হইয়াছে।

9-9.3. বাঁকান বীমের স্থিতিশক্তি। বাঁকান বীমের স্বল্পাংশ dx-এর (9-18 চিত্রের PQ) কোন তাঁত $P'Q'$ কল্পনা কর। উহা উদাসীন তল হইতে z দূরত্বে অবস্থিত, এবং উহার প্রস্থচ্ছেদ α। উহার দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $e = zd\phi = z(dx/R)$ ঘটাইতে কার্য হইবে

$$\tfrac{1}{2}E\alpha e^2/dx \qquad \text{(9-8.1 সমীকরণ দেখ)}$$
$$= \tfrac{1}{2}E\alpha z^2 dx/R^2.$$

dx অংশের সব কয়টি তাঁতের জন্য কার্য হইবে

$$dW = \tfrac{1}{2}E\Sigma\alpha z^2 \cdot \frac{dx}{R^2} = \tfrac{1}{2}EAk^2 \frac{dx}{R^2}$$

ইহাই ঐ অংশের স্থিতিশক্তিরূপে সঞ্চিত থাকে। dx অংশে বীম বাঁকাইবার দ্বন্দ্ব $N = EAk^2/R$। অতএব dx অংশের স্থিতিশক্তি

$$dV = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EAk^2}dx$$

এবং সম্পূর্ণ বীমের স্থিতিশক্তি

$$V = \frac{1}{2EAk^2}\int_{x=0}^{x=l} N^2 dx$$

x-এর সহিত N-এর সম্পর্ক জানা থাকিলে সমাকলনে V পাওয়া যায়। (9-10.1 অনুচ্ছেদের শেষের প্রশ্নটি দেখ।)

9.20 চিত্র

9-9.4. অনুপ্রস্থ বক্রণ—অসদৃশ বক্রতা (Transverse bending : Anticlastic curvature)। কোন বীম যখন লম্বালম্বি বাঁকান হয় তখন উহা সাধারণতঃ আড়াআড়িও একটু বাঁকে। আড়াআড়ি বাঁকন বিপরীত দিকে হয়। বীমের তাঁতগুলি লম্বায় বাড়ার সময় চওড়ায় কমিতে বা লম্বায় কমার সময় চওড়ায় বাড়িতে কোন বাধা না থাকিলেই এরূপ হইবে। বীম নিচের দিকে বাঁকিলে উহার উদাসীন তলের উপরের তাঁত-গুলি লম্বায় বাড়ে বলিয়া চওড়ায় খাট হইবে এবং নিচের তাঁতগুলি চওড়ায় বাড়িবে।

9.20 চিত্রের $EFGH$ কোন বাঁকান বীমের অল্প একটু অংশের এক পাশ। PQ হইল উদাসীন তলের অনুরেখ (trace)। EH বীমের খাড়াই এবং EF আলোচ্য অংশের উপরের দিক। বীম নীচের দিকে বাঁকান ধরা হইয়াছে।

FG-তে বীমের ছেদ $FGJK$, এবং QS উদাসীন তলের অনুরেখ। PQ-র বক্রতা কেন্দ্র O_1 এবং বক্রতা ব্যাসার্ধ R_1। QS-এর বক্রতা ব্যাসার্ধ R_2 বাহির করিতে হইবে।

বীমের খাড়াই h হইলে $EP = \frac{1}{2}h$ এবং $\dfrac{EF}{PQ} = \dfrac{R_1 + \frac{1}{2}h}{R_1}$।

EF-এ টানের তথি $= \dfrac{EF - PQ}{PQ} = \dfrac{h}{2R_1}$।

অনুরূপে $\dfrac{FK}{QS} = \dfrac{R_2 - \frac{1}{2}h}{R_2}$ এবং FK-তে তথি $= \dfrac{h}{2R_2}$।

পোয়াসঁ অনুপাত μ-র সংজ্ঞা অনুসারে

$$\mu = \frac{\text{প্রস্থের তথি}}{\text{দৈর্ঘ্যের তথি}} = \frac{h/2\,R_2}{h/2\,R_1} = \frac{R_1}{R_2} \qquad (9\text{-}9.8)$$

আয়ত ছেদের বীমের পদার্থের পোয়াসঁ অনুপাত উপরের সম্পর্কের সাহায্যে বাহির করা যায় (9-12.3 অনুচ্ছেদ দেখ)।

9·10. অনুভূমিক বীমের নমন গণনা (Calculation of depression of horizontal beams)। 9-9.6 সমীকরণ চারবার সমাকলন করিলে x অবস্থানে বীমের নয়ন y পাওয়া যাইবে। এইভাবে x ও y-তে যে সম্পর্ক পাওয়া যায় উহাই বাঁকান অবস্থায় বীমের আকারের সমীকরণ। চারবার সমাকলনে চারটি সমাকলন স্থিরাংক (constant of integration) আসে। ইহাদের মান বীমের দুই প্রান্তের বা অন্য কোন স্থানের অবস্থা হইতে পাওয়া যায়।

আমরা চারটি বিভিন্ন ক্ষেত্রে বীমের নমন গণনা করিব। এখানে মনে রাখা ভাল যে 9-9.6 সমীকরণ বীমের বাহ্য বলমুক্ত যে কোন অংশে প্রযোজ্য। কোন কোন ক্ষেত্রে বীমের এক অংশের সাম্য বিবেচনা করিয়া কৃন্তন বল F বা বাঁকাইবার টর্ক N পাওয়া যাইতে পারে*। N পাইলে 9-9.5 সমীকরণ প্রয়োগ করা যায়, এবং সমাকলন মাত্র দুবার করিতে হয়। N না পাইয়া

* আলোচিত ক্ষেত্রগুলিতে F এবং N x-এর সঙ্গে কিভাবে বদলায় তাহার সমীকরণ এবং সংশ্লিষ্ট গ্রাফের প্রকৃতি লক্ষ করিয়া দেখিও।

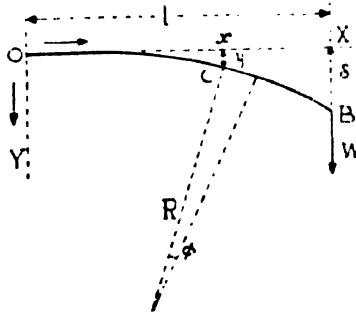
F পাইলে 9-9.7 সমীকরণ প্রয়োগ করা যায়, এবং y পাইতে তিনবার সমাকলন দরকার হয়। এ সকল ক্ষেত্রে 9-9.6 হইতে আরম্ভ করা দরকার হয় না, কিন্তু করিতে কোন বাধা নাই।

9-10.1. ক্যান্টিলিভার: এক প্রান্ত আবদ্ধ, অন্য প্রান্তে W ভার। 9.21 চিত্রে OB বীমের দৈর্ঘ্য l x অক্ষ উহার অনুভূমিক অবস্থার অক্ষ এবং বাঁ প্রান্ত O মূলবিন্দু। y অক্ষ নিচের দিকে পজিটিভ। বল ও দ্বন্দ্বের চিহ্ন সম্বন্ধে 9-9 অনুচ্ছেদে উল্লিখিত নিয়ম মানা হইবে। বীম সম্বন্ধে সেখানে যাহা বলা হইয়াছে আমাদের আলোচ্য সবগুলি ক্ষেত্রেই তাহা প্রযোজ্য।

O বিন্দুতে বীমের উপর উহার ধারকের প্রতিক্রিয়া R এবং ধারক দ্বারা প্রযুক্ত দ্বন্দ্ব Z ধরা যাক। বীমের ভার wl উহার মধ্য বিন্দুতে ক্রিয়া করে। সম্পূর্ণ বীমের সাম্য বিচারে পাই

মোট বল $= R + wl + W = 0$ বা $R = -W - wl$,

এবং মোট টর্ক $= Z + \frac{1}{2}wl^2 + Wl = 0$ বা $Z = -Wl - \frac{1}{2}wl^2$।

R ঊর্ধ্বমুখী এবং Z, বামাবর্তী।

9.21 চিত্র

O হইতে x দূরত্বে অবস্থিত C বিন্দুতে খাড়া ছেদ লইয়া OC অংশের সাম্য বিচার কর। C-তে কৃন্তন বল F ধর। OC-র ভার wx O হইতে $\frac{1}{2}x$ দূরত্বে ক্রিয়া করে। অতএব সাম্যের জন্য

$$R + wx + F = 0 \quad \text{বা} \quad -W - wl + wx + F = 0$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad F = W + w(l - x) \qquad (9\text{-}10.1)$$

C তলে CB অংশ দ্বারা প্রযুক্ত টর্ক N হইলে, OC-র উপর ক্রিয়াশীল

মোট টর্কের মান শূন্য হইবে বলিয়া, বলগুলির টর্ক মূল বিন্দু সাপেক্ষে লইলে,

$$Z+N+\frac{1}{2}wx^2+Fx=0$$

বা $$-Wl-\frac{1}{2}wl^2+N+\frac{1}{2}wx^2+Wx+w(l-x)x=0$$

অর্থাৎ $$N=W(l-x)+\frac{1}{2}w(l-x)^2 \qquad (9\text{-}10.2)$$

N পাওয়া গিয়াছে বলিয়া আমরা 9-9.5 সমীকরণ প্রয়োগ করিতে পারি।

$$\therefore \quad EID^2y=W(l-x)+\frac{1}{2}w(l-x)^2$$

একবার সমাকলনে পাই

$$EIDy=W(lx-\tfrac{1}{2}x^2)+\tfrac{1}{2}wl^2x-\tfrac{1}{2}wlx^2+\tfrac{1}{6}wx^3+A_1$$

বীমটি O বিন্দুতে অনুভূমে আবদ্ধ। ইহার অর্থ ঐ বিন্দুতে y ও dy/dx-এর মান শূন্য। $x=0$-তে $dy/dx=0$ হওয়ায় দেখা যায় $A_1=0$।

দ্বিতীয়বার সমাকলনে পাই

$$EIy=W(\tfrac{1}{2}lx^2-\tfrac{1}{6}x^3)+\tfrac{1}{4}wl^2x^2-\tfrac{1}{6}wlx^3+\tfrac{1}{24}wx^4+A_2 \qquad (9\text{-}10.3)$$

$x=0$-তে $y=0$ হওয়ায় $A_2=0$ হইবে।

বীমের ডান প্রান্তে $(x=l)$ নমন সবচেয়ে বেশী। এই নমন δ ধরিলে

$$EI\delta=W\left(\frac{l^3}{2}-\frac{l^3}{6}\right)+\tfrac{1}{4}wl^4-\tfrac{1}{6}wl^4+\tfrac{1}{24}wl^4$$

$$=W\frac{l^3}{3}+\tfrac{1}{8}wl^4=l^3\left(\frac{W}{3}+\frac{W_0}{8}\right)$$

এখানে বীমের ভার $wl=W_0$ লেখা হইয়াছে। অতএব

$$\delta=\frac{l^3(W+\frac{3}{8}W_0)}{3EI}=\frac{l^3(W+\frac{3}{8}W_0)}{3EAk^2} \qquad (9\text{-}10.4)$$

অন্য স্থানে (O হইতে x দূরত্বে) নমন y 9-10.3 সমীকরণ হইতে পাইব; $A_2=0$।

আয়ত ছেদের বীমের খাড়াই h ও চওড়াই b হইলে, ছেদের উদাসীন রেখা চওড়ার দিকে নিচ হইতে $\frac{1}{2}h$ উচ্চতায় থাকিবে। এই অক্ষে ছেদের জ্যামিতিক জাড্য ভ্রামক $I\equiv Ak^2=bh(\frac{1}{12}h^2)=\frac{1}{12}bh^3$। অতএব এক্ষেত্রে

$$\delta=\frac{4l^3(W+\frac{3}{8}W_0)}{Ebh^3}$$

দেখা যায়, ক্যাণ্টিলিভারের মুক্ত প্রান্তের নমন উহার দৈর্ঘ্য l-এর ঘনমানের সমানুপাতিক ও খাড়াই h-এর ঘনমানের বিষমানুপাতিক। বীমের খাড়াই চওড়ার তুলনায় বেশী হইলে উহা কম দাবিবে। $1'' \times 2''$ বীমের $2''$-র দিক খাড়া রাখিলে প্রান্তের নমন $\frac{1}{4}$ হইবে।

প্রশ্ন। একই পদার্থ এবং 1 m দৈর্ঘ্যের দুটি বীমের একটি 5 cm × 5 cm বর্গাকার ছেদের ও অন্যটি 5 cm ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার ছেদের। ক্যাণ্টিলিভারের মত উহাদের ব্যবহার করা হইল। প্রান্তীয় ভার 100 kg। পদার্থের ঘনত্ব 8 g/cm^3। বীম দুটির প্রান্তীয় নমন তুলনা কর। [উত্তর : δ (বর্গচ্ছেদ) : δ (বৃত্তচ্ছেদ) = 2·73 : 1]

টীকা। আলোচ্য ক্ষেত্রে বীমের CB অংশের সাম্য বিবেচনা করিলে 9-10.2 সমীকরণ আরও সহজে পাওয়া যাইত। C-ছেদে W ভারের ভ্রামক $W(l-x)$ এবং CB অংশের ভারের ভ্রামক $w(l-x) \times \frac{1}{2}(l-x) = \frac{1}{2}w(l-x)^2$। OC অংশ CB অংশের উপর ইহাদের যোগফলের সমান ও বিপরীত দ্বন্দ্ব প্রয়োগ করিয়া CB-কে সাম্যে রাখে। CB অংশ OC অংশের উপর উহার সমান ও বিপরীত দ্বন্দ্ব প্রয়োগ করে বলিয়া শেষোক্ত দ্বন্দ্ব $N = W(l-x) + \frac{1}{2}w(l-x)^2$। ইহাই 9-10.2 সমীকরণ।

9-9.6. সমীকরণ $(EID^4y = W)$ লইয়াও কাজ করা যাইত। প্রথম সমাকলনের স্থিরাংক A_1 পাইতে $x = l$-এ বল $-W$, এবং দ্বিতীয় সমাকলনের স্থিরাংক A_2 পাইতে মুক্ত প্রান্তে $(x = l)$ কোন দ্বন্দ্ব নাই এই সম্পর্ক দুটি প্রয়োগ করা যায়। শিক্ষার্থী ইহা নিজে করিয়া দেখিতে পারেন। পাদটীকায়* আভাস দেওয়া হইল।

---

* $EID^4y = w$। প্রথম সমাকলনে $EID^3y = wx + A_1$। $x = l$ হইলে $EID^3y = -F = -W$ অতএব $-W = wl + A_1$ বা $A_1 = -W - wl$। দ্বিতীয় সমাকলনে পাই $EID^2y = \frac{1}{2}wx^2 - Wx - wlx + A_2$। $x = l$ হইলে $EID^2y = N = 0$। অতএব $A_2 = Wl + wl^2 - \frac{1}{2}wl^2 = Wl + \frac{1}{2}wl^2$। তৃতীয় সমাকলনে পাই $EIDy = \frac{1}{6}wx^3 - \frac{1}{2}Wx^2 - \frac{1}{2}wlx^2 + Wlx + \frac{1}{2}wl^2x + A_3$. $Dy = dy/dx$ অর্থে x বিন্দুতে বীমের নতি। $x = 0$-তে $Dy = 0$ কারণ ঐ স্থানে বীম অনুভূমিক। অতএব $A_3 = 0$। চতুর্থ সমাকলনে পাই

$$EIy = \frac{1}{24}wx^4 + W(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3) + \tfrac{1}{4}wl^2x^2 - \tfrac{1}{6}wlx^3 + A_4$$

$x = 0$-তে $y = 0$ হওয়ায় $A_4 = 0$। অতএব উপরের সমীকরণ আমাদের নির্ণেয় $x - y$ সমীকরণ দেয় (9-10.3 সমীকরণ তুলনা কর)।

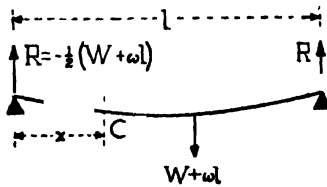
বাহ্য ভার W-র তুলনায় বীমের ভার W_0 উপেক্ষণীয় হইলে প্রথম হইতেই $w=0$ লইয়া কাজ করা চলে। বাহ্য ভার না থাকিলে কেবল নিজের ভারে বীম বাঁকা হইলে প্রথম হইতে $W=0$ লওয়া চলে।

প্রশ্ন। ক্যান্টিলিভারের প্রান্তে W ভার, ভারের নমন δ এবং W-র তুলনায় ক্যান্টিলিভারের ভার উপেক্ষণীয় হইলে প্রমাণ কর যে ক্যান্টিলিভারের বিকার-জনিত স্থিতিশক্তি $\frac{1}{2} W\delta$। [সংকেত : 9-9.3 অনুচ্ছেদ দেখ।]

কৃন্তনের জন্যও বীমের নমন হয়। ইহা 9-10.7 অনুচ্ছেদে আলোচিত হইয়াছে।

9-10.2. বীমের দুই প্রান্ত ধারকের উপর রাখা ও মাঝখানে ভার। 9.22 চিত্রে ব্যবস্থা দেখান। দুই প্রান্তই মুক্ত। প্রান্ত মুক্ত থাকিলে মুক্ত প্রান্তে কোন বাঁকাইবার টর্ক ক্রিয়া করে না। গত অনুচ্ছেদের টীকায় আমরা ইহা দেখিতে পাইয়াছি।

বীমের দৈর্ঘ্য l ও রৈখিক ভার w। সম্পূর্ণ বীমের সাম্য বিচারে প্রত্যেক প্রান্তে বীমের উপর ধারকের প্রতিক্রিয়া R পাওয়া যায়।

$$R=-\tfrac{1}{2}(W+wl)$$

9.22 চিত্র

O হইতে x দূরত্বে $(x<\frac{1}{2}l)$ C বিন্দু পর্যন্ত বীমের OC অংশের সাম্য, C-তে কৃন্তন বল F ধরিয়া পাই

$$R+F+wx=0 \text{ বা } -\tfrac{1}{2}(W+wl)+F+wx=0$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad F=\tfrac{1}{2}W+w(\tfrac{1}{2}l-x) \qquad (9\text{-}10.5)$$

OC-র উপর C-তে অভ্যন্তরীণ টর্ক N হইলে, O বিন্দুতে OC-র উপর ক্রিয়াশীল বলগুলির ভ্রামক লইয়া, OC-র উপর মোট টর্ক 0 হইবে বলিয়া পাই

$$N+\tfrac{1}{2}wx^2+Fx=0 \text{ বা } N+\tfrac{1}{2}wx^2+\{\tfrac{1}{2}W+w(\tfrac{1}{2}l-x)\}x=0$$

$$N=-\tfrac{1}{2}Wx-\tfrac{1}{2}wlx+\tfrac{1}{2}wx^2 \qquad (9\text{-}10.6)$$

$$\therefore \quad EID^2y = -\tfrac{1}{2}Wx - \tfrac{1}{2}wlx + \tfrac{1}{2}wx^2$$

বা $$EIDy = -\tfrac{1}{4}Wx^2 - \tfrac{1}{2}w\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + A_1 \qquad (A)$$

এবং $$EIy = -\frac{Wx^3}{12} - \frac{w}{2}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + A_1x + A_2 \qquad (B)$$

$x=0$-তে $y=0$ হওয়ায় (B) সমীকরণ হইতে দেখা যায় $A_2=0$। বিকৃত দণ্ডের প্রতিসাম্য বিচারে দেখা যায় $x=l/2$-তে $Dy=0$। অতএব (A) সমীকরণ হইতে পাই

$$A_1 - \frac{Wl^2}{16} - \frac{w}{2}\left(\frac{l^3}{8} - \frac{l^3}{24}\right) = 0$$

বা $$A_1 = \frac{Wl^2}{16} + \frac{wl^3}{24}$$

$$\therefore EIy = -\frac{Wx^3}{12} - \frac{w}{2}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + \left(\frac{Wl^2}{16} + \frac{wl^3}{24}\right)x$$

$$= W\left(\frac{l^2x}{16} - \frac{x^3}{12}\right) + w\left(\frac{l^3x}{24} - \frac{lx^3}{12} + \frac{x^4}{24}\right) \qquad (9\text{-}10.7)$$

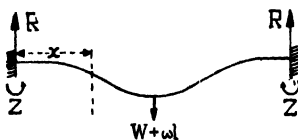
ইহার সাহায্যে বীমের যে কোন অর্ধেকে প্রান্ত হইতে x দূরত্বে নমন y পাওয়া যায়। দুই অর্ধেক মধ্যতল সাপেক্ষে প্রতিসম। মধ্য বিন্দুতে নমন সবচেয়ে বেশী। উপরের সমীকরণে $x=l/2$ বসাইলে মধ্য বিন্দুতে নমন δ পাওয়া যায়।

$$EI\delta = W\left(\frac{l^3}{32} - \frac{l^3}{96}\right) + w\left(\frac{l^4}{48} - \frac{l^4}{96} + \frac{l^4}{384}\right)$$

$$= W\frac{l^3}{48} + W_0\frac{5l^3}{384}$$

বা $$\delta = \frac{l^3}{48EI}\left(W + \tfrac{5}{8}W_0\right) \qquad (9\text{-}10.8)$$

এই সমীকরণের সাহায্যে জ্যামিতিক ছেদ বিশিষ্ট (বর্গাকার, আয়ত বা গোল ছেদের) সুষম দণ্ডের E মাপা যায়। δ মাপা হয় মাইক্রোস্কোপের সাহায্যে। W_0 সাধারণত W-র তুলনায় উপেক্ষণীয় হয় না। সেজন্য বিভিন্ন W-তে δ মাপিয়া $(W+\frac{5}{8}W_0)-\delta$ গ্রাফ আঁকিলে উহার নতি হইতে $l^3/48EI$ পাওয়া যায়। l মাপনের ত্রুটি ফলে তিনগুণ হইয়া দেখা দেয়। কাজেই l-এর আপেক্ষিক ত্রুটি যথাসম্ভব কমান দরকার।

9-10.3. বীমের উভয় প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ ; ভার W মাঝখানে। বীমের উভয় প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ থাকিলে উহাকে 'আবদ্ধ বীম' (Encastré beam বা Built-in beam) বলা হয়। এইরূপ বীমের (9.23 চিত্র) উভয় প্রান্তে বীমের স্পর্শক অনুভূমিক থাকে। প্রতিসাম্যের জন্য মধ্য বিন্দুতেও স্পর্শক অনুভূমিক হয়। অতএব এক্ষেত্রে $x=0$ এবং $x=\frac{1}{2}l$ হইলে উভয় স্থানে $Dy=0$।

9.23 চিত্র

আগের মত বীমের দৈর্ঘ্য l এবং রৈখিক ভার w লই। উভয় প্রান্তে বীমের উপর প্রতিক্রিয়ার বল R একই, এবং প্রতিক্রিয়ার টর্ক Z সমান ও বিপরীতমুখী। সম্পূর্ণ বীমের সাম্য বিচারে R পাওয়া যাইবে, কিন্তু Z পাওয়া যাইবে না। অতএব এখানে N সোজাসুজি পাওয়া যাইবে না, কিন্তু F পাওয়া যাইবে। দেখা যায়

$$2R+W+wl=0 \text{ বা } R=-\tfrac{1}{2}(W+wl)$$

বীমের x $(0<x<l/2)$ ছেদে বাঁদিকের অংশের উপর কৃন্তন বল F হইলে

$$F+R+wx=0$$

$$\text{বা } F=-R-wx=\tfrac{1}{2}W+w(\tfrac{1}{2}l-x) \qquad (9\text{-}10.9)$$

F পাওয়া গিয়াছে বলিয়া আমরা 9-9 7 সমীকরণ হইতে সমাকলন আরম্ভ করিতে পারি। অতএব

$$EID^3y=-F=-\frac{W}{2}-w\left(\frac{l}{2}-x\right)$$

$$EID^2y=-\frac{Wx}{2}-w\left(\frac{lx}{2}-\frac{x^2}{2}\right)+A_1 \qquad (A)$$

$$EIDy=-\frac{Wx^2}{4}-w\left(\frac{lx^2}{4}-\frac{x^3}{6}\right)+A_1x+A_2 \qquad (B)$$

$$EIy=-\frac{Wx^3}{12}-w\left(\frac{lx^3}{12}-\frac{x^4}{24}\right)+\tfrac{1}{2}A_1x^2$$
$$+A_2x+A_3 \qquad (C)$$

$x=0$-তে এবং $x=\frac{1}{2}l$-এ $Dy=0$ বলিয়া (B) সমীকরণ হইতে পাই

$$A_2=0$$

এবং $-\dfrac{Wl^2}{16}-w\left(\dfrac{l^3}{16}-\dfrac{l^3}{48}\right)+A_1\dfrac{l}{2}=0$

বা $A_1=\dfrac{Wl}{8}+\dfrac{wl^2}{12}$

$x=0$-তে $y=0$ বলিয়া (C) সমীকরণ হইতে পাই $A_3=0$। অতএব (C) হইয়া দাঁড়ায়

$$EIy=-\frac{Wx^3}{12}-w\left(\frac{lx^3}{12}-\frac{x^4}{24}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{Wl}{8}+\frac{wl^2}{12}\right)x^2$$

$$=W\left(\frac{lx^2}{16}-\frac{x^3}{12}\right)+w\left(\frac{x^4}{24}-\frac{lx^3}{12}+\frac{l^2x^2}{24}\right) \qquad (9\text{-}10.10)$$

মধ্য বিন্দুতে নমন δ হইলে এই সমীকরণে $x=l/2$ বসাইয়া পাই

$$EI\delta=W\left[\frac{l^3}{64}-\frac{l^3}{96}\right]+wl^4\left[\frac{1}{24\times16}-\frac{1}{96}+\frac{1}{96}\right]$$

$$=\frac{Wl^3}{192}+\frac{W_0l^3}{384}=\frac{l^3}{192}\left[W+\frac{W_0}{2}\right]$$

$$\text{বা}\quad \delta=\frac{l^3}{192EI}\left(W+\tfrac{1}{2}W_0\right) \qquad (9\text{-}10.11)$$

9-10.8 সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করিলে দেখা যাইবে মুক্ত প্রান্ত বীম কেবল নিজের ভারে যতটা দাবে, উভয় প্রান্ত আবদ্ধ হইলে দাবে তাহার পঞ্চমাংশ।

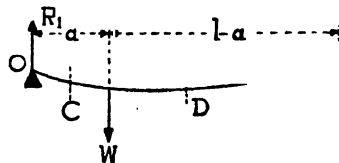
বীমের উপর ধারকের প্রতিক্রিয়াজনিত টর্ক। বীমের অভ্যন্তরীণ টর্ক EID^2y। উপরের (A) সমীকরণ অনুসারে $x=0$-তে ইহার মান $A_1=Wl/8+W_0l/12$। প্রতিক্রিয়াজনিত টর্ক ইহাকে প্রতিমিত করে। অতএব $x=0$-তে

$$Z=-\left[\frac{Wl}{8}+\frac{W_0l}{12}\right]$$

বীমের উপর ইহা বামাবর্তে ক্রিয়া করে।

9-10.4. অনুভূমিক বীম দুই প্রান্তে ক্ষুরধারের উপর রাখা ; বাহ্যভার W এক প্রান্ত হইতে 'a' দূরত্বে। সদ্য আলোচিত দুটি ক্ষেত্রেই বাহ্যভার বীমের মধ্য বিন্দুতে ছিল। x চররাশি 0 হইতে $l/2$-র মধ্যে লইয়া আমরা x ও y-এর যে সম্পর্ক পাইয়াছি, মধ্যবিন্দু সাপেক্ষে বীম প্রতিসম হওয়ায়, ঐ সম্পর্ক বীমের অন্য অর্ধেও প্রযোজ্য। কিন্তু বাহ্যভার মধ্য বিন্দুতে না থাকিলে কি হইবে ?

এ প্রশ্নের আলোচনায় আমরা অপ্রয়োজনীয় জটিলতা এড়াইতে W-র তুলনায় বীমের ভার W_0 উপেক্ষা করিব। বাঁকান বীমের $x=0$ হইতে $x=a$ পর্যন্ত x, y-তে এক প্রকার সম্পর্ক ; $x=a$ হইতে $x=l$ পর্যন্ত সম্পর্ক অন্য প্রকার হয়। কাজেই দুই অংশের জন্য F আলাদা করিয়া হিসাব করিতে হইবে। $x=a$-তে Dy হঠাৎ পরিবর্তিত হয় না। বাঁ দিক হইতে $x=a$-তে আসা যাক বা ডান দিক হইতে আসা যাক, $x=a$-তে Dy এবং y-এর মান উভয় ক্ষেত্রে একই হইবে। $x=a$-তে Dy এবং y-এর এই আচরণের সাহায্যে $x=a$-র দুপাশের সমীকরণে মিল ঘটান যাইবে।

(ক) $0<x<a$। $x=0$-তে বীমের উপর ক্ষুরধারের প্রতিক্রিয়া R_1 ও $x=l$-এ R_2 (9.24 চিত্র) হইলে বীমের সাম্যের জন্য উভয় বলই ঊর্ধ্বমুখী এবং $R_1+R_2=-W$ ও $R_1a=R_2(l-a)$ হইবে। অতএব

9.24 চিত্র

$$R_1=-W\frac{l-a}{l} \text{ এবং } R_2=-W\frac{a}{l}.$$

C ছেদে কৃন্তন বল F হইলে, বীমের OC অংশের ($OC=x<a$) সাম্য বিবেচনা করিয়া পাই

$$R_1+F=0 \text{ বা } F=-R_1.$$

বীমের উভয় প্রান্ত মুক্ত থাকায় দুই প্রান্তে প্রতিক্রিয়াজনিত টর্কের মান

শূন্য। অতএব O বিন্দুতে বলগুলির ভ্রামক লইলে, OC অংশের উপর মোট টর্ক

$$N+Fx+R_1.0=0 \text{ বা } N=-Fx=R_1x$$
$$\therefore\ EID_2y=R_1x$$
$$EIDy=\tfrac{1}{2}R_1x^2+A_1$$
$$EIy=\tfrac{1}{6}R_1x^3+A_1x+A_2$$

$x=0$-তে $y=0$ বলিয়া $A_2=0$ হইবে।

(খ) $a<x<1$। এই অংশে D ছেদে কৃন্তন F' হইলে, OD অংশের সাম্য বিচারে পাই

$$R_1+W+F'=0 \text{ বা } F'=-W-R_1=R_2.$$

এবং $N+Wa+F'x=0$ বা $N=-Wa-F'x=-Wa-R_2x.$

$$\therefore\ EID^2y=-Wa-R_2x,$$
$$EIDy=-Wax-\tfrac{1}{2}R_2x^2+B_1.$$
$$EIy=-\tfrac{1}{2}Wax^2-\tfrac{1}{6}R_2x^3+B_1x+B_2$$

$x=l$-এ $y=0$ বলিয়া পাই

$$B_2=\tfrac{1}{2}Wal^2+\tfrac{1}{6}R_2l^3-B_1l.$$
$$\therefore\ =EIy=\tfrac{1}{2}Wa(l^2-x^2)+\tfrac{1}{6}R_2(l^3-x^3)-B_1(l-x)$$

A_1 ও B_1 আমাদের কাছে এখনও অজানা স্থির রাশি। উহাদের মান বাহির করিতে দুইটি সমীকরণ চাই। $x=a$-তে Dy এবং y উভয় অংশে সমান, এই বিবেচনায় নিচের সমীকরণ দুইটি পাওয়া যায়।

$(Dy)_a$ সমান বলিয়া $\tfrac{1}{2}R_1a^2+A_1=-Wa^2-\tfrac{1}{2}R_2a^2+B_1$

এবং $(y)_a$ সমান বলিয়া

$$\tfrac{1}{6}R_1a^3+A_1a=\tfrac{1}{2}Wa(l^2-a^2)+\tfrac{1}{6}R^2(l^3-a^3)-B_1(l-a)$$

এই দুই সমীকরণ হইতে A_1 ও B_1-এর মান পাওয়া যায়।

9-10.5. সারাংশ। দণ্ডের বংকন (বা বক্রণ) সংক্রান্ত প্রধান প্রধান তথ্যগুলির সারাংশ নিচে দেওয়া হইল।

(১) আলোচ্য বিষয় সুষম, অনুভূমিক দণ্ডের বক্রণ। দণ্ডের প্রস্থ ও বেধের তুলনায় দৈর্ঘ্য অনেক বড়। বল দণ্ডের অভিলম্বে, পীড়ন স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে থাকিয়া হুক সূত্র মানিয়া চলে, এবং দণ্ডের নমন এত কম যে $dy/dx < 1$ ধরা যায়।

(২) x-অক্ষ অবিকৃত দণ্ডের উদাসীন তলে দণ্ডের দৈর্ঘ্যের সমান্তরাল কোন রেখা (বা দণ্ডের অক্ষ), মূল বিন্দু উহার বাঁ প্রান্তে এবং y অক্ষ নিচের দিকে পজিটিভ। দ্বন্দ্ব দক্ষিণাবর্ত হইলে পজিটিভ।

(৩) দণ্ডের এক বা একাধিক খাড়া ছেদে বাহ্যবল প্রযুক্ত হইতে পারে। দণ্ডের রৈখিক ভার w সর্বত্র সমান।

(৪) বলের ক্রিয়ায় দণ্ডের যে কোন খাড়া ছেদের ডান দিকের অংশ বাঁ দিকের অংশের উপর কৃন্তন বল F ও দ্বন্দ্ব N প্রয়োগ করিবে। বাঁ দিকের অংশ ডান দিকের উপর সমান ও বিপরীত বল ও দ্বন্দ্ব প্রয়োগ করিবে। এই অভ্যন্তরীণ দ্বন্দ্বের অক্ষ উদাসীন তলে x-অক্ষের অভিলম্বে থাকে।

(৫) দুই বাহ্যবলের মধ্যবর্তী অংশে দণ্ডের যে কোন ছেদে

$$\frac{dF}{dx} = -w, \text{ ও } \frac{dN}{dx} = -F \text{ বা } \frac{d^2N}{dx^2} = w$$

(৬) অভ্যন্তরীণ দ্বন্দ্ব $N = EAK^2/R = EAK^2 d^2y/dx^2$।

(৭) দণ্ডের প্রান্ত বদ্ধ (fixed), মুক্ত (free) বা আধৃত (supported) থাকিতে পারে। বিভিন্ন প্রান্তে নিম্নোক্ত শর্তগুলি পালিত হয়ঃ

প্রান্ত	y	$dy\ dx$	F	N
বদ্ধ	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$
মুক্ত	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0
আধৃত	0	$\neq 0$	$\neq 0$	0

9-10.6. বংকন বা বক্রণ সংক্রান্ত একটি বিনিময় সূত্র (A reciprocity theorem in bending)। বংকন সংক্রান্ত সুন্দর একটি বিনিময় সূত্র আছে। ইহাতে বলে দণ্ডের বিকার হুক সূত্রের অধীনে থাকিলে, দণ্ডের অভিলম্বে A বিন্দুতে প্রযুক্ত P বলের ক্রিয়ায় দণ্ডের B বিন্দুতে যে নমন হইবে, B বিন্দুতে একইভাবে P বল প্রয়োগ করিলে A বিন্দুতেও সেই নমন হইবে।

ইহা সহজেই প্রমাণ করা যায়। ধরা যাক দণ্ডের অভিলম্বে 1 বিন্দুতে P_1 বল ও 2 বিন্দুতে P_2 বল প্রয়োগ করা হইল, এবং দুই বিন্দুতে বলের অভিমুখে মোট সরণ যথাক্রমে δ_1 ও δ_2 হইল। δ_1 সরণ অংশত P_1 বলের জন্য এবং অংশত P_2 বলের জন্য। হুক সূত্র খাটিলে বল ও সরণ

আনুপাতিক হইবে। P_1 বলের জন্য 1-এ সরণ $a_{11}P_1$ ও 2-তে সরণ $a_{21}P_1$ লেখা যায়। a_{ij} রাশিগুলি বিভিন্ন i বিন্দুতে P_j বলের ক্রিয়াজনিত সরণের সহিত P_j-র অনুপাত বুঝায়। কোন প্রদত্ত ক্ষেত্রে ইহারা স্থির মান। P_2-র জন্য 2-তে সরণ $a_{22}P_2$ এবং 1-এ সরণ $a_{12}P_2$। অতএব

$$\delta_1 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2$$

এবং $$\delta_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2.$$

আমরা দেখাইব $a_{12} = a_{21}$। ইহা করিতে ধর প্রথমে P_1 বল প্রয়োগ করা হইল। ইহাতে বলের অভিমুখে সরণ হইবে $a_{11}P_1$ এবং স্থিতিস্থাপক বলের বিরুদ্ধে P_1 বল $\frac{1}{2}a_{11}P_1^2$ কার্য করিবে। এখন 2 বিন্দুতে P_2 প্রয়োগ কর। ইহাতে কার্য হইবে $\frac{1}{2}a_{22}P_2^2$। কিন্তু P_2 প্রয়োগে 1 বিন্দুতে $a_{12}P_2$ সরণ হইয়াছে এবং এই সময় P_1 স্থির ছিল। অতএব এই সরণে P_1 বল $a_{12}P_2P_1$ কার্য করিল, এবং মোট কার্যের মান হইল

$$\tfrac{1}{2}a_{11}P_1^2 + \tfrac{1}{2}a_{22}P_2^2 + a_{12}P_2P_1.$$

এবার আগে P_2 ও পরে P_1 প্রয়োগ করিয়া একইভাবে কার্য হিসাব করিলে পাইব

$$\tfrac{1}{2}a_{11}P_1^2 + \tfrac{1}{2}a_{22}P_2^2 + a_{21}P_1P_2.$$

উভয় ক্ষেত্রে কার্যের মান সমান হইবে। অতএব $a_{12} = a_{21}$।

উপরের আলোচনা হইতে দেখা যায় A বিন্দুতে কেবল P_A বল প্রয়োগ করিলে উহার জন্য B-তে সরণ হইবে $a_{BA}\,P_A$, এবং B বিন্দুতে কেবল P_B বল প্রয়োগ করিলে উহার জন্য A-তে সরণ হইবে $a_{AB}\,P_B$। $P_A = P_B = P$ হইলে, $a_{AB} = a_{BA}$ বলিয়া দুই বিন্দুতে সরণ একই হইবে।

প্রশ্ন। হালকা ক্যান্টিলিভারের মুক্ত প্রান্তে W বল প্রয়োগ করিলে উহার মধ্য বিন্দুতে যে নমন হয়, নমন সোজাসুজি হিসাব করিয়া দেখাও মধ্য বিন্দুতে W বল প্রয়োগ করিলে মুক্ত প্রান্তে একই নমন হইবে।

9-10.7. কৃন্তনের জন্য নমন (Depression due to shear)। এ পর্যন্ত আমরা বংকনের জন্য দণ্ডের নমন আলোচনা করিয়াছি। কিন্তু দণ্ডে কৃন্তন থাকায়, কৃন্তনের জন্যও কিছু নমন হইবে। ইহা হিসাব করা যাক।

অবিকৃত দণ্ডের যে রেখা x-অক্ষের সমান্তরাল ছিল, কৃন্তনে দণ্ডের নমন হইলে সে রেখা বাঁকিবে এবং মূলবিন্দু হইতে বিভিন্ন দূরত্বে অনুভূমিক

x-অক্ষের সঙ্গে বিভিন্ন কোণ উৎপন্ন করিবে। এই কোণই স্থানীয় কৃন্তন কোণ ; x দূরত্বের ছেদে ইহা θ ধরা যাক। এই ছেদে কৃন্তন বল F, এবং প্রস্থচ্ছেদ A হইলে কৃন্তন পীড়ন F/A। দণ্ডের পদার্থের কৃন্তন গুণাংক G। কৃন্তনের তবি $\tan\theta = dy/dx$। অতএব

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F}{GA} \qquad (9\text{-}10.12)$$

ইহার সমাকলনে x ছেদে কৃন্তনের জন্য নমন y_s পাওয়া যায়।

$$y_s = \int_0^s \frac{F}{GA} dx \qquad (9\text{-}10.13)$$

F এর মান x-এর ফলন (function) হিসাবে জানা থাকিলেই সমাকলন করা যায়, কারণ G ও A স্থির রাশি।

ক্যান্টিলিভারের ক্ষেত্রে

$$F = W + w\,(l - x). \qquad (9\text{-}10.1 \text{ সমীকরণ})$$

অতএব, ক্যান্টিলিভারে

$$y_s = \frac{1}{GA}\left\{ Wx + w\left[lx - \frac{x^2}{2} \right]\right\}$$

কারণ $x = 0$-তে $y_s = 0$ বলিয়া সমাকলন স্থিরাংকের মান শূন্য। $x = l$ বসাইলে দণ্ডের মুক্ত প্রান্তে কৃন্তনজনিত নমন δ_s পাওয়া যাইবে।

$$\delta_s = \frac{1}{GA}\left[W + \tfrac{1}{2} W_0 \right] \qquad (9\text{-}10.14)$$

বংকনের জন্য নমনকে δ_b বলিলে 9-10.4 সমীকরণ অনুসারে

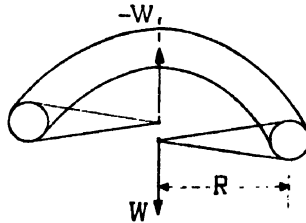
$$\delta_b = \frac{l^3\,(W + \frac{3}{8} W_0)}{3\,EAk^2}$$

অতএব $$\frac{\delta_s}{\delta_b} = \frac{l}{GA} \cdot \frac{3\,EAk^2}{l^3} \cdot \frac{W + \frac{1}{2} W_0}{W + \frac{3}{8} W_0}$$

$$\simeq 3.\,\frac{E}{G} \cdot \frac{k^2}{l^2}$$

অধিকাংশ ধাতুতে E G-এর প্রায় তিন গুণ। অতএব $3E/G \simeq 10$। $(W + \frac{1}{2}W_0)/(W + \frac{3}{8}W_0) \simeq 1$। কাজেই এক্ষেত্রে δ_s/δ_b-র মান প্রায় $10k^2/l^2$। দণ্ডের দৈর্ঘ্য উহার ছেদের আবর্তন ব্যাসার্ধের (k-র) তুলনায় অনেক বড়। অতএব লম্বা দণ্ডে বংকনের তুলনায় কৃন্তনের জন্য নমন

উপেক্ষণীয়। ইহা যে কেবল ক্যান্টিলিভারের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য তাহা নয়। k-র তুলনায় l যথেষ্ট বড় হইলে সকল ক্ষেত্রেই ইহা প্রযোজ্য, কারণ δ_s/δ_i k^2/l^2-এর আনুপাতিক।

9-11. কুণ্ডলিত স্প্রিং (Spiral springs)। বেলনের উপর একগাছা তার সুষমভাবে জড়াইলে কুণ্ডলিত স্প্রিং গঠিত হয়। স্প্রিং-এর অক্ষ বলিতে এই বেলনের অক্ষ বুঝায়। তারের পাকগুলি অক্ষের অভিলম্বে ঘনসন্নিবিষ্ট হইলে পাকের তল স্প্রিং-এর অক্ষের কার্যতঃ অভিলম্বে থাকিবে। অন্যথায় স্প্রিং-এর অক্ষের সহিত তারের যে কোন অংশ সর্বত্র একই কোণে অবস্থিত ধরা হইবে। স্প্রিং- এর আলোচনায় উহার অক্ষ খাড়া নেওয়া হইবে।

9.25 চিত্র

9-11.1. লম্বকুণ্ডলিত স্প্রিং (Flat springs)। (ক) অনুদৈর্ঘ্য দোলনের দোলনকাল (Periodic time of longitudinal oscillation)। তারের ব্যাসার্ধ r এবং স্প্রিং-এর ব্যাসার্ধ R ($\gg r$) ধরা যাক। আলোচনায় আমরা প্রথমে স্প্রিং-এর ভার উপেক্ষা করিব, এবং ধরিব স্প্রিং-এর নিচের প্রান্তে এক অনুভূমিক বাহু লাগাইয়া উহা হইতে অক্ষ বরাবর W ভার ঝুলান হইয়াছে, অক্ষ ঠিক খাড়া রাখিবার জন্য উপরের প্রান্তে অনুরূপ বাহু লাগাইয়া অক্ষে উহা দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ করা হইয়াছে এবং পাকের তল কার্যতঃ অনুভূমিক।

এই অবস্থায় স্প্রিং-এর এক পাকের অর্ধবৃত্ত অংশের সাম্য আলোচনায় ধরা যায় যেন অর্ধবৃত্তের দুই প্রান্তীয় অনুপ্রস্থ ছেদে R ব্যাসের দুটি বাহু লাগান আছে (9.25 চিত্র), উভয় বাহুর মুক্ত প্রান্ত স্প্রিং-এর অক্ষে এবং দুই বাহুতে অক্ষ বরাবর দুই বিপরীত বল, W ও $-W$, ক্রিয়া করে। ইহাতে তার মোচড় খায়। মুচড়াইবার দ্বন্দ্বের মান WR। মোচড়ের কোণ θ হইলে 9-6.1 সমীকরণ অনুসারে

$$\frac{\pi G r^4}{2\pi R}\theta = WR \text{ বা } \theta = \frac{2WR^2}{Gr^4}$$

অতএব অর্ধবৃত্তের দুই প্রান্তের মধ্যে খাড়া দিকে আপেক্ষিক সরণ

$$\delta z = R\theta \cdot \frac{2WR^3}{Gr^4}$$

স্প্রিং-এ ঘনসন্নিবিষ্ট এইরূপ n সংখ্যক পাক থাকিলে উহার দুই প্রান্তে আপেক্ষিক সরণ হইবে

$$z = 2n\delta z = \frac{4nWR^3}{Gr^4}. \tag{9-11.1}$$

বিভিন্ন বলে সরণ মাপিয়া তারের G বাহির করা যায়। স্প্রিং-এর উপর প্রান্ত উহার অক্ষে আবদ্ধ থাকিবে এবং বল নীচের প্রান্তে অক্ষ বরাবর প্রয়োগ করিতে হইবে।

সরণ বলের আনুপাতিক। স্প্রিং-এ $W = Mg$ ভার ঝুলাইয়া স্প্রিং নীচের দিকে একটু টানিয়া ছাড়িয়া দিলে উহা সাম্যে ফিরিয়া যাইতে চাহিবে। একক সরণে $(z=1)$ প্রত্যানয়ক বল

$$W_1 = \frac{Gr^4}{4nR^3} = s \tag{A}$$

নির্দিষ্ট স্প্রিং-এ স্থির রাশি। অতএব স্প্রিং এইভাবে বিচলিত করিলে উহার গতীয় সমীকরণ হইবে

$$M\ddot{z} = -sz \text{ বা } \ddot{z} + (s/M)z = 0.$$

গতি সরল দোলীয় এবং উহার দোলনকাল

$$T = 2\pi\sqrt{M/s} = 2\pi\sqrt{4MnR^3/Gr^4}. \tag{9-11.2}$$

এই সমীকরণের সাহায্যেও তারের G বাহির করা যায়।

স্প্রিং-এর ভরের জন্য শুদ্ধি। আগের আলোচনায় M-এর তুলনায় স্প্রিং-এর ভর উপেক্ষা করা হইয়াছে। স্প্রিং-এর ভর গণনায় লইলে শক্তি সংরক্ষণ সূত্র প্রয়োগ করিয়া দোলনকাল সহজে পাওয়া যায়। স্প্রিং-এর তারের ভর m, ভরের রৈখিক ঘনত্ব μ ও মোট দৈর্ঘ্য l ধরা যাক। দোলনের কোন মুহূর্তে M ভরের বেগ যখন $\dot{z}$, তখন তারের উপরের প্রান্ত হইতে তার বরাবর x দূরত্বে তারের dx অংশের বেগ হইবে $(x/l)\dot{z}$, এবং উহার স্থিতিশক্তি হইবে $\frac{1}{2}\mu dx(x/l)^2\dot{z}^2$। অতএব আলোচ্য মুহূর্তে মোট তারের গতিশক্তি

$$\frac{1}{2}\frac{\mu}{l^2}\dot{z}^2\int^l x^2dx = \frac{1}{6}\mu l\dot{z}^2 = \frac{1}{6}m\dot{z}^2$$

ভারসমেত সম্পূর্ণ স্প্রিং-এর গতিশক্তি

$$\tfrac{1}{2}M\dot{z}^2 + \tfrac{1}{6}m\dot{z}^2 = \tfrac{1}{2}(M + m/3)\dot{z}^2.$$

ভারসমেত স্প্রিং-এর সাম্য অবস্থানে স্থিতিশক্তি শূন্য ধরা যাক। আলোচ্য মুহূর্তে ভারের ভারকেন্দ্রের নিচের দিকে সরণ z হইলে ইহার স্থিতিশক্তি $-Mgz$। স্প্রিং-এর তারের ভারকেন্দ্র এই সময় $\frac{1}{2}z$ নামিয়াছে ধরা যায়। অতএব তারের স্থিতিশক্তি $-\frac{1}{2}mgz$।

স্প্রিং-এ ভার চাপাইলে উহার নিচমুখী সরণ যদি z_0 হইয়া থাকে, তাহা হইলে z_0 হইতে সরণ বাড়িয়া $z_0 + z$ হইতে স্প্রিং-এর স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি হইবে

$$\int_{z_0}^{z_0+z} szdz = \tfrac{1}{2}s\{(z_0 + z)^2 - z_0^2\} = sz_0z + \tfrac{1}{2}sz^2$$

$$= Mgz + \tfrac{1}{2}sz^2$$

কারণ (*A*) সমীকরণ অনুসারে $sz_0 = Mg$।

এখানে আমরা তারের ভর ধরি নাই। একটু আগে দেখা গিয়াছে স্থিতি-শক্তির ব্যাপারে তারের ভর গণনায় নেওয়ার ফল হইল ভর M-কে $\frac{1}{2}m$ পরিমাণ বাড়ান। এখানেও তাহা করিলে

স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি $= (M + \frac{1}{2}m)gz + \frac{1}{2}sz^2$

অতএব সাম্য অবস্থান সাপেক্ষে ভারসমেত স্প্রিং-এর শক্তি

$$E = \tfrac{1}{2}(M + \tfrac{1}{3}m)\dot{z}^2 - (M + \tfrac{1}{2}m)gz + (M + \tfrac{1}{2}m)gz + \tfrac{1}{2}sz^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(M + \tfrac{1}{3}m)\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2}sz^2.$$

শক্তির সংরক্ষণ সূত্র অনুসারে ইহা স্থিরমান। অতএব কালসাপেক্ষে E-র অবকলন করিয়া পাই

$$\frac{dE}{dt} = (M + \tfrac{1}{3}m)\ddot{z} + sz = 0$$

ইহা সরল দোলনের সমীকরণ, এবং দোলনকাল

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + \frac{1}{3}m}{s}} = 2\pi\sqrt{\frac{(M + \frac{1}{3}m)4nR^3}{Gr^4}} \qquad (9\text{-}11.3)$$

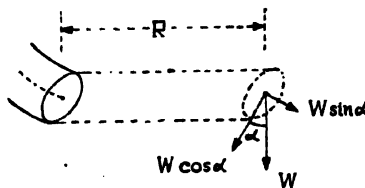
9-11.2 সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করিলে দেখা যায় তারের ভর গণনায় নেওয়ার ফল হইল বাহ্য ভরের সঙ্গে তারের ভরের এক-তৃতীয়াংশ যোগ করা।

(খ) ব্যাবর্তন দোলনের দোলনকাল (Periodic time of torsional oscillation)। ঘনকুণ্ডলিত স্প্রিং-এর ব্যাবর্তন দোলনে উহার নিচের প্রান্তে অক্ষের আড়াআড়ি কোন সুষম দণ্ড লাগান আছে মনে করা যাক। দণ্ড অনুভূমিক তলে ϕ কোণ ঘুরান হইল। ইহাতে স্প্রিং-এর তারের বক্রণ (Bending) হইবে। স্প্রিংকুণ্ডলীর ব্যাসার্ধ R-কে কোন বক্রণের ব্যাসার্ধ মনে করা উচিৎ নয়, কারণ ঐ ব্যাসার্ধ নিয়া থাকা স্প্রিং-এর স্থায়ী আকার। ϕ মোচড়ে স্প্রিং-এর l দৈর্ঘ্যের তার বাঁকিয়া বক্রতাকেন্দ্রে ϕ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে বলিয়া আমরা ধরিতে পারি। এক্ষেত্রে বক্রতা ব্যাসার্ধ ρ হইলে $\rho = l/\phi$ হইবে। 9-9.4 সমীকরণ অনুসারে বক্রণের দ্বন্দ্ব $EI/\rho = EI\phi/l$। ইহা ϕ মোচড়ে প্রত্যানয়ক দ্বন্দ্ব। I স্প্রিং-এর তারের বক্রণের উদাসীন তল সাপেক্ষে প্রস্থচ্ছেদের জাড্যভ্রামক। ইহার মান $(AK^2) \pi r^2 . \frac{1}{4} r^2$। স্প্রিং-এর অক্ষ সাপেক্ষে প্রান্তস্থ দণ্ডের জাড্যভ্রামক J এবং উহার ভরের তুলনায় স্প্রিং-এর ভর উপেক্ষণীয় হইলে, দণ্ডের ব্যাবর্তন দোলনের সমীকরণ হইবে

$$J\ddot{\phi} + (EI/l)\,\phi = 0 \quad \text{বা} \quad J\ddot{\phi} + (\tfrac{1}{4}\pi r^4 E/l)\,\phi = 0$$

ইহা সরল দোলনের সমীকরণ, এবং পর্যায়কাল

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4Jl}{\pi r^4 E}} \qquad (9\text{-}11.4)$$

9-11.2. বক্র-কুণ্ডলিত স্প্রিং (Non-flat spiral springs)। স্প্রিং-এর তারের যে কোন অংশ অনুভূমে না থাকিয়া অনুভূমের সহিত α কোণে হেলিয়া থাকিতে পারে। এরূপ স্প্রিংকে আমরা বক্র-কুণ্ডলিত স্প্রিং বলিব। তারের অক্ষের অভিলম্বে কোন ছেদ লইলে উহা উল্লম্ব তলের সহিত α কোণ করিবে। তারের মুক্ত প্রান্তে R দৈর্ঘ্যের অনুভূমিক বাহু লাগাইয়া উহার প্রান্তে স্প্রিং-এর অক্ষ বরাবর W ভার ঝুলান আছে ধরা যাক। (উপরের প্রান্তে অক্ষ বরাবর উর্ধ্বমুখী W বল আছে ধরিতে হইবে।)

9.26 চিত্র

W ভারকে অনুপ্রস্থ ছেদের তলে $W \cos\alpha$ ও তলের অভিলম্বে $W \sin\alpha$ উপাংশে ভাগ করিয়া নেওয়া যায় (9.26 চিত্র)। (W ও উহার

উপাংশগুলি একই উল্লম্ব তলে এবং এই তল ছেদের অভিলম্বে।) ছেদের তলে প্রথম উপাংশের ভ্রামক $WR \cos \alpha$ তারে মোচড় দেয়। একক দৈর্ঘ্যের তারে এই মোচড়ের মান হইবে

$$WR \cos \alpha = \frac{\pi G r^4}{2} \phi.$$

ইহাতে তারের মুক্ত প্রান্ত নিজ তলে $l\phi$ কোণ ঘুরিবে। ফলে R বাহু উল্লম্বের সহিত α কোণে নামিয়া যায় বলিয়া বাহুতে আবদ্ধ ভার W-র উল্লম্ব সরণ হইবে

$$Rl\phi \cos \alpha = \frac{2WR^2 l \cos^2 \alpha}{\pi G r^4}$$

অন্য উপাংশের ভ্রামক $WR \sin \alpha$ তার বাঁকাইতে প্রয়াস পায়। ইহার জন্য তারের যে কোন স্থানে বক্রতার পরিবর্তন হইবে। এই বক্রতা $1/R_0$ ধরিলে 9-9.4 সমীকরণ অনুসারে ইহার মান হইবে

$$\frac{1}{R_0} = \frac{WR \sin \alpha}{EAk^2} = \frac{4WR \sin \alpha}{E\pi r^4}.$$

এই বক্রতার জন্য তারের যে কোন dx অংশ $dx/R_0 = (4WR \sin \alpha / E\pi r^4) dx$ কোণ বাঁকিবে, এবং সম্পূর্ণ তারের বংকন হইবে l/R_0। এই বংকনের জন্য R বাহুর প্রান্ত অনুভূমের সহিত α কোণে $W \sin \alpha$ বলের অভিমুখে আগাইয়া আসিবে। ফলে ইহার উল্লম্ব সরণ হইবে

$$\frac{Rl}{R_0} \sin \alpha = \frac{4WR^2 l \sin^2 \alpha}{E\pi r^4}.$$

অতএব W ভারের মোট অক্ষীয় (খাড়া) সরণ

$$z = \frac{2WR^2 l}{\pi r^4} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{G} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{E} \right) \qquad (9\text{-}11.5)$$

উপরের সরণ ছাড়া স্প্রিং-এর প্রান্তে কিছু অনুভূমিক কৌণিক সরণও হয়। মোচড়ের জন্য কৌণিক সরণ $l\phi$। ইহার অনুভূমিক উপাংশ $l\phi \sin \alpha$। স্প্রিং নিজ অক্ষে এইটুকু পাক খায়। বংকনের জন্য মুক্ত প্রান্তের কৌণিক সরণের অনুভূমিক উপাংশ $(l/R_0) \cos \alpha$। এই কোণ $l\phi \sin \alpha$-র বিপরীতমুখী ; ইহা স্প্রিং-এর পাক খুলিতে চায়। অতএব স্প্রিং-এর পাক খাইবার মোট অনুভূমিক কৌণিক সরণ হইবে

$$\delta_h = l\phi \sin\alpha - \frac{1}{R_0}\cos\alpha$$

$$= \frac{2WRl\cos\alpha\sin\alpha}{\pi Gr^4} - \frac{4WRl\sin\alpha\cos\alpha}{E\pi r^4}$$

$$= \frac{WRl\sin 2\alpha}{\pi r^4}\left(\frac{1}{G} - \frac{2}{E}\right) \qquad (9\text{-}11.6)$$

$\alpha = 45°$ হইলে এই ক্রিয়া সবচেয়ে বেশী হয়। $E > 2G$ হইলে বৃত্তাকার ছেদে তৈয়ারী স্প্রিং-এর প্রান্তে টান প্রয়োগ করিলে স্প্রিং আরও পাকাইতে চাহিবে। অধিকাংশ ধাতুর $E > 2G$।

9-12. বিবিধ। এই অনুচ্ছেদে আমরা স্থিতিস্থাপকতা সংক্রান্ত বিবিধ কয়েকটি বিষয় আলোচনা করিব।

9-12.1. স্থিরমান টর্কে বীমের বংকন। বীমের সর্বত্র প্রযুক্ত টর্কের মান একই হইলে বীম বৃত্তচাপে পরিণত হইবে। 9.27 চিত্রে AB বীমের দুই প্রান্তে সমান ও বিপরীত টর্ক q প্রয়োগ করা হইয়াছে। বীমের AC অংশের সাম্য বিবেচনা করিলে দেখা যায় C ছেদে CB অংশ দ্বারা AC অংশের উপর প্রযুক্ত অভ্যন্তরীণ টর্ক A-তে প্রযুক্ত টর্ক q-র সমান ও বিপরীত হইতে হইবে। C বিন্দুতে বীমের বক্রতা ব্যাসার্ধ R হইলে

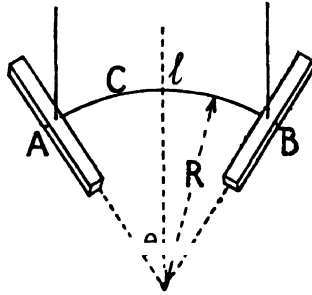
$$EAk^2/R = q \text{ বা } R = EAk^2/q$$

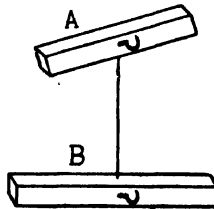
হইবে। C বীমের যে কোন বিন্দু। অতএব বীমের সর্বত্র বক্রতার ব্যাসার্ধ একই, অর্থাৎ বীম আকারে বৃত্তচাপ।

9.27 চিত্র

9-12.2. সার্লের উপায়ে G ও E তুলনা করা (Searle's method of comparing G and E)। সার্ল গোল ছেদের তারের পদার্থের G ও E তুলনা করার একটি সহজ উপায় বাহির করেন। ইহার জন্য একই রকম, গোল বা চৌকা ছেদের দুটি দণ্ড A, B-র দরকার হয়। দণ্ড দুটি সমান্তরাল রাখিয়া উহাদের ঠিক মাঝখানে পরীক্ষণীয় C তারের দুই প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আটকান হয়। দুগাছা সমান্তরাল সুতার সাহায্যে অনুভূমিক তলে তার সমেত A, B দণ্ড দুটি ঝুলান হয় (9.28 চিত্র)। সাম্যাবস্থায় C তার সোজা এবং A ও B

সমান্তরাল থাকে। A ও B-র এক পাশের দুই প্রান্ত একটু কাছে আনিয়া ছাড়িয়া দিলে উহারা অনুভূমিক তলে নিজ নিজ সুতার অক্ষে ব্যাবর্তন দোলনে দুলিতে থাকে। ইহার দোলনকাল T_1 মাপা হয়।

ইহার পর সুতা দুগাছা খুলিয়া ফেলিয়া A ও B-র একটিকে অনুভূমিক রাখিয়া উহাকে দৃঢ়ভাবে আটকান হয়, এবং অন্যটি C তারে উহা হইতে ঝুলিয়া থাকে। C-কে খাড়া রাখা হয় (9.29 চিত্র)। এই অবস্থায় নিচের দণ্ডটিকে C তারের অক্ষে ব্যাবর্তন দোলায় দুলিতে দিয়া উহার দোলনকাল T_2 মাপা হয়।

9.28 চিত্র

প্রথম ক্ষেত্রে A ও B-র যুগ্ম ব্যাবর্তন দোলনে C তারে যে কোন মুহূর্তে সক্রিয় বাহ্য টর্ক উহার দুই প্রান্তে সমান। ইহাতে C বৃত্তচাপে পরিণত হয়। এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ R ও ঐ সময়ে A ও B দণ্ডের মধ্যবর্তী কোণ 2θ হইলে C তারের দৈর্ঘ্য l-এর সহিত R, θ-র সম্পর্ক হইবে $l = 2R\theta$ (9.28 চিত্র)। অতএব C তারের বংকনের দ্বন্দ্ব

9.29 চিত্র

$$EAk^2/R = 2EAk^2\theta/l.$$

A বা B দণ্ডের লম্বন অক্ষে জাড্য ভ্রামক I হইলে উহাদের যে কোনটির গতীয় সমীকরণ

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2EAk^2}{l}\theta \text{ বা } \ddot{\theta} + \frac{2EAk^2}{Il}\theta = 0$$

ইহা সরল দোলনের সমীকরণ এবং দোলনকাল

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{Il}{2\,EAk^2}}$$

তারের ছেদ গোল হইলে $Ak^2 = \frac{1}{4}\pi r^4$ । অতএব

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2Il}{\pi Er^4}} \qquad (9\text{-}12.1)$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, এক রেডিয়ান মোচড়ে টর্ক $G\pi r^4/2l$ (9-6.3 সমীকরণ)। অতএব দোলনকাল

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2Il}{G\pi r^4}} \qquad (9\text{-}12.2)$$

$$\therefore \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{G}{E} \qquad (9\text{-}12.3)$$

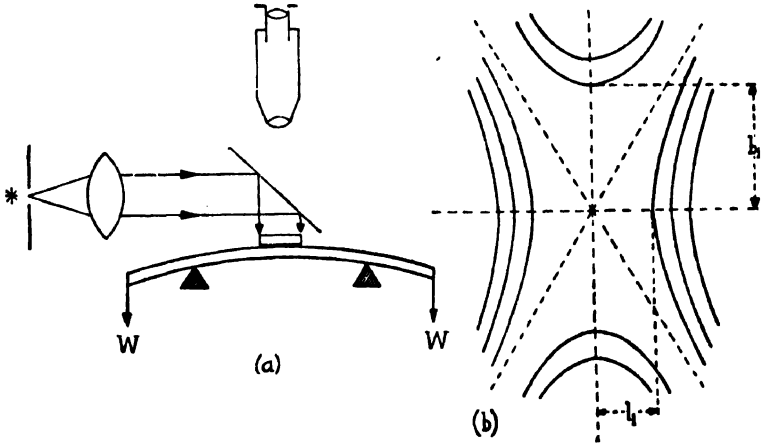
I, l ও r জানা থাকিলে 9-12.1 এবং 9-12.2 সমীকরণ হইতে E এবং G পাওয়া যায়। পোয়াসঁর অনুপাত μ পাইতে আমরা 9-5.2 সমীকরণ $2(1+\mu) = E/G$ প্রয়োগ করিতে পারি।

$$\mu = \frac{T_2^2}{2T_1^2} - 1. \qquad (9\text{-}12.4)$$

9-12.3. পোয়াসঁর অনুপাত মাপিবার কর্ণুর উপায় (Cornu's Method of determining Poisson's ratio)। 9-9.4 অনুচ্ছেদে দেখান হইয়াছে আয়ত ছেদের বীমের কোন অংশে দৈর্ঘ্যের দিকে বীমের বক্রতা ব্যাসার্ধ R_1 ও উহার অনুপ্রস্থে বক্রতা ব্যাসার্ধ R_2 হইলে $\mu = R_1/R_2$ । R_1, R_2 মাপিয়া μ পাওয়া যায়।

আলোকরশ্মির ব্যতিকরণের (Interference) সাহায্যে কর্ণু R_1, R_2 মাপিবার একটি সুষ্ঠু উপায় বাহির করেন। কাচ বা যে সকল ধাতু পালিশ করিলে উহা হইতে আলোকরশ্মির ভাল প্রতিফলন হয়, কেবল তাহাদের ক্ষেত্রেই কর্ণুর উপায় প্রয়োগ করা যায়। পরীক্ষণীয় পদার্থের আয়ত ছেদের বীম লইয়া উহার মাঝখানে চওড়ার দিকের এক পাশ পালিশে যথার্থ সমতল করিয়া উহার উপর কাচের একখানা পরীক্ষণ পাত (optical test-plate) বসান হয়। (কাচের পরীক্ষণ পাতের তল যথার্থ

সমতল।) বীমকে উহার দুই প্রান্ত হইতে সমান দূরত্বে একই অনুভূমিক তলে দুটি সমান্তরাল ক্ষুরধারের উপর রাখিয়া দুই প্রান্ত হইতে সমান ভার ঝুলান হয় (9.30*a* চিত্র)। ইহাতে বীম বাঁকাইবার টর্ক ক্ষুরধারের মধ্যেকার অংশে সর্বত্র সমান হয়, এবং ঐ অংশে বীম বৃত্তচাপে পরিণত হয় (9.12.1 অনুচ্ছেদ দেখ)।

উপর দিক হইতে খাড়াভাবে পরীক্ষণ পাতের উপর এক রঙা (monochromatic) আলো ফেলিয়া উপর দিক হইতেই তাকাইলে পরীক্ষণ পাতের ঠিক নিচে পরাবৃত্ত (hyperbola) আকারের একান্তর (alternate)

9.30 চিত্র

উজ্জ্বল ও কালো রেখা দেখা যাইবে (9.30*b* চিত্র)। কাচের নিচের তলে আপতিত আলোকরশ্মির কিছু অংশ কাচ হইতে বাহির হইয়া বীমের পিঠে পড়ে এবং সেখান হইতে প্রতিফলিত হইয়া পূর্বতন রশ্মির সহিত মিলিত হয়। কাচ হইতে বীমের পিঠে যাইতে আলোকরশ্মিকে পূর্বতন রশ্মির তুলনায় কিছু বেশী পথ যাইতে হয় বলিয়া মিলনের সময় দুই অংশে দশাবৈষম্য ঘটে। অতিরিক্ত পথের দৈর্ঘ্যের উপর দশাবৈষম্য নির্ভর করে। কোন নির্দিষ্ট আলোক রেখা (fringe) যেখানে দেখা যায় তাহার সর্বত্র অতিরিক্ত পথ একই। পর পর দুইটি উজ্জ্বল (বা কালো) আলোক রেখা যেখানে গঠিত হয় সেই দুই স্থানে পরীক্ষণ পাত ও বীমের পিঠের দূরত্বের প্রভেদ $\frac{1}{2}\lambda$(λ = ব্যবহৃত একরঙা আলোর তরঙ্গ দৈর্ঘ্য)। এইরূপ সম্পর্ক থাকায় বীমের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর নির্দিষ্ট সংখ্যক ফ্রিঞ্জ মাপিয়া ঐ দুই ফ্রিঞ্জের ব্যবধানে বীমের বক্রতার জন্য পরীক্ষণ পাতের তল হইতে

বীমের দূরত্ব কতখানি বাড়িয়াছে তাহা জানা যায়, এবং উহা হইতে বক্রতা ব্যাসার্ধ হিসাব করা যায়।

উজ্জ্বল ও কালো রেখায় গঠিত নকশার (pattern) কেন্দ্র হইতে বীমের দৈর্ঘ্য বরাবর প্রথম ও n-তম ফ্রিঞ্জের দূরত্ব যথাক্রমে l_1 ও l_n, এবং প্রস্থ বরাবর অনুরূপ দুই ফ্রিঞ্জের দূরত্ব b_1 ও b_n হইলে

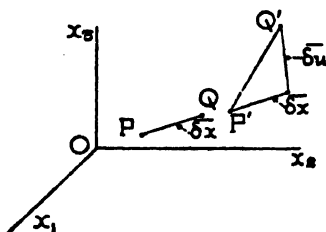
$$R_1 = \frac{l_n^2 - l_1^2}{\lambda(n-1)} \quad ও \quad R_2 = \frac{b_n^2 - b_1^2}{\lambda(n-1)}$$

$$এবং \quad \mu = \frac{R_1}{R_2} = \frac{l_n^2 - l_1^2}{b_n^2 - b_1^2}$$

দূরত্ব ট্রাভলিং মাইক্রোস্কোপের সাহায্যে মাপা হয়।

9-13. পীড়ন ও ভঙ্গি টেনসর (Stress and strain tensors)। বাহ্য বলের ক্রিয়ায় কোন বস্তু বিকৃত হইলে উহার যে কোন স্থানে স্বল্পাংশ তল δA-র এক পাশের পদার্থ অন্য পাশের পদার্থের উপর যে δF বল প্রয়োগ করে, তলস্থ কোন P বিন্দুতে এই বল ও তলের অনুপাতের সীমান্ত মান

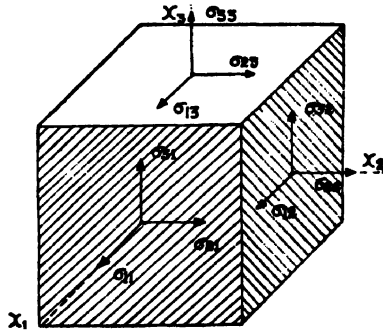
$$S = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F}{\delta A} = \frac{dF}{dA} \text{কে}$$

P বিন্দুতে গৃহীত তলে 'পীড়ন' বলা হয়। বল প্রয়োগের আগে ঐ বিন্দু হইতে উহার খুব কাছের কোন Q বিন্দুর (9.31 চিত্র) ভেক্টর দূরত্ব $\overline{PQ} = \overline{\delta x}$ এবং উহার উপাংশ $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ ধরা যাক। এখানে পাদাঙ্ক 1, 2, 3 যথাক্রমে x, y, z অক্ষ বুঝায়। বল প্রয়োগের পরে P বিন্দু P'-এ

9.31 চিত্র

এবং Q বিন্দু Q'-এ সরিয়া থাকিলে PQ-র পরিবর্তন $\overline{\delta(PQ)} = \overline{\delta u}$ ভেক্টর রাশি। $\delta u/\delta x$ অনুপাতের সীমান্ত মান $\overline{PQ}$ রেখার ভঙ্গি। P

বিন্দু স্থির রাখিয়া δA তলের দিক্ বিন্যাস বদলাইলে পীড়ন, ও Q বদলাইলে ততি সাধারণতঃ বদলায়। δA ভেক্টরের সহিত δF ভেক্টরের কি সম্পর্ক, এবং δx ভেক্টরের সহিত δu ভেক্টরেরই বা কি সম্পর্ক ? ইহাই নিচে আলোচনা করা হইল।

পীড়ন টেনসর। নির্দিষ্ট কোন তলে পীড়নের বর্ণনা দিতে ত্রিমাত্রিক সমকোণী নির্দেশতন্ত্র লইয়া উহার তিন অক্ষে পীড়ন S-এর তিনটি উপাংশ S_1, S_2, S_3 উল্লেখ করা চলে। একই নির্দেশতন্ত্রে δA তলের সম্পূর্ণ বর্ণনা দিতে তিন অক্ষের অভিলম্বে উহার উপাংশ তিনটি (δA_1, $\delta A_2, \delta A_3$) বলিতে হয়। যে কোন তল সাপেক্ষে পীড়নের বর্ণনা দিতে প্রত্যেক উপাংশ তলে পীড়নের তিনটি করিয়া উপাংশ উল্লেখ করিতে হইবে। মোট এই নয়টি রাশি বলিলে যে কোন তল সাপেক্ষে পীড়নের বর্ণনা সম্পূর্ণ হইবে।

উদাহরণ স্বরূপ আলোচ্য বস্তুটির ভিতর যে কোন বিন্দুকে মূল বিন্দু ধরিয়া কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র লও। মূল বিন্দুকে ঘেরিয়া অক্ষের সমান্তরালে একক বাহু বিশিষ্ট একটি ঘনক কল্পনা কর (9.32 চিত্র) ঘনকের প্রত্যেক তল ভেদ করিয়া ঘনকের বাহিরের পদার্থ ঘনকের ভিতরের অংশের পদার্থের উপর বল প্রয়োগ করিবে। ঘনকের যে কোন তলের

9.32 চিত্র

উপর ক্রিয়াশীল এই বলকে (অর্থাৎ ঐ তলে পীড়নকে) তিন অক্ষের সমান্তরাল তিনটি উপাংশে ভাগ করা যাইবে। এই উপাংশ তিনটিকে $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, বলিলেও উহারা কোন্ তলের সঙ্গে যুক্ত তাহাও বলিতে হইবে। তল যে অক্ষের অভিলম্বে সেই অক্ষের চিহ্ন দ্বারা এইরূপ তল

বুঝান হয়। তল বুঝাইবার চিহ্ন উপাংশের চিহ্নের পর বসাইলে বুঝিবার কোন অসুবিধা থাকে না। σ_{23} বলিলে বুঝাইবে z-অক্ষের অভিলম্ব তলে ক্রিয়াশীল পীড়নের y-অক্ষে উপাংশ।

এরূপ সংকেতে σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} রাশিগুলিকে পীড়নের অভিলম্ব উপাংশ (normal components of stress) বলে। কোন আলোচ্য তলের ভিতর হইতে বাহিরের দিকে ক্রিয়াশীল বলকে পজিটিভ ধরা হয়।* উপরোক্ত অভিলম্ব উপাংশগুলি পজিটিভ হইলে টান (tensile stress) বুঝায় ; নিগেটিভ হইলে বুঝায় চাপ (compressive stress)।

σ_{ij} ($i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$; $i \neq j$) রাশিগুলিকে পীড়নের কৃন্তন উপাংশ (shear components of stress) বলে। ঘনক সাম্যে থাকিলে সহজেই প্রমাণ করা যায়।

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

σ_{ij} রাশিগুলির মাত্রা [বল/ক্ষেত্রফল] $= ML^{-1}T^{-2}$। যে কোন তলে পীড়ন নয়টি σ_{ij} রাশির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। ইহাদের তিন পংক্তিতে (row) সাজান হয় :

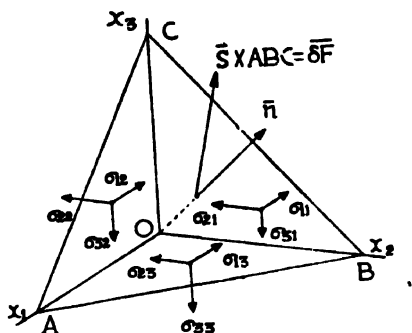
$$\begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{matrix}$$

পংক্তির প্রথম পাদাংক বলের উপাংশের অক্ষ ও দ্বিতীয় পাদাংক তলের অভিলম্ব অক্ষ বুঝায়। এই নয়টি উপাংশে একটি দ্বিতীয় জাতির টেনসর (tensor of rank two) গঠিত হয়†। ইহাকে 'পীড়ন টেনসর' বলে। $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ বলিয়া নয়টি উপাংশের কেবল ছয়টি স্বতন্ত্র। পীড়িত বস্তুর যে কোন স্বল্পাংশ তল δA ভেদ করিয়া উহার এক পাশের পদার্থ অন্য পাশের পদার্থের উপর δF বল প্রয়োগ করিলে পীড়ন টেনসর এই বল δF ও তল δA-র সম্পর্ক প্রকাশ করে।

এই সম্পর্ক পাইতে পীড়িত বস্তুর ভিতরে 9.33 চিত্রে দেখান *OABC* চতুষ্ফলক (tetrahedron) আকার অংশের সাম্য বিচার কর। *O* নির্দেশ-তন্ত্রের মূলবিন্দু এবং *OA*, *OB*, *OC* তিন সমকোণী অক্ষ। *ABC*

*স্থিতিস্থাপকতা আলোচনায় ইহাই বর্তমান প্রচলিত রীতি। কেহ কেহ ইহার বিপরীত রীতিও ব্যবহার করিয়াছেন। কাজেই পাঠককে ব্যবহৃত রীতি সম্বন্ধে সচেতন থাকিতে হইবে।

† 2-12 অনুচ্ছেদ দেখ।

আমাদের কল্পিত δA তল। δA তলে পীড়ন S হইলে δA ভেদ করিয়া যে বল ভিতরের পদার্থের উপর বাহিরের দিকে ক্রিয়া করে তাহা $S \times (ABC$-র ক্ষেত্রফল$) = S\delta A = \delta F$। Ox_1 অক্ষে ABC-র উপাংশ (অর্থাৎ Ox_1-এর লম্বতলে ABC-র অভিক্ষেপ) OBC। ABC-র বাহিরের দিকে টানা লম্বের অভিমুখে n ঐকিক ভেক্টর, এবং Ox_1, Ox_2, Ox_3 অক্ষে n-এর উপাংশ n_1, n_2, n_3 হইলে, $OBC = n_1\ ABC = n_1\ \delta A = \delta A_1$। অনুরূপে Ox_2-অক্ষে ABC-র উপাংশ $OAC = n_2\ ABC = n_2\ \delta A = \delta A_2$, এবং Ox_3-অক্ষে উপাংশ $OAB = n_3 ABC = n_3 \delta A = \delta A_3$। চতুষ্ফলকের ABC ছাড়া অন্য তলগুলিতে পীড়ন σ_{ij} উপাংশগুলির সাহায্যে দেখান হইয়াছে।

9.33 চিত্র

চতুষ্ফলক সাম্যে আছে বলিয়া Ox অক্ষে সমস্ত বলগুলির উপাংশ ধরিলে পাইব

$$\begin{aligned}
\delta F_1 &= \sigma_{11} BOC + \sigma_{12} AOC + \sigma_{13} AOB \\
&= \sigma_{11}\delta A_1 + \sigma_{12}\delta A_2 + \sigma_{13}\delta A_3
\end{aligned}$$

অনুরূপে $\quad \delta F_2 = \sigma_{21}\delta A_1 + \sigma_{22}\delta A_2 + \sigma_{23}\delta A_3$

ও $\quad \delta F_3 = \sigma_{31}\delta A_1 + \sigma_{32}\delta A_2 + \sigma_{33}\delta A_3$

মেইট্রিক্স্ (Matrix) সংকেতে উপরের সমীকরণ তিনটিকে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা হয়ঃ

$$\begin{bmatrix} \delta F_1 \\ \delta F_2 \\ \delta F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta A_1 \\ \delta A_2 \\ \delta A_3 \end{bmatrix}$$

টেনসরের সংকেতে লেখা হয়

$$\delta F_i = \sum_j \sigma_{ij}\, \delta A_j \; (i=1, 2, 3 ; \; j=1, 2, 3)$$

সম্পর্কগুলির উভয় দিক δA দিয়া ভাগ করিলে পাই

$$S_i = \sum_j \sigma_{ij}\, n_j$$

অতএব পীড়ন টেনসর σ_{ij} যে কোন তলে পীড়ন ভেক্টর S ও তল ভেক্টরের দিক্‌ n-এর সম্পর্কও প্রকাশ করে।

ততি টেনসর। অবিকৃত স্বল্পাংশ দৈর্ঘ্যের পরিবর্তনের সহিত ঐ দৈর্ঘ্যের অনুপাতই ততি, ইহা আগেই বলা হইয়াছে। উভয়েই ভেক্টর রাশি। ততি টেনসর এই দুই ভেক্টরের সম্পর্ক প্রকাশ করে।

আলোচ্য P বিন্দুর উপর দিয়া স্বল্পাংশ রেখা δx টান। বস্তুটি পীড়িত হইলে δx-এর পরিবর্তন হইবে। উহার দৈর্ঘ্য ও দিক উভয়ই বদলাইতে পারে। δx-এর পরিবর্তন δu হইলে (9.31 চিত্র) উহাদের কার্টেজীয় অক্ষে বিভক্তাংশের সম্পর্ক নিচের মত লেখা যায়ঃ

$$\delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\delta x_3$$

$$= e_{11}\,\delta x_1 + e_{12}\, dx_2 + e_{13}\,\delta x_3$$

এবং $$\delta u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\delta x_3$$

$$= e_{21}\,\delta x_1 + e_{22}\,\delta x_2 + e_{23}\,\delta x_3$$

ও অনুরূপে $\delta u_3 = e_{31}\,\delta x_1 + e_{32}\,\delta x_2 + e_{33}\,\delta x_3$

সংক্ষেপে লিখিলে

$$\delta u_i = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j = \sum_j e_{ij}\,\delta x_j (i=1, 2, 3 ; \; j=1, 2, 3)$$

নয়টি e_{ij} রাশি পীড়নের মত দ্বিতীয় জাতির একটি টেনসর গঠন করে। $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij}+e_{ji})$ রাশি নয়টি দিয়াও দ্বিতীয় জাতির একটি টেনসর গঠিত হয়। ইহাকেই 'ততি টেনসর' (strain tensor) $[\epsilon_{ij}]$ বলে। ততি টেনসর হইল

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} e_{11} & \frac{1}{2}(e_{12}+e_{21}) & +\frac{1}{2}(e_{13}+e_{31}) \\ \frac{1}{2}(e_{12}+e_{21}) & e_{22} & \frac{1}{2}(e_{23}+e_{32}) \\ \frac{1}{2}(e_{13}+e_{31}) & \frac{1}{2}(e_{23}+e_{32}) & e_{33} \end{bmatrix}$$

ইহার কর্ণীয় উপাংশ (diagonal components) e_{11}, e_{22}, e_{33} হইল টানের তাঁত (tensile strains)। অন্যগুলি কৃন্তন তাঁত। পীড়ন টেনসরের মত এখানেও $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$। অতএব ছয়টি স্বতন্ত্র রাশি দিয়া তাঁত টেনসর নির্দিষ্ট হয়।

e_{ij}-এর বদলে ϵ_{ij}-কে তাঁত টেনসর বলার কারণ আছে। বস্তু কোন অক্ষে আবর্তিত হইলেও উহার স্বল্পাংশ দৈর্ঘ্য δx-এর পরিবর্তন হয়, কারণ δx-এর মান না বদলাইলেও দিক্ বদলায়। e_{ij}-তে আবর্তনজনিত দৈর্ঘ্য পরিবর্তন হিসাবে আসে। কিন্তু আবর্তনে পীড়নও নাই তাঁতও নাই। অতএব e_{ij} হইতে আবর্তনজনিত পরিবর্তন বাদ দেওয়া দরকার। $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji})$ লইলে উহা বাদ যায়।

পীড়ন ও তাঁত টেনসরের সম্পর্ক একটি চতুর্থ জাতির টেনসর দিয়া প্রকাশিত হয়। ইহার 81-টি উপাংশ হইলেও স্বতন্ত্র উপাংশের সংখ্যা মাত্র 36-টি হইবে, কারণ পীড়ন ও তাঁত টেনসরের মাত্র ছয়টি করিয়া স্বতন্ত্র উপাংশ। পদার্থের গঠনে কোনরকম প্রতিসাম্য না থাকিলেও ইহার মাত্র 21-টি আসলে স্বতন্ত্র হয়। কেলাসের প্রতিসাম্য (crystalline symmetry) থাকিলে স্বতন্ত্র উপাংশের সংখ্যা 21-এর কম হয়। পদার্থ সমদৈশিক (isotropic) হইলে স্বতন্ত্র উপাংশগুলি ইয়ং গুণাংক (E), কৃন্তন গুণাংক (G) ও পোয়াসঁর অনুপাত (μ) রাশি তিনটির যে কোন দুইটির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। কিন্তু এ সকল আলোচনা আমাদের গণ্ডীর বাহিরে।

প্রশ্ন

1. পীড়ন কাহাকে বলে বুঝাইয়া বল। পীড়ন, তাতি ও স্থিতিস্থাপক গুণাংকের মাত্রা কাহার কি হইবে দেখাও।

মৌলিক পীড়ন ও তাতি কি কি? উহাদের প্রকৃতি বুঝাইয়া বল।

পীড়ন ও তাতির সাহায্যে আদর্শ স্থিতিস্থাপকতার কি সংজ্ঞা দিতে পার?

2. তাতি-পীড়ন বক্র কাহাকে বলে? 'তথাকথিত' ও 'যথার্থ' তাতি-পীড়ন বক্রে সম্বন্ধ কি?

তাতি পীড়ন বক্রের সাহায্যে 'স্থিতিস্থাপকতার সীমা', স্থায়ীবৃদ্ধি', 'চরম পীড়ন' 'পরাভব বিন্দু' কাহাদের বলে বুঝাইয়া বল।

বিকৃতি 'স্থিতিস্থাপক' ও বিকৃতি 'নমনীয়' বলিতে কি বুঝায়? 'মধ্যকৃশন' কি? ইহা কোন্ অবস্থায় হয়।

3. সমসত্ত্ব, সমদৈশিক পদার্থের স্থিতিস্থাপকতা সংক্রান্ত প্রয়োজনীয় রাশি চারটি কি কি? উহাদের সংজ্ঞা দাও, এবং উহাদের মধ্যে সম্পর্ক বাহির কর।

প্রমাণ কর উপরোক্ত প্রকার পদার্থে পোয়াস'র অনুপাত $\frac{1}{2}$ হইতে -1-এর মধ্যে থাকিবে।

4. সমসত্ত্ব, সমদৈশিক পদার্থে ইয়ং গুণাংক E, কৃন্তন গুণাংক G, আয়তন বিকার গুণাংক K ও পোয়াস' অনুপাত μ-র যে কোন দুটি জানা থাকিলে উহা হইতে অন্য দুটি কিভাবে পাওয়া যায় বাহির কর।

5. টানের তাতি প্রয়োগে প্রস্থের তাতি (ক) বিনা বাধায় ঘটিতে দিলে, এবং (খ) একেবারে না ঘটিতে দিলে পীড়ন ও তাতির অনুপাতে দুই ক্ষেত্রে কি সম্পর্ক থাকিবে?

6. R ব্যাসার্ধের l দৈর্ঘ্যের তারকে এক রেডিয়ান মোচড় দিতে কত টর্কের প্রয়োজন হইবে হিসাব কর। এইরূপ তারে ঝুলান কোন দৃঢ়বস্তুর ব্যাবর্তন দোলনের দোলনকাল বাহির কর, এবং ইহার সাহায্যে ঐ বস্তুর জাড্য-ভ্রামক কি করিয়া মাপা যায় বল। এই ভ্রামক কোন্ অক্ষে পাওয়া?

7. স্থিতিস্থাপকতার 'সমোষ্ণ' ও 'রুদ্ধতাপ' গুণাংক বলিতে কি বুঝায়? আদর্শ গ্যাসে আয়তন বিকারের এই দুই প্রকার গুণাংকের সম্পর্ক বাহির কর।

8. কৃন্তনকে কিভাবে একদিকে টান ও উহার সমকোণে সমান চাপের সমান মনে করা যায় বুঝাইয়া বল। এই টান বা চাপের তাতির সঙ্গে কৃন্তনের তাতির সম্পর্ক বাহির কর।

টানের, আয়তন বিকারের ও কৃন্তনের তাতি ঘটিলে প্রমাণ কর যে প্রত্যেক ক্ষেত্রেই বিকৃত বস্তুতে বিকারজনিত স্থিতিশক্তির ঘনত্ব $= \frac{1}{2} \times$ পীড়ন $\times$ তাতি।

9. দ্বন্দ্ব প্রয়োগে কোন সুষম বীম বাঁকাইলে উহাতে কি প্রকার অভ্যন্তরীণ বলের সৃষ্টি হয় আলোচনা কর, এবং বীমের কোন ছেদে ইহারা যে অভ্যন্তরীণ দ্বন্দ্ব সৃষ্টি করে তাহার ভ্রামকের মান বাহির কর।

বক্রণের জন্য বীমের স্থিতিশক্তি কত হইবে হিসাব কর।

10. অনুভূমিক সুষম বীমের বক্রণে বীমের কোন ছেদে কৃন্তন বল, অভ্যন্তরীণ টর্ক ও বীমের ভারে কি সম্পর্ক হয় বাহির কর। ভারী ক্যাণ্টীলিভারের প্রান্তে W ভার থাকিলে মধ্য বিন্দুতে নমন কত হইবে হিসাব কর।

11. ক্যাণ্টিলিভারের আবদ্ধ প্রান্ত হইতে a দূরত্বে W ভার থাকিলে উহার প্রান্তে যে নমন হইবে, দেখাও যে প্রান্তে W ভার থাকিলে a দূরত্বে সেই নমন হইবে। W-র তুলনায় ক্যাণ্টীলিভারের ভার উপেক্ষা কর।

[সংকেত : $0<x<a$ হইলে x ছেদে $EID^2y=W\ (a-x)$। ইহার জন্য a বিন্দুতে নমন $(y)_a=(W/3EI)a^3$। a-তে $Dy=(W/2EI)a^2$। বীমের a হইতে l অংশ এই নতিতে থাকিবে বলিয়া বীমের প্রান্ত a বিন্দু সাপেক্ষে $(l-a)\ Dy$ পরিমাণ নিচে থাকিবে। অতএব বীমের মুক্ত প্রান্তের মোট নতি $(y)_a+(l—a)\ Dy$। W ভার বীমের প্রান্তে থাকিলে a বিন্দুতে নমন ইহাই হইবে দেখাইয়া দাও।]

12. আয়ত ছেদের বীমের বংকনে উহার প্রস্থের দিকের তাতি গণনায় লইলে বাঁকা বীমের স্বল্পাংশের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের দিকে যে বিপরীত বক্রতা হইবে তাহাদের ব্যাসার্ধ দুটির অনুপাত বাহির কর।

কর্ণুর উপায়ে কি করিয়া বীমের পদার্থের পোয়াস' অনুপাত মাপিবে বুঝাইয়া বল।

13. কোন সুষম অনুভূমিক বীম দুই প্রান্তে ক্ষুরধারের উপর রাখা আছে।

(ক) কেবল নিজের ভারে উহার মধ্য বিন্দুতে নমন কত হইবে ?

(খ) মধ্য বিন্দুতে বীমের ওজনের সমান ভার চাপাইলে পূর্বের তুলনায় নমন কত বাড়িবে ? [উত্তর : 5 : 13 অনুপাতে]

14. কোন সুষম অনুভূমিক বীমের উভয় প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ।

(ক) কেবল নিজের ভারে মধ্য বিন্দুতে উহার নমন কত হইবে ?

(খ) মধ্য বিন্দুতে বীমের ওজনের সমান ভার চাপাইলে পূর্বের তুলনায় নমন কত বাড়িবে ? [উত্তর : 1 : 3 অনুপাতে]

15. মুক্তপ্রান্ত বীম নিজের ভারে মধ্য বিন্দুতে যতটা দাবে, উভয় প্রান্ত আবদ্ধ হইলে দাবে তাহার পঞ্চমাংশ, ইহা প্রমাণ কর।

16. সার্লের উপায়ে কোন তারের পদার্থের পোয়াস' অনুপাত কিভাবে বাহির করিবে তত্ত্বসমেত বুঝাইয়া বল। এই পরীক্ষায়ই ইয়ং গুণাংক ও কৃন্তন গুণাংক কিভাবে পাওয়া যাইবে ?

17. ঘনকুণ্ডলিত স্প্রিং-এ খাড়াভাবে ঝুলান ভারের দোলনকাল স্প্রিং-এর ভার (ক) উপেক্ষা করিয়া ও (খ) উপেক্ষা না করিয়া হিসাব কর।

স্থিতিস্থাপকতা

18. বক্র কুণ্ডলিত স্প্রিং-এর ক্রিয়া আলোচনা কর।

$E>2G$ হইলে এরূপ স্প্রিং-এ টান দিলে উহা আরও পাকাইতে চাহিবে প্রমাণ কর।

19. $2l$ দৈর্ঘ্যের অনুভূমিক সুষম বীম উহার উভয় প্রান্ত হইতে a দূরত্বে ক্ষুরধারের উপর রাখা আছে। উভয় প্রান্তে সমান ভার W ঝুলাইলে বীমের মধ্যবিন্দু সাপেক্ষে একপ্রান্তের নতি কত হইবে?

20. পীড়ন ও তাতি কি জাতীয় রাশি আলোচনা কর।

21. হুক সূত্রের অধীন দণ্ডে উহার অভিলম্বে A বিন্দুতে P বল প্রয়োগ করিলে B বিন্দুতে যে সরণ হইবে, প্রমাণ কর যে B বিন্দুতে একই P বল প্রয়োগ করিলে A বিন্দুতেও সেই সরণ হইবে।

22. লম্বা দণ্ডে কৃন্তনজনিত নমন বংকনজনিত নমনের তুলনায় উপেক্ষণীয় ইহা প্রমাণ কর।

23. একই অনুভূমিক তলে দুই সমান্তরাল ক্ষুরধারের উপর আধৃত প্রান্ত সুষম দণ্ডের ক্ষেত্রে $EID^4y=W$ সমীকরণের পৌনঃপুনিক সমাকলনে মধ্যবিন্দুতে y কত হিসাব কর।

[সংকেত—9-10.1 অনুচ্ছেদের শেষে পাদ টীকায় ক্যান্টিলিভারের ক্ষেত্রে এরূপ করা হইয়াছে। তা ছাড়া 9-10.2 অনুচ্ছেদ ও 9-10.5 অনুচ্ছেদের (7) অংশ দেখ]

24. লম্বকুণ্ডলিত স্প্রিং-এর কৌণিক দোলন (ব্যাবর্তন দোলন) আলোচনা কর।

দশম পরিচ্ছেদ

পৃষ্ঠ-টান

(Surface tension)

10-1. তরলের পৃষ্ঠটান। সকল তরলেরই একটি বিশেষ ধর্ম আছে—তরলপৃষ্ঠ সর্বদাই সংকুচিত হইতে চায়। এবং পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল যতটা পারে কমাইতে চায়। তরলের এই ধর্মকে 'পৃষ্ঠটান' বলে।

একই ভরের বস্তুকে বিভিন্ন আকার দিলে, বিভিন্ন আকারে উহার পৃষ্ঠের মোট ক্ষেত্রফল বিভিন্ন হয়। আকার গোলক হইলে পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল সবচেয়ে কম হয়। তরল তাহার পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কমাইয়া সবচেয়ে কম করিতে চায় বলিয়া, অন্য বল ক্রিয়া না করিলে তরল গোলকের আকার নেয়। পারার ছোট ছোট কণাগুলি আকারে প্রায় সম্পূর্ণ গোল। কণার ভার উহার ভারকেন্দ্র নামাইতে প্রয়াস পায়; তরল নিজের আকার গোল রাখিতে চায়। এই দুই বিপরীত প্রয়াসে সাম্যাবস্থায় কণার ভারকেন্দ্র একটু নামিয়া আসে এবং কণাকে একটু চেপ্টা দেখায়। বড়গুলি বেশী চেপ্টা হয়, ছোটগুলি কম।

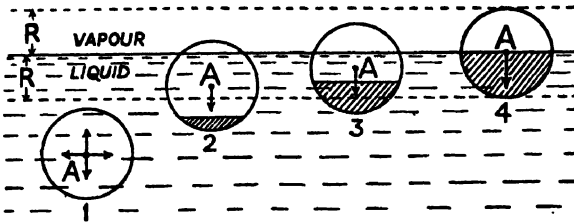
ভারের ক্রিয়া দূর করিতে পারিলে তরলের আকার গোল হবে। ইহা দেখাইতে একটি সহজ পরীক্ষা করা যায়। জলপাইয়ের তেলের ঘনত্ব জল আর কোহলের মাঝামাঝি। জলে উপযুক্ত পরিমাণ কোহল মিশাইয়া মিশ্রণের ঘনত্ব ঠিক জলপাইয়ের তেলের সমান করিয়া, খানিকটা তেল উহাতে ফেলিয়া দিলে তেল সম্পূর্ণ গোলকের আকার লইবে। মিশ্রণের ঊর্ধ্বচাপ তেলের ভারকে সম্পূর্ণ প্রতিমিত করে বলিয়া তরলের আকার গোল হইতে বাধা থাকে না।

কুয়াশার জলকণা আকারে গোল; বৃষ্টি যখন পড়ে তখন বারিবিন্দুগুলি প্রায় গোল। সীসার গুলি বানাইতে গলান সীসা একটি ছাঁকনির ভিতর দিয়া জলে ফেলা হয়। পৃষ্ঠটানের জন্য তরল সীসা আকারে গোল হয়, এবং জলের মধ্য দিয়া পড়িতে জমিয়া কঠিন হয়।

কাটা বা ভাঙ্গা কাচের নলের পাশগুলি খুব ধারাল হয়। তাপে গলাইলে তরল কাচের পৃষ্ঠটানে ধারাল অংশগুলি গোল হইয়া যায়। যে তরলের পৃষ্ঠটান কম তাহা সহজে ছড়ায়। সাবান গোলা জলের পৃষ্ঠটান জলের চেয়ে কম। এই কারণে কোন দ্রবণ স্প্রে করিতে হইলে উহাতে সাবান জল

মেশান হয়। রং বা ঝালাই করার রাং ভাল ছড়াইবে কিনা তাহা উহার পৃষ্ঠটানের উপর নির্ভর করে। পৃষ্ঠটানের জন্য ছাতা বা তাঁবুর কাপড়ের মধ্য দিয়া জল যায় না। বৃষ্টির সময় ছাতা বা তাঁবুর ভিতরের দিক স্পর্শ করিলে ঐখানে পৃষ্ঠটান কমায় জল ভিতরে ঢোকে।

10-2. তরলের পৃষ্ঠটানের আণবিক ব্যাখ্যা (Molecular theory of surface tension)। একই পদার্থের বিভিন্ন অণুর মধ্যে আকর্ষক বল ক্রিয়া করে। এই বলই পদার্থের বিভিন্ন অংশকে একত্র ধরিয়া রাখে, এবং ইহাকে 'সংসক্তি' (Cohesion) বলে। এক পদার্থ অন্য পদার্থের সংস্পর্শে থাকিলে স্পর্শতলের দুই পাশের দুই বিভিন্ন প্রকার অণুও পরস্পরকে টানে। এই বলকে 'আসঞ্জন' (Adhesion) বলে। কাচের অণুগুলির সংসক্তির জন্য কাচের থালার আকার ঠিক থাকে, থালা ভাঙ্গিয়া পড়ে না। থালার গায়ে তেল লাগিয়া থাকে কাচ ও তেলের অণুগুলির আসঞ্জনের জন্য। সংসক্তি ও আসঞ্জন মহাকর্ষজনিত বল নয়; ইহাদের ক্রিয়ার পাল্লা কার্যতঃ প্রায় 10^{-7} cm অঞ্চলের মধ্যে সীমাবদ্ধ।

তরলের অণুগুলির মধ্যে আকর্ষক বল থাকিলে তরল পৃষ্ঠ যে গুটাইতে চাহিবে তাহা সহজেই বোঝা যায়। দূরত্ব বাড়িলে সংসক্তি অতি দ্রুত কমে; দূরত্ব r-এর সহিত ইহার মান $1/r^7$-এর মত বা আরও দ্রুত কমে।

10.1 চিত্র

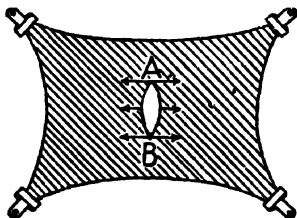
(মহাকর্ষ কমে $1/r^2$-এর মত।) অণুগুলি খুব কাছাকাছি থাকিলে সংসক্তি প্রবল, কিন্তু দূরত্ব কিছুটা বাড়িলেই সংসক্তি অত্যন্ত কমিয়া যায়। সুবিধার জন্য আমরা ধরিব সংসক্তির বল খানিকটা দূর অবধি ক্রিয়া করে এবং তাহার বাহিরে উহা নিষ্ক্রিয়। এই দূরত্ব R-কে আণবিক ক্রিয়ার পাল্লা (Range of molecular action) বলা হয়। ইহার মান প্রায় 10^{-7} cm। কোন বিশেষ অণুকে কেন্দ্র করিয়া R ব্যাসার্ধের গোলক কল্পনা করিলে,

উপরোক্ত কল্পনা অনুসারে, অণু ঐ গোলকের ভিতরে অবস্থিত সকল অণুর আকর্ষণে পড়িবে, কিন্তু উহার উপর গোলকের বাহিরের কোন অণুর ক্রিয়া থাকিবে না।

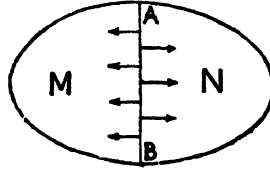
তরল পৃষ্ঠ হইতে যে অণুগুলি R অপেক্ষা বেশী নিচে, তাহাদের ঘেরিয়া টানা R ব্যাসার্ধের গোলক সম্পূর্ণ তরলের ভিতরেই থাকিবে (10.1 চিত্র)। কেন্দ্রের অণুর উপর গোলকের অন্যান্য অণুগুলির টান সব দিকেই সমান হওয়াতে কেন্দ্রের অণু সংসক্তির জন্য কোন দিকে কোন অপ্রতিমিত (unbalanced) টান অনুভব করিবে না। কিন্তু যে অণু তরল পৃষ্ঠ হইতে R দূরত্বের মধ্যে আছে, তাহার উপর নিচের দিকে, অর্থাৎ তরলের ভিতর দিকে, টান ক্রিয়া করিবে। ইহার কারণ এই যে ঐরূপ অণুকে ঘেরিয়া আঁকা সংসক্তিগোলকের এক অংশ তরলের বাহিরে পড়িবে। বাহিরের অংশে তরল নাই; অতএব ঠিক ঐ সমান নিচের অংশের টান প্রতিমিত হইবে না, এবং কেন্দ্রীয় অণুর উপর এই বল ক্রিয়া করিবে। 10.1 চিত্র হইতে বোঝা যাইবে, অণু তরল পৃষ্ঠের যত কাছে উহার উপর ভিতরের দিকে টান তত বেশী। দেখা যায়, সংসক্তির জন্য তরল পৃষ্ঠে R বেধের স্তরের সকল অণুর উপর নিচের দিকে, পৃষ্ঠের অভিলম্বে, একটা টান ক্রিয়া করে।

প্রশ্ন হইতেছে তরল পৃষ্ঠের অণুগুলির উপর এই অতিরিক্ত বলের ফল কি হইবে। অতিরিক্ত আকর্ষণের জন্য পৃষ্ঠস্থ অণু ভিতরের দিকে যাইতে চেষ্টা করিবে ও নিকটস্থ অণুর সহিত উহার দূরত্ব কিছুটা কমিয়া যাইবে। দূরত্ব কমিলে আণবিক বিকর্ষণ প্রবল হয় ও তখন সাম্যাবস্থার সৃষ্টি হয় (9-2.1 অনুচ্ছেদের (ক) অংশে শেষ দুইটি প্যারা দেখ)। এই কারণে তরল পৃষ্ঠের অণুগুলি ভিতরের অণুগুলির তুলনায় পরস্পরের বেশী কাছে থাকে ও এই অবস্থা সৃষ্টির জন্য তরল পৃষ্ঠে বেশী শক্তি সঞ্চিত থাকে। তরল পৃষ্ঠের আয়তন যত বাড়িবে পৃষ্ঠে সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ তত বাড়িবে। স্থিতিশক্তি অবম (minimum) হইলে তবেই কণা-সমষ্টি সাম্যাবস্থায় আসে—ইহাই কণাসমষ্টির সাম্যের সাধারণ নিয়ম (4-10 অনুচ্ছেদ)। ফলে তরল পদার্থের সাম্যাবস্থায় তরল পৃষ্ঠের ক্ষেত্রতল অবম হইতে চেষ্টা করে। ক্ষেত্রফলের এই সংকোচন প্রবণতা হইতেই তরলে পৃষ্ঠটানের উৎপত্তি হয়।

রবারের টানা দেওয়া পাত বা ফোলান বেলুনও নিজ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কমাইতে চায়। এই ঘটনার সহিত তরল পৃষ্ঠের আচরণের সাদৃশ্য দেখিয়া তরল পৃষ্ঠকে অনেক সময়ই টানা দেওয়া পাতলা রবার পাতের সঙ্গে তুলনা করা হয়।

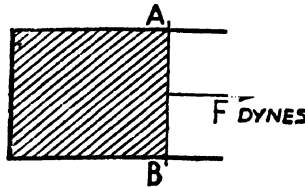
উপরোক্ত সাদৃশ্যের অনেক উদাহরণ দেওয়া যায়। টিসিউ কাগজে (tissue paper) চর্বি বা তেলের স্পর্শহীন ছুঁচ বা ক্ষুরের ব্লেড রাখিয়া কাগজ জলের উপর ভাসাইলে, কাগজ আস্তে আস্তে ডুবিয়া যায়; কিন্তু ছুঁচ বা ব্লেড জলে ভাসিতে থাকে। অনেক পোকা জলের উপর দিয়া হাঁটিতে পারে। জলের পৃষ্ঠটান উহাদের ভার ধারণ করে। যেখানে ছুঁচ বা ব্লেড ভাসে, বা পোকার পা পড়ে, সেখানে জলের পৃষ্ঠতল একটু নিচু হয়। টানা দেওয়া রবারের পাতের উপর কিছু রাখিলে সেখানটা যেমন একটু নিচু হয়, এও তাই। কর্পূরের ছোট ছোট টুকরা পরিষ্কার জলে ফেলিলে উহারা এলোমেলোভাবে জলের উপর ছুটাছুটি করে। টুকরার কোনাগুলিতে কর্পূর তাড়াতাড়ি গলে, এবং ঐ স্থানে জলের পৃষ্ঠটান কমিয়া যায়। ইহাতে কোনার বিপরীত দিকের জলের পৃষ্ঠটান উহাকে নিজের দিকে টানিয়া আনে। জলের উপর হালকা কোন গুঁড়া ছড়াইয়া দিয়া মাঝখানে এক ফোঁটা কোহল ফেলিলে, কোহলের স্পর্শে জলের পৃষ্ঠটান কমায় গুঁড়াগুলি ঐ স্থান হইতে দূরে সরিয়া যায়।

10.2 চিত্র

পৃষ্ঠটানের সংজ্ঞা। টানা দেওয়া রবার পাতে বল স্পার্শিক, অর্থাৎ পাতের তলে। পাতের উপরে কল্পিত কোন রেখা ধরিলে উহার এক পাশের পাত অন্য পাশের পাতের উপর রেখার আড়াআড়ি টান দিয়া উহাকে ধরিয়া রাখিয়াছে বলিয়া বোঝা যায়। চিড়িয়া দিলে দুপাশে পাত সরিয়া যায় (10.2 চিত্র)। তরলের পৃষ্ঠে R বেধের স্তরের ক্রিয়াও এইরূপ বলিয়া ধরা যায়। পৃষ্ঠের উপর কল্পিত একটি রেখা ধরিলে (10.3 চিত্র) রেখার এক পাশের অংশ অন্য পাশের অংশকে রেখার আড়াআড়ি টানিতেছে বলিয়া বুঝিতে হইবে। এইরূপ কল্পিত রেখার আড়াআড়ি প্রতি একক দৈর্ঘ্যে যে টান ক্রিয়া করে তাহাকে তরলের **পৃষ্ঠটান** বলে। পৃষ্ঠটান সিজিএস পদ্ধতিতে dyne/cm এককে, এবং এমকেএস পদ্ধতিতে newton/metre এককে প্রকাশ করা হয়।

তরল পৃষ্ঠের এক অংশ যেমন উহার সংস্পর্শে অবস্থিত অন্য অংশকে টানে, তেমনই অন্য কোন বস্তু উহার সংস্পর্শে থাকিলে তাহাকেও ঐভাবে টানিবে। সাবানের ঝিল্লীর (film) উপর রেশমী সুতার ফাঁস ফেলিয়া

10.3 চিত্র

সু'চ দিয়া ঝিল্লীর মাঝখানে ছে'দা করিয়া দিলে ঝিল্লীর পৃষ্ঠটানে ফাঁস গোল হইয়া যাইবে। সুতার উপর টান সর্বত্র সমান ও উহার অভিলম্বে বলিয়া ফাঁসের আকার গোল হয়।

তরলের পৃষ্ঠটান আলোচনায় উহার পৃষ্ঠের *R* বেধের স্তরের কথা মনে রাখিয়া নিচের তরলকে ভুলিয়া যাওয়া চলে। স্তরে বল স্পার্শক, এরূপ কল্পনায় আলোচনার সুবিধা হয়।

10-3. পৃষ্ঠটান ও পৃষ্ঠের স্থিতিশক্তি (Surface tension and Surface energy)। তরল পৃষ্ঠের *R* বেধের স্তরের অণুগুলির উপর তরলের ভিতরের দিকে টান আছে। ভিতর হইতে পৃষ্ঠে আসিতে এই টানের বিরুদ্ধে অণুগুলিকে চলিতে হয়; কাজেই উপরের স্তরের অণুগুলির স্থিতিশক্তি তরলের ভিতরের অণুগুলির তুলনায় বেশী। তরল

10.4 চিত্র

পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল বাড়াইলে বা নূতন পৃষ্ঠতল সৃষ্টি করিলে টানের বিরুদ্ধে কার্য হইবে, এবং এই কার্য নূতন পৃষ্ঠতলে স্থিতিশক্তিরূপে সঞ্চিত থাকিবে।

কল্পিত একটি সহজ পরীক্ষায় এই কার্যের মান পাওয়া যায়। তারের একটি চৌকা কাঠামো অনুভূমিক করিয়া রাখা হইল (10.4 চিত্র)। উহার *AB* বাহু অন্য দুই বাহুর উপর দিয়া বিনা ঘষায় সরিতে পারে। চৌকার

মধ্যের অংশে কোন তরলের পাতলা ঝিল্লী গড়া হইল। এই স্তর গুটাইয়া ছোট হইতে চাহিবে এবং AB-কে টানিয়া লইবে। AB-কে স্বস্থানে রাখিতে হইলে উহার অভিলম্বে মনে কর F বল প্রয়োগ করিতে হয়। ঝিল্লীর দুই পিঠ। প্রত্যেক পিঠ AB-র একক দৈর্ঘ্যের উপর γ টান প্রয়োগ করে (γ তরলের পৃষ্ঠটান*)। AB-র দৈর্ঘ্য l হইলে $F=2\gamma.l$। F-কে নিজের ক্রিয়ামুখে স্বল্প দূরত্ব δx সরান হইল। ইহাতে পৃষ্ঠটানের বিরুদ্ধে মোট $F\delta x=2\gamma.l\delta x$ কার্য করা হয়, এবং পৃষ্ঠতল $2l\delta x$ পরিমাণ বাড়ে (ঝিল্লীর দুই পিঠ মনে রাখিও)। অতএব প্রতি একক ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির জন্য কৃত কার্যের পরিমাণ $2\gamma l\delta x/2l\delta x=\gamma$। নবগঠিত পৃষ্ঠতলে এই কার্য স্থিতিশক্তিরূপে থাকে। দেখা গেল পৃষ্ঠটানের মান পৃষ্ঠের প্রতি একক ক্ষেত্রফলের স্থিতিশক্তির সমান। অতএব পৃষ্ঠটান γ-কে erg/cm² বা joule/m² এককেও প্রকাশ করা যায়। মনে রাখিতে হইবে এক্ষেত্রে উষ্ণতা একই আছে বলিয়া ধরা হইয়াছে। নহিলে γ-র মান বদলাইত।

পৃষ্ঠটানের বিকল্প সংজ্ঞা। স্থিতিশক্তির সহিত পৃষ্ঠটানের সম্পর্ক বিচার করিয়া পৃষ্ঠটানের অন্য একটি সংজ্ঞাও দেওয়া যাইতে পারে। উষ্ণতা স্থির রাখিয়া তরলপৃষ্ঠ এক বর্গক্ষেত্র পরিমিত বাড়াইতে যে যান্ত্রিক শক্তি ব্যয় হয় তাহাকে ঐ উষ্ণতায় তরলের **পৃষ্ঠটান** বলে। উষ্ণতা স্থির রাখিয়া তরলপৃষ্ঠ 1 cm² বাড়াইতে γ erg/cm² কার্যের প্রয়োজন হইলে γ erg/cm²-ই তরলের পৃষ্ঠটান। এই কার্য তরল পৃষ্ঠে স্থিতিশক্তিরূপে থাকে। কিন্তু ইহাই তরলপৃষ্ঠের সম্পূর্ণ স্থিতিশক্তি নয় (10-3.1 অনুচ্ছেদ দেখ)।

পৃষ্ঠটানকে বল মনে না করিয়া স্থিতিশক্তি মনে করিলেও দেখা যায় তরল পৃষ্ঠের সংকোচন প্রয়াস থাকিবে। স্থিতিশক্তির ধর্ম উহা অবম (minimum) হইতে চায়। অতএব তরল পৃষ্ঠ স্থিতিশক্তি কমাইবার প্রয়াসে ছোট হইতে চায়। নির্দিষ্ট ভরে গোলকের পৃষ্ঠতল সবচেয়ে কম বলিয়া তরলের প্রয়াস হয় গোলকের আকার নেওয়া। ইহা আমরা প্রথমেই আলোচনা করিয়াছি।

প্রশ্ন। 1 mm ব্যাসের এক ফোঁটা জলকে একই উষ্ণতায় সমান আকারের 10^6 গোল কণায় ভাগ করা হইল। নূতন পৃষ্ঠতল সৃষ্টিতে কি পরিমাণ যান্ত্রিক কার্য হইবে? জলের পৃষ্ঠটান 74 dyn/cm।

[উত্তর : 230 erg]

---

* পৃষ্ঠটানের আন্তর্জাতিক শংসিত (recommended) চিহ্ন γ বা σ। আমরা γ ব্যবহার করিব।

কঠিন ও গ্যাসের পৃষ্ঠটান। পদার্থের পৃষ্ঠস্থ অণুগুলির উপর অন্তর্মুখী টানের জন্য পৃষ্ঠের স্বল্পবেধের (কয়েক আণবিক ব্যাস বেধের) স্তরের অবস্থা ভিতরের পদার্থের অবস্থা হইতে একটু পৃথক থাকে। তরলে যে কারণে পৃষ্ঠটান ঘটে, কঠিন পদার্থ ও গ্যাসে একই কারণ বর্তমান। অতএব কঠিন পদার্থে এবং গ্যাসেও পৃষ্ঠটান আছে ধরিতে হইবে।

কোন পদার্থের পৃষ্ঠের এক পাশে অন্য কোন পদার্থ না থাকিলে উহার যে পরিমাণ পৃষ্ঠটান (বা প্রতি একক ক্ষেত্রের যান্ত্রিক স্থিতিশক্তি) হইবে, অন্যদিকে অন্য কোন পদার্থ থাকিলে পৃষ্ঠটান কম বেশী বদলাইবে, ইহা সহজেই বোঝা যায়। কাজেই কঠিন-তরল, তরল-গ্যাস বা কঠিন-গ্যাসের বিভেদ-তলে পৃষ্ঠটান বিভিন্ন প্রকার হইবে। সংস্পর্শে অবস্থিত দুই তরলের বিভেদতলেও পৃষ্ঠটান ক্রিয়া করিবে। ইহাকে 'আন্তঃপৃষ্ঠ পৃষ্ঠটান' (Interfacial surface tension) বলে।

সংসক্তি ও আসঞ্জনজনিত বলের প্রকৃতি সঠিক জানা না থাকায় পৃষ্ঠ-টানের সম্পূর্ণ ব্যাখ্যা এখনও আয়ত্তের বাহিরে রহিয়া গিয়াছে। তরল পৃষ্ঠের আচরণ তরল পৃষ্ঠে কল্পিত স্পার্শিক বলের সাহায্যে অথবা পৃষ্ঠের যান্ত্রিক স্থিতিশক্তি পরিবর্তনের সাহায্যে আলোচনা করা যায়। পৃষ্ঠটান সংক্রান্ত ঘটনার ব্যাখ্যায় বল বা শক্তির মধ্যে যেটির প্রয়োগে ব্যাখ্যা সহজ হয়, সেটিই সাধারণতঃ নেওয়া হয়। বলের সাহায্যে ব্যখ্যার তুলনায় শক্তির সাহায্যে ব্যাখ্যার ভিত্তি দৃঢ়তর, কারণ বলের কল্পন শক্তির কল্পনের তুলনায় হীনতর।

পৃষ্ঠটানের মাত্রা। পৃষ্ঠটানের দুই প্রকার সংজ্ঞা হইলেও উভয় সংজ্ঞা যদি একই জিনিস বুঝাইতে চায় তাহা হইলে উভয় ক্ষেত্রে মাত্রা একই হওয়া উচিত। প্রথম সংজ্ঞা অনুসারে

$$\text{পৃষ্ঠটান} = \frac{\text{বল}}{\text{দৈর্ঘ্য}} = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$$

দ্বিতীয় সংজ্ঞা অনুসারে

$$\text{পৃষ্ঠটান} = \frac{\text{শক্তি}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2} = MT^{-2}$$

দেখা যায়, উভয় ক্ষেত্রে মাত্রা একই।

10-3.1. তরলপৃষ্ঠের মোট শক্তি (Total surface energy)। তরলের পৃষ্ঠটান γ dyn/cm হইলে উহার উষ্ণতা স্থির রাখিয়া পৃষ্ঠতল এক বর্গক্ষেত্র বাড়াইতে মোট শক্তির পরিমাণ γ erg/cm^2 অপেক্ষা আসলে কিছু বেশী হইবে। পৃষ্ঠতল বাড়াইতে তরলের ভিতর হইতে পৃষ্ঠে যে

অণুগুলি আসে তাহাদের স্থিতিশক্তি বাড়ায় গতিশক্তি কমে। উষ্ণতা গড় গতিশক্তির সমানুপাতিক বলিয়া ইহাতে তরলের উষ্ণতা কমিবে। উষ্ণতা ঠিক রাখিতে হইলে আশপাশ হইতে তরলে তাপ প্রবেশ করিতে দিতে হইবে। অতএব উষ্ণতা স্থির রাখিয়া পৃষ্ঠতল বাড়াইলে দুইভাবে শক্তি জোগাইতে হইবে—(ক) পৃষ্ঠতল গঠনের যান্ত্রিক (mechanical) শক্তি ও (খ) উষ্ণতা স্থির রাখিবার জন্য তাপ। প্রতি একক বর্গক্ষেত্রের জন্য (ক)-এর পরিমাণ γ ও (খ)-এর পরিমাণ h হইলে, প্রয়োজনীয় মোটশক্তি E-র মান

$$E = \gamma + h.$$

তাপগতিবিজ্ঞান (Thermodynamics) প্রয়োগে h-এর মান হিসাব করা যায়। আলোচ্য উষ্ণতা $T°$K হইলে দেখা যায়

$$h = -T\frac{d\gamma}{dT}\text{*}$$

* জিজ্ঞাসু পাঠকের কৌতূহল নিবৃত্তির জন্য এখানে একটি প্রমাণ দেওয়া হইল। তাপগতি বিজ্ঞানের প্রথম সূত্র অনুসারে কোন তাপগতীয় তন্ত্রে (Thermodynamic system-এ) δQ তাপ উৎক্রমণীয়ভাবে (reversibly) যোগ করিলে তন্ত্রের অভ্যন্তরীণ শক্তি dU পরিমাণ বাড়িবে ও তন্ত্র δW পরিমাণ বাহ্য কার্য করিবে। কোন তরল পৃষ্ঠ বা ঝিল্লীকে আমরা তাপগতীয় তন্ত্র মনে করিতে পারি। উহার স্থিতিশক্তি E, এনট্রপি S, অভ্যন্তরীণ শক্তি E প্রভৃতি তাপগতীয় নির্দেশাংক (Thermodynamic coordinates)-কে উহার ক্ষেত্রফল A এবং অনপেক্ষ (absolute) উষ্ণতা T-র অপেক্ষক (function) বলিয়া ধরা যায়। এরূপ ঝিল্লীর ক্ষেত্রফল dA পরিমাণ বাড়াইতে পৃষ্ঠটান γ-র বিরুদ্ধে কার্য করিতে হইবে বলিয়া ঝিল্লীর ক্ষেত্রে $\delta W = -\gamma dA$, এবং $\delta Q = dU - \gamma dA$। তাপগতিবিজ্ঞানের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে $\delta Q = TdS$ (T = অনপেক্ষ উষ্ণতা ও dS = এনট্রপি পরিবর্তন)। অতএব ঝিল্লীতে $TdS = dU - \gamma dA$।

এই সমীকরণে S ও U-কে কেবল A এবং T-র অপেক্ষক মনে করা যায় বলিয়া আংশিক অবকলগণিত (Partial differential calculus)-এর নিয়ম অনুসারে

$$T\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)dT + \left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)dA\right\} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)dT + \left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)dA - \gamma dA \quad \cdots (i)$$

[কোন আংশিক অবকল গুণাংক হিসাব করিতে অন্য স্বতন্ত্র চররাশিগুলি স্থির ধরিতে হয়। কাজেই এই সমীকরণের $\partial S/\partial T$ প্রভৃতি রাশিতে T বদলাইলে A স্থির ধরিতে হইবে এবং A বদলাইলে T স্থির।]

T ও A পরস্পর নিরপেক্ষ রাশি বলিয়া উপরের সমীকরণের দুই দিকে dT ও dA-র সহগ (coefficient) গুলি সমান হইবে।

$$\frac{\partial U}{\partial T} \text{ এবং } T\left(\frac{\partial S}{\partial A}\right) = \frac{\partial U}{\partial A} - \gamma \text{ বা } \frac{\partial U}{\partial A} = \gamma + T\left(\frac{\partial S}{\partial A}\right) \cdots (ii)$$

$d\gamma/dT$ হইল উষ্ণতা বৃদ্ধির সহিত পৃষ্ঠটান বৃদ্ধির হার। উষ্ণতা বাড়িলে পৃষ্ঠটান কমে বলিয়া $d\gamma/dT$ নিগেটিভ রাশি। অতএব h আসলে পজিটিভ ; ইহা গৃহীত তাপ।

10-3.2. পৃষ্ঠটান ও উষ্ণতা। সব তরলের পৃষ্ঠটান উষ্ণতা বাড়িলে কমে। তরল ও গ্যাসীয় সন্ধিউষ্ণতার (critical temperature) কাছাকাছি উহা লোপ পায়। উষ্ণতার প্রভেদ অল্প হইলে লেখা যায়

$$\gamma' = \gamma\{1-\alpha)(t'-t)\}$$

এখানে γ ও γ' যথাক্রমে t ও t' উষ্ণতায় পৃষ্ঠটান এবং α নির্দিষ্ট তরলে স্থিরমান রাশি। ইহা পৃষ্ঠটান পরিবর্তনের উষ্ণতার গুণাংক।

আংশিক অবকল গণিতের নিয়ম অনুসারে $z=f\ xy)$ হইলে $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ হয়। $U=f(T, A)$ বলিয়া এক্ষেত্রে পাইব $\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)$ বা

$$\frac{\partial}{\partial A}\left\{T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)\right\}=\frac{\partial}{\partial T}\left\{T\left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)+\gamma\right\} \qquad \ldots \quad (iii)$$

A ও T পরস্পর নিরপেক্ষ বলিয়া $\partial T/\partial A=0$ এবং $\partial T/\partial T=1$। অতএব

$$T\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)=T\left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)+T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)+\frac{\partial\gamma}{\partial T} \qquad \ldots \quad (iv)$$

$S=\phi\ (A, T)$ হওয়ায় অবকল গণিতের নিয়ম অনুসারে $\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)$।

অতএব (iv) হইতে পাই

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)=-\frac{\partial\gamma}{\partial T} \qquad \ldots \quad (v)$$

(i) সমীকরণে উষ্ণতা T স্থির রাখিতে হইলে $dT=0$ হইতে হইবে। এক্ষেত্রে $T\frac{\partial S}{\partial A}=\frac{\partial U}{\partial A}-\gamma$, বা (v) সমীকরণ অনুসারে $-\frac{\partial\gamma}{\partial T}=\frac{\partial U}{\partial A}-\gamma$, অর্থাৎ

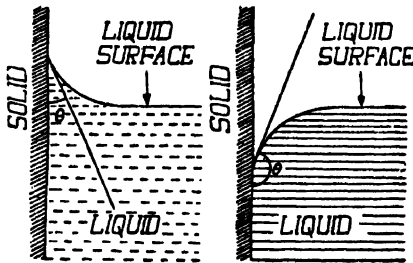
$$\frac{\partial U}{\partial A}=\gamma-\frac{\partial\gamma}{\partial T} \qquad \ldots \quad (vi)$$

ইহার অর্থ উষ্ণতা স্থির রাখিয়া ঝিল্লীর ক্ষেত্রফল এক একক বাড়াইতে হইলে ($dA=1$ করিতে হইলে) ঝিল্লীর অভ্যন্তরীণ শক্তিবৃদ্ধি কেবল উহার যান্ত্রিক শক্তি γ-র সমান না হইয়া $\gamma-(\partial\gamma/\partial T)$ হইবে। অতএব ঝিল্লী $h=-(\partial\gamma/\partial T)$ পরিমাণ তাপ নিবে।

উষ্ণতার প্রভেদ বেশী হইলে অনেক তরলের ক্ষেত্রে

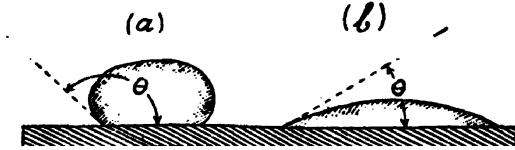
$$\gamma=\gamma_0(1-t/t')^n$$

এখানে t °C-তে পৃষ্ঠটান γ, 0 °C-তে γ_0, t' °C নির্দিষ্ট তরলে একটি বিশেষ মানের উষ্ণতা (উহা সন্ধি উষ্ণতার কয়েক ডিগ্রী নিচে), এবং n 1 হইতে 2-এর মধ্যে একটি সংখ্যা। n-এর মান বিভিন্ন তরলে বিভিন্ন। জলে $\gamma_0=75.7$ dyn/cm, $t'=368$ °C, $n=1.3$; জলের সন্ধিউষ্ণতা 374 °C।

10-4. স্পর্শকোণ (Angle of contact)। তরল পৃষ্ঠ যখন কঠিনের সংস্পর্শে আসে তখন উহাদের মধ্যে একটি কোণ থাকিয়া যায়। স্পর্শ-রেখার লম্বতলে স্পর্শবিন্দুতে টানা তরল পৃষ্ঠের স্পর্শক কঠিনের সীমারেখার সঙ্গে তরলের মধ্য দিয়া যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে স্পর্শকোণ বলে। 10.5 চিত্রে কঠিনের সংস্পর্শে অবস্থিত তরলের একটি ছেদ দেখান হইয়াছে ; ইহা দুয়ের স্পর্শরেখার লম্বতলে নেওয়া। তরল পৃষ্ঠ ও কঠিনের অন্তর্বর্তী এবং তরলের ভিতরে অবস্থিত θ কোণ স্পর্শকোণ। θ-র মান প্রধানতঃ কঠিন ও তরলের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে। যে কোনটি বদলাইলে θ-ও বদলায়। θ 90°-র কম বা বেশী হইতে পারে।

10.5 চিত্র

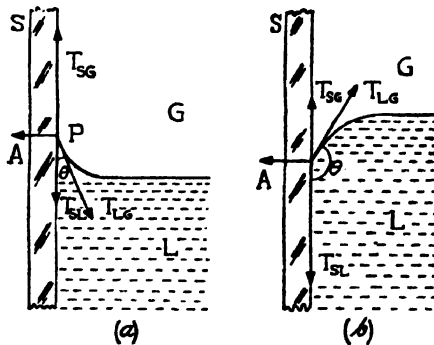
কাচের পরিষ্কার পাতের উপর এক ফোঁটা জল বা বেনজিন ফেলিলে উহা কাচের উপর ছড়াইয়া পড়ে। এক্ষেত্রে স্পর্শকোণ খুব ছোট, প্রায় শূন্য। কোহলের আচরণও অনুরূপ। কাচের উপর পারা, প্যারাফিন, তার্পিন ছড়ায় না, একই কোণে কাচকে স্পর্শ করিয়া গুটাইয়া একত্রে থাকে। পারার ক্ষেত্রে এই কোণ প্রায় 140°, প্যারাফিনে 26° এবং তার্পিনে 17°।

তরলে অপবস্তু (impurity) বা ভেজাল থাকিলে স্পর্শকোণ অনেক বদলাইতে পারে। বর্তমানে wetting agent (সিক্তক) বা detergent

(পরিষ্কারক) বলিয়া যে সব রাসায়নিক দ্রব্য আবিষ্কৃত হইয়াছে সেগুলির কাজ স্পর্শকোণ অনেকখানি, এমন কি 90°-র বেশী হইতে 90°-র অনেক কমে, নামাইয়া আনা। জল ও প্যারাফিনে স্পর্শকোণ 107°। অতএব প্যারাফিনের গায় জল ফোঁটার আকারে গুটাইয়া থাকিবে (10.6*a* চিত্র)।

10.6 চিত্র

জলে উপযুক্ত detergent যোগে উহার স্পর্শকোণ অনেক কমান যায় (10.6*b* চিত্র)। প্যারাফিনের উপর জল গুটাইয়া না থাকিয়া ছড়াইয়া গেলে কাপড় ইত্যাদি হইতে উহা পরিষ্কার করা সহজ হয়।

জলে অভেদ্য করা (water proofing) ইহার বিপরীত প্রক্রিয়া। কাপড়ে এই প্রকার অভেদক লাগাইলে জলের সহিত উহার স্পর্শকোণ 90°-র বেশী হয়। ফলে জল ভিতরে না ঢুকিয়া গুটাইয়া বাহিরেই থাকিয়া যায়।

10-4.1. তরল ছড়াইবে কি গুটাইবে। অল্প একটু তরলকে কোন কঠিন বা অন্য তরলের পৃষ্ঠে রাখিলে উহা যদি ছড়াইয়া পড়ে, তাহা হইলে বলা হয় তরল ঐ পৃষ্ঠকে ভিজায় (wets)। স্পষ্টতঃই, এক্ষেত্রে স্পর্শকোণ ছোট হয়। কোণ প্রায় শূন্য হইলে তরল আলোচ্য পৃষ্ঠে সম্পূর্ণ ছড়াইয়া পড়ে।

10.7 চিত্র

[উপরের চিত্রে *T*-র বদলে γ ধরিতে হইবে]

10.7 চিত্রে কোন পাত্রে কঠিন (S) ও গ্যাসের (G) সংস্পর্শে অবস্থিত তরলের (L) খাড়া ছেদ দেখান হইয়াছে। P বিন্দুতে তিনটিরই মিলন ঘটিয়াছে। ধরা যাক

কঠিন-তরল স্পর্শতলে পৃষ্ঠটান $= \gamma_{SL}$,

কঠিন-গ্যাস স্পর্শতলে পৃষ্ঠটান $= \gamma_{SG}$,

ও তরল-গ্যাস স্পর্শতলে পৃষ্ঠটান $= \gamma_{LG}$।

শেষোক্ত টান (γ_{LG}) P বিন্দুতে কঠিন পৃষ্ঠের সহিত তরলের ভিতর দিয়া θ কোণে তরল পৃষ্ঠের স্পর্শক বরাবর ক্রিয়া করে। সাম্যাবস্থায় কঠিনের অভিলম্বে ইহার উপাংশ আসঞ্জনজনিত বল A দ্বারা নিষ্ক্রিয় হয়। কঠিনের সমান্তরালে γ_{LG}-র উপাংশ $\gamma_{LG} \cos\theta$। কাজেই P-তে অবস্থিত তরল কণার সাম্যের শর্ত হইবে

$$\gamma_{LG} \cos\theta + \gamma_{SL} = \gamma_{SG}$$

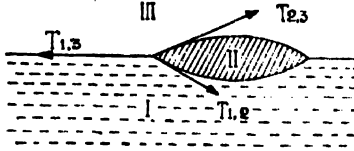
$$\text{অর্থাৎ} \quad \cos\theta = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LG}} \qquad (10\text{-}4.1)$$

এই সমীকরণ দিয়া স্পর্শকোণ θ-র মান নির্ণীত হয়। $\gamma_{SL} > \gamma_{SG}$ হইলে θ স্থূলকোণ হইবে (10.7b) চিত্র)।

$\gamma_{SG} - \gamma_{SL} > \gamma_{LG}$ হইলে $\cos\theta > 1$ হইতে হয়। ইহার কোন অর্থ হয় না ; এক্ষেত্রে সাম্য সম্ভব নয়, এবং P বিন্দুস্থ তরলকণা সরিতেই থাকিবে, অর্থাৎ তরল কঠিনের পৃষ্ঠে সম্পূর্ণ ছড়াইবে।

γ_{SG}, γ_{SL} ও γ_{LG}-র মানের সমান তিনটি বাহু দিয়া কোন ত্রিভুজ গঠন সম্ভব হইলে $\gamma_{SG} \sim \gamma_{SL} < \gamma_{LG}$ হইবে, এবং $\cos\theta < 1$ হইবে। এক্ষেত্রে সাম্য সম্ভব। এ প্রকার ত্রিভুজকে 'নয়ম্যানের ত্রিভুজ' (Neumann's triangle) বলে। বলা যায়, নয়ম্যানের ত্রিভুজ গঠন সম্ভব হইলে তরল গুটাইয়া থাকিবে, সম্ভব না হইলে উহা কঠিনের পৃষ্ঠে সম্পূর্ণ ছড়াইয়া পড়িবে।

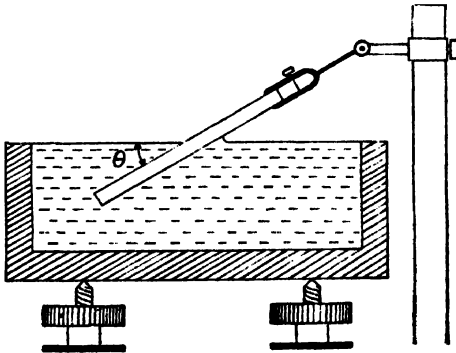
কোন তরল পৃষ্ঠে অন্য এক ফোঁটা তরল রাখিলেও (10.8 চিত্র) সাম্যের যুক্তি একই প্রকার হইবে। এক্ষেত্রেও তিনটি পৃষ্ঠটান আছে (চিত্র দেখ)। $\gamma_{13} > \gamma_{12} + \gamma_{23}$ হইলে সাম্য সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে II চিহ্নিত তরলের

সীমান্ত কণাগুলি γ_{13} অভিমুখে আগাইতে থাকিবে ও তরল *I* চিহ্নিত তরলের পৃষ্ঠে ছড়াইয়া পড়িবে। জলের উপর জলপাইয়ের তেলের ফোঁটা ফেলিলে এরূপ হয়। এক্ষেত্রে $\gamma_{13}=72$, $\gamma_{23}=32$ ও $\gamma_{12}=30$

10.8 চিত্র

[ছবিতে T-র বদলে γ ধরিতে হইবে।]

dyn/cm। এরূপ দৈর্ঘ্যের তিনটি রেখা দিয়া ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব নয়। এক তরলের উপর অন্য তরল ছড়াইলে বুঝিতে হইবে ছড়ান তরলের সংসক্তির তুলনায় দুই তরলের আসঞ্জন বেশী।

10-4.2. স্পর্শকোণ মাপন। স্পর্শকোণ মাপার অনেক রকম ব্যবস্থা হইতে পারে। প্রত্যক্ষ মাপনের একটি সহজ উপায় নিচে বলা হইল। পরোক্ষ মাপনের উপায় পরে পাওয়া যাইবে (10-7.2 অনুচ্ছেদ দেখ)।

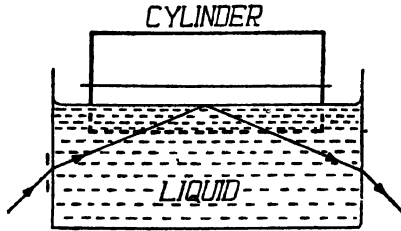
যে কঠিন সাপেক্ষে স্পর্শকোণ মাপা হইবে তাহার একখানা খুব পরিষ্কার পাত লইতে হইবে। পরীক্ষণীয় তরল একটি কাচের পাত্রে পুরাপুরি ভরা থাকিবে। তরল পৃষ্ঠ বিশুদ্ধ হইতে হইবে। ইহার জন্য খুব পরিষ্কার কাচের নল বা প্যারাফিন লাগান অন্য কিছু দিয়া তরল পৃষ্ঠ চাঁছিয়া পরিষ্কার

10.9 চিত্র

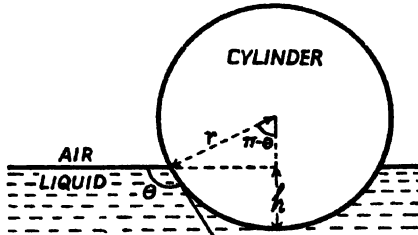
করা দরকার। পাত আংশিকভাবে তরলে ডুবাইয়া দরকার মত ঘুরাইয়া উহা এমন অবস্থায় আনিতে হইবে যাহাতে তরল পৃষ্ঠ স্পর্শরেখা পর্যন্ত অনুভূমিক

থাকে (10.9 চিত্র দেখ)। স্পর্শরেখার কাছের এলাকা হইতে প্রতিফলিত সরু আলোকরেখার প্রতিবিম্ব দেখিয়া ইহা বুঝিতে পারা যায়। কোণ চাঁদার (protractor) সাহায্যে মাপা চলে। খুব সূক্ষ্ম মাপনের দরকার হয় না, কারণ একই ব্যবস্থায় স্পর্শকোণ একাধিকবার মাপিলে বিভিন্ন মাপনে 1°-র বেশি প্রভেদ থাকিতে পারে।

পাতের উপর দিয়া তরল আগাইয়া আসিয়া থাকিলে θ-র যে মান পাওয়া যায়, পিছাইয়া গিয়া থাকিলে মান তাহা হইতে একটু ভিন্ন হয়। এই দুয়ের গড় মান স্পর্শকোণ ধরা হয়।

তরল পৃষ্ঠ সামান্য অশুদ্ধ হইলেও স্পর্শকোণ এবং পৃষ্ঠটান অনেক বদলাইতে পারে। এই কারণে পৃষ্ঠটানের সকল পরীক্ষায় তরল পৃষ্ঠকে অশুদ্ধি হইতে বাঁচাইবার সব রকম চেষ্টা করা অবশ্য প্রয়োজন।

স্পর্শকোণ প্রত্যক্ষভাবে মাপনে পরীক্ষাধীন কঠিনকে বেলনের আকারেও নেওয়া হইয়াছে (10.10*a* চিত্র)। বেলনের অক্ষ অনুভূমিক রাখিয়া উহার

10.10 (*a*) চিত্র

নিচের পাত্রে আস্তে আস্তে পরীক্ষণীয় তরল ঢালা হয়। তরল ও বেলনের পৃষ্ঠের মধ্যবর্তী কোণ স্পর্শকোণের সমান হইলে তরল পৃষ্ঠ বেলনের

10.10 (*b*) চিত্র

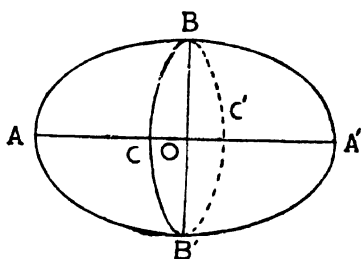
স্পর্শরেখা পর্যন্ত অনুভূমিক থাকে। অন্যথায় তরল পৃষ্ঠ স্পর্শরেখার কাছে

বাঁকা হয় (10-6.7 অনুচ্ছেদ দেখ)। অনুভূমিক হইল কিনা তাহা সরু আলোকরেখার প্রতিফলনের সাহায্যে বোঝা যায়। তরল পৃষ্ঠ বেলন পর্যন্ত অনুভূমিক হইলে, বেলনের নিম্নতম বিন্দু যদি তরল পৃষ্ঠের নিচে h গভীরতায় থাকে ও বেলনের ব্যাসার্ধ r হয়, তাহা হইলে 10.10*b* চিত্র হইতে দেখা যায়

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = \frac{r-h}{r}.$$

তরল আগাইবার ও পিছাইবার উভয় অবস্থায় কোণ মাপিতে হইবে বলিয়া বিন্যাসের সময় বেলন আস্তে আস্তে একবার দক্ষিণাবর্তে ও একবার বামাবর্তে ঘুরান হয়।

কোণ মাপনের তুলনায় দৈর্ঘ্য মাপন সহজ বেশী বলিয়া আগের ব্যবস্থার তুলনায় এই ব্যবস্থা বেশী সুবিধার মনে হয়। কিন্তু তরলের পৃষ্ঠতল পরিষ্কার করা আগের ব্যবস্থায় সহজ।

10-5. বক্র তরল পৃষ্ঠের দুই পাশে প্রেষের প্রভেদ (Pressure difference between two sides of a curved liquid surface)। বক্র তরল পৃষ্ঠের দুই পাশে প্রেষের প্রভেদ থাকে। বক্র-তল নিজের ক্ষেত্রফল কমাইয়া সমতল হইতে চায়। উহাকে বক্রই রাখিতে

10.11 চিত্র

হইলে পৃষ্ঠের যে পাশ অবতল (concave) সে পাশে প্রেষ বেশী, ও যে পাশ উত্তল (convex) সে পাশে প্রেষ কম হইতে হইবে। বক্রতল যে সব সময়ই গোলকপৃষ্ঠের অংশ হইবে, তাহা নয়। উপবৃত্ত লইয়া উহার এক অক্ষে উহাকে ঘুরাইলে যে তল উৎপন্ন হয় (10.11 চিত্র) তাহার বক্রতা বিভিন্ন ছেদে বিভিন্ন। তরলের বক্রতল ইহা অপেক্ষাও জটিল হইতে পারে।

বক্র তরল পৃষ্ঠের কোন বিন্দুতে বিভিন্ন দিকে ছেদ নিলে বিভিন্ন ছেদে ছেদরেখার বক্রতার ব্যাসার্ধ বিভিন্ন হয়। যে ছেদে ব্যাসার্ধ সবচেয়ে কম এবং যে ছেদে উহা সবচেয়ে বেশী এই ছেদ দুটি পরস্পরের অভিলম্বে

থাকে। এই দুই ছেদকে ঐ বিন্দুতে বক্রতলের 'মুখ্য ছেদ' (Principal section) বলে। মুখ্য ছেদে বক্রতার ব্যাসার্ধকে 'বক্রতার মুখ্য ব্যাসার্ধ' Principal radii of curvature) বলে। দুই মুখ্য ছেদে বক্রতার কেন্দ্র দুটি একই অভিলম্ব রেখার উপর থাকে।

বক্র তরল পৃষ্ঠের কোন বিন্দুতে বক্রতার মুখ্য ব্যাসার্ধ R ও R' হইলে ঐ স্থানে পৃষ্ঠের দুপাশে প্রেষ বৈষম্য হইবে

$$p=\gamma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) \qquad (10\text{-}5.1)$$

ইহা একটু পরেই প্রমাণ করা হইয়াছে।

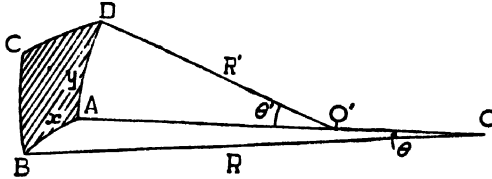
সাম্যে অবস্থিত তরলের পৃষ্ঠটান মাপনের প্রায় সব সুষ্ঠু উপায়গুলিতেই এই সমীকরণের সাহায্য নেওয়া হয়। পৃষ্ঠটান আলোচনায় এই সমীকরণ মৌলিক।

কোন কোন ক্ষেত্রে এমন হয় যে বক্রতার কেন্দ্র বক্রতলের একই পাশে না থাকিয়া দুই পাশে থাকে। ঘোড়ার জিন বা সাইকেলের সিটে এরকম দেখা যায়। আয়তছেদের বীমের অনুপ্রস্থ বক্রণে (9-9.4 অনুচ্ছেদ) আমরা বিপরীত বক্রতার তল দেখিতে পাইয়াছি। এ সকল ক্ষেত্রে যে ব্যাসার্ধ ছোট তাহাকে পজিটিভ ও অন্যটি নিগেটিভ ধরা হয়। ছোট ব্যাসের কেন্দ্র যেদিকে সেদিকে প্রেষ বেশী। উদাহরণ স্বরূপ নিচের প্রশ্নটি দেখা যাইতে পারে।

প্রশ্ন। দুখানা সমতল কাচের পাতের ফাঁকে খানিকটা জল 5 cm ব্যাসার্ধের বৃত্তাকারে আছে। দুই পাতের দূরত্ব 0.5 mm। জলের পৃষ্ঠটান 72 dyn/cm ও স্পর্শকোণ 0° হইলে, পাতের অভিলম্বে কমপক্ষে কত বল প্রয়োগে উহাদের ছাড়ান যাইবে?

[সংকেত: দুই পাতের মধ্যে জল কাচকে 0°-তে স্পর্শ করে। কাজেই বায়ুর সংস্পর্শে জলের তল বায়ুর দিকে অবতল এবং ইহার বক্রতার ব্যাসার্ধ 0.5/2=0.25 mm। ইহার অভিলম্বে বক্রতা বিপরীত দিকে এবং বক্রতার ব্যাসার্ধ 5 cm। 10-5.1 সমীকরণ অনুসারে জলের বাহিরে প্রেষ ভিতর অপেক্ষা $p=72\left(\frac{1}{0.025}-\frac{1}{5}\right)=2866$ dyn/cm² বেশী। দুই পাতে চাপ $\pi\times5^2\times p$।]

প্রেষ বৈষম্যের সমীকরণের প্রমাণ। বক্র তরল পৃষ্ঠের দুপাশে প্রেষের প্রভেদ পাইতে আমরা তরলের একটি বুদ্বুদ লইয়া আলোচনা করিতে পারি। ইহার ঝিল্লীর দুই পিঠ, এবং যে কোন বিন্দুতে বিভিন্ন ছেদে বক্রতা বিভিন্ন ধরা হইবে।

মুখ্য ছেদ দিয়া সীমাবদ্ধ ঝিল্লীর খুব ছোট একটি আয়তাকার অংশ (10.12 চিত্রে $ABCD$) ধরা যাক। উহার AB চাপের দৈর্ঘ্য x, বক্রতা কেন্দ্র O এবং বক্রতাব্যাসার্ধ R। AD চাপের অনুরূপ রাশিগুলি যথাক্রমে y, O' এবং R'। $\angle AOB = \theta$ এবং $\angle AO'D = \theta'$।

10.12 চিত্র

$ABCD$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $S = xy = R\theta . R'\theta'$। মনে কর এই ক্ষেত্রকে নিজের অভিলম্বে δh কল্পিত সরণ (virtual displacement ; 4.9 অনুচ্ছেদ) দেওয়া হইল, অর্থাৎ উহার প্রতিটি বিন্দু তলের সেই বিন্দুস্থ অভিলম্বে δh পরিমাণ আগাইয়া গেল। ইহাতে θ, θ' স্থির থাকিবে, কিন্তু R ও R' δh পরিমাণ বাড়িবে, এবং $ABCD$-র ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি হইবে

$$\delta S = (R + \delta h)\theta . (R' + \delta h)\theta' - R\theta . R'\theta'$$

$= \delta h(R + R')\theta\theta'$ [δh^2 দ্বিতীয় ক্রমের ক্ষুদ্র রাশি বলিয়া প্রথম ক্রমের তুলনায় উহা উপেক্ষা করা হইয়াছে।]

তলের পৃষ্ঠটান γ হইলে, ঝিল্লীর দুই পিঠ বলিয়া, ইহাতে ক্ষেত্রের স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি

$$2\gamma . \delta S = 2\gamma \cdot \delta h(R + R')\theta\theta'.$$

ঝিল্লীর অবতলপৃষ্ঠে প্রেষ P ও উত্তলপৃষ্ঠে (অর্থাৎ বুদ্বুদের বাহিরে) প্রেষ P_0 হইলে, ঝিল্লীর সরণে প্রেষ দ্বারা কৃত কার্য হইবে

$$(P - P_0)dV = (P - P_0)\delta h . RR' . \theta\theta'.$$

ঝিল্লী সাম্যে আছে বলিয়া কল্পিত কার্যের তত্ত্ব অনুসারে (4.9 অনুচ্ছেদ) এই কার্য স্থিতিশক্তি বৃদ্ধির সমান হইবে। অতএব

$$(P - P_0)\delta h . RR' . \theta\theta' = 2\gamma . \delta h\ (R + R')\theta\theta'$$

বা $$p = P - P_0 = 2\gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \qquad (10\text{-}5.2)$$

মনে রাখা ভাল যে R ও R' দুই মুখ্য ছেদে ঝিল্লীর বক্রতাব্যাসার্ধ, অর্থাৎ ইহারা বক্রতার মুখ্য ব্যাসার্ধ।

ঝিল্লীর পরস্পর অভিলম্ব দুই মুখ্য ছেদে বক্রতার কেন্দ্র ঝিল্লীর দুপাশে

থাকিতে পারে। ঝিল্লীর উপর যেদিকে প্রেষ বেশী সেইদিকের বক্রতাকে তখন পজিটিভ ও অন্যটি নিগেটিভ ধরা হয়।

তরলের একটি ফোঁটায়, বা তরলের ভিতর বায়ু ঢুকাইয়া তরলের মধ্যেই বুদ্বুদ গঠন করিলে উহাতে তরলের মাত্র একটি পৃষ্ঠ থাকে। অতএব এরূপ ফোঁটায় বা বুদ্বুদে 10-5.2 সমীকরণের গুণক 2 থাকিবে না এবং প্রেষবৈষম্যের সমীকরণ হইবে

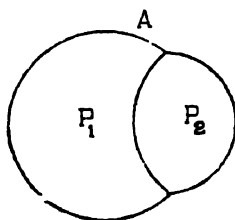
$$p=\gamma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) \qquad (10\text{-}5.3)$$

গোল বুদ্বুদ। তরল পৃষ্ঠের আকার ঠিক গোলকের পৃষ্ঠের মত হইলে উহার সর্বত্র $R=R'=r$। অতএব ঝিল্লীঘেরা গোল বুদ্বুদে

$$p=\frac{4\gamma}{r}. \qquad (10\text{-}5.4)$$

বুদ্বুদে তরলের মাত্র এক পিঠ থাকিলে, গোল বুদ্বুদে বা ফোঁটায়

$$p=\frac{2\gamma}{r}. \qquad (10\text{-}5.5)$$

প্রশ্ন। (1) 1.6 cm ব্যাসের একটি গোল বুদ্বুদ U-নল প্রেষমানের (U-tube manometer) সঙ্গে যুক্ত। নলের তরলের ঘনত্ব 0.80 g/cm³ ও নলের দুই বাহুতে উচ্চতার প্রভেদ 1.5 mm হইলে বুদ্বুদের তরলের পৃষ্ঠটান কত? [উত্তর : বুদ্বুদ

9.13 চিত্র

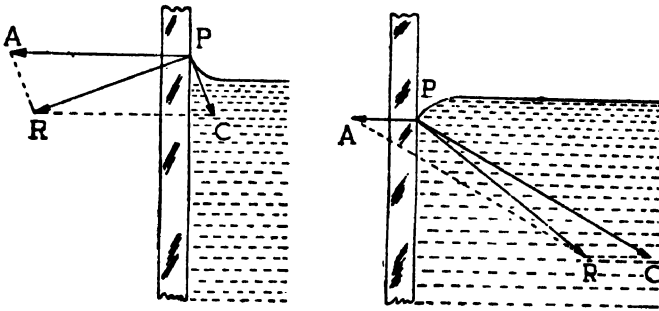
ঝিল্লীঘেরা হইলে পৃষ্ঠটান 23.5 dyn/cm ; বুদ্বুদ তরলের ভিতরে গঠিত হইয়া থাকিলে পৃষ্ঠটান 47 dyn/cm.]

(2) কোন পাত্রে জলের 10 cm নিচে 1 mm ব্যাসের একটি বাষ্পের বুদ্বুদ গঠিত হইয়াছে। বায়ুমণ্ডলের চাপ 751.0 mmHg হইলে বুদ্বুদের ভিতর চাপ কত? (জলের ঘনত্ব 0.96 g/cm³ ও জলের পৃষ্ঠটান 60 dyn/cm).

[উত্তর : 759.9 mm Hg].

(3) 3 cm ও 4 cm ব্যাসার্ধের সাবানের দুটি বুদ্বুদ গায়ে গায়ে ঠেকাইয়া রাখা হইল (10.13 চিত্র দেখ)। উহাদের বিভেদতলের বক্রতার ব্যাসার্ধ কত ?

[উত্তর : 12 cm]

10-6. কৈশিকতা (Capillarity)। কৈশিকতা বলিতে কৈশিক নলে (capillary tube) তরলের ওঠা বা নামা সংক্রান্ত ব্যাপার বুঝায়। কঠিনের স্পর্শে তরল পৃষ্ঠের বক্রতাও ইহার অন্তর্গত। কাচের কৈশিক নল জলে ডুবাইলে নলের মধ্যে জল ওঠে। পারায় ডুবাইলে নলের ভিতরে পারা নামিয়া যায়। নল যত সরু হয়, জল তত উপরে ওঠে। এই কারণে

10.14 চিত্র

ব্লটিং কাগজ বা স্পঞ্জ জল শোষে, পলতের তেল টানে। মাটির সরু ছেঁদা দিয়া নিচের ভিজা মাটি হইতে জল এই কারণে উপরে উঠিয়া উপরের মাটিকে সরস রাখে। বেলেমাটির ছেঁদাগুলি বড় বলিয়া নিচের জল বেশী উপরে উঠিতে পারে না ; সেজন্য বেলেমাটির উপরটা শুকনা হয়।

কৈশিকতার মূলে পদার্থের যে ধর্ম ক্রিয়া করে তাহা কার্যতঃ আমরা আগেই আলোচনা করিয়াছি। উহার সারমর্ম নিচে বলা হইল :

(১) তরলের অণুগুলির মধ্যে সংসক্তির বল, এবং তরল ও কঠিনের মধ্যে আসঞ্জনের বল ক্রিয়া করে।

(২) তরল পৃষ্ঠ সকল অবস্থাতেই গুটাইয়া ছোট হইতে চায়।

ইহাদের সঙ্গে তরলের নিজস্ব আর একটি ধর্ম যোগ করা দরকার। তরল স্পার্শক বলের ক্রিয়া প্রতিরোধ করিতে পারে না বলিয়া।

(৩) তরল পৃষ্ঠ সর্বদাই উহার উপর ক্রিয়াশীল বলের অভিলম্বে থাকে।

10-6.1. সংসক্তি, আসঞ্জন ও স্পর্শকোণ। স্পর্শকোণ সংসক্তি ও আসঞ্জনের আপেক্ষিক মান দিয়া নির্ণীত হয়। ইহা বুঝিতে কঠিনের স্পর্শে অবস্থিত তরল পৃষ্ঠের খুব ছোট একটি অংশের কথা ভাবা যাক (10.14 চিত্রের *P* অংশ)। সংসক্তি উহাকে তরলের ভিতর দিকে টানিবে। এই দিক কঠিনের তল এবং *P* বিন্দুতে তরল পৃষ্ঠের স্পর্শক এই দুয়ের মধ্যে কোথাও থাকিবে। ধরা যাক *PC* এই দিক। তরল না থাকিলে *P* বিন্দুতে আসঞ্জনের বল কঠিন তলের অভিলম্বে *PA* অভিমুখে হইত। *P*-র নিচের অংশে তরল থাকায় *P*-তে আসঞ্জনের ঊর্ধ্বমুখী উপাংশ থাকা সম্ভব। এই উপাংশ উপেক্ষা করিলে *P*-তে অবস্থিত তরল কণার উপর বল হইবে *PC* ও *PA*-র লব্ধি। এখানে অভিকর্ষের ক্রিয়া উপেক্ষা করা হইয়াছে। তরল পৃষ্ঠে *P* বিন্দুতে উপরোক্ত লব্ধি *PR*-এর অভিলম্বে থাকিবে।

PA ও *PC*-র আপেক্ষিক মান ও উহাদের মধ্যবর্তী কোণের উপর *PR*-এর দিক নির্ভর করিবে। *PR* তরলের বাহিরেও পড়িতে পারে, ভিতরেও পড়িতে পারে। বাহিরে পড়িলে তরল পৃষ্ঠ উহার অভিলম্বে থাকিবে বলিয়া বাঁকিয়া উপরে উঠিবে। $PA>PC$ হইলে এরূপ হইতে পারিবে। এক্ষেত্রে সাম্যাবস্থায় স্পর্শকোণ 90° অপেক্ষা ছোট হইবে। *PA* (আসঞ্জন) $\gg$ *PC* (সংসক্তি) হইলে কোণ প্রায় 0° হইবে। জল ও কাচে প্রায় এই অবস্থা হয়।

PR তরলের ভিতরের দিকে হইলে তরল পৃষ্ঠ বাঁকিয়া নিচের দিকে নামিবে। *PC*, *PA*-র তুলনায় বাড়িতে থাকিলে স্পর্শকোণও 90° অপেক্ষা বেশী হইতে থাকিবে। কাচ ও পারায় স্পর্শকোণ 140°। এখানে *PC* (সংসক্তি) *PA* (আসঞ্জন) অপেক্ষা অনেক বড়।

দেখা গেল, সংসক্তির তুলনায় আসঞ্জন বাড়িতে থাকিলে স্পর্শকোণ θ 0°-র দিকে যায়, এবং আসঞ্জনের তুলনায় সংসক্তি বাড়িতে থাকিলে 180°-র দিকে যায়। প্রথম ক্ষেত্রে তরল পৃষ্ঠ উপরের দিকে অবতল, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে উত্তল।

সংসক্তি ও আসঞ্জনের যথার্থ প্রকৃতি জানা না থাকায় এই ব্যাখ্যা স্থূল মনে করিতে হইবে।

10-6.2. কৈশিক নলে তরলের ওঠা বা নামা। কৈশিক নলে কোন্ বল তরলকে টানিয়া তোলে বা নামায় ? এক কথায় উত্তর দিতে হইলে বলিতে হয় আসঞ্জন টানিয়া তোলে ও সংসক্তি টানিয়া নামায়। যে প্রক্রিয়ায় ওঠানামা হয় তাহা আর একটু জটিল। আসঞ্জন বড় হইলে উভয় বলের যৌথ ক্রিয়ায়

তরল পৃষ্ঠ বাঁকিয়া উপরে ওঠে। ইহাতে পৃষ্ঠতল বাড়ে। পৃষ্ঠতল কমাইবার প্রয়াসে তরল পৃষ্ঠ বাঁকা না থাকিয়া সোজা (অনুভূমিক) হইতে চায়, এবং এই প্রয়াসে সংসক্তির জন্য নিচের তরলকে টানিয়া তোলে। কিন্তু স্পর্শকোণ ঠিক রাখার জন্য দেওয়ালের পাশের তরল পৃষ্ঠ আরও উপরে ওঠে, এবং এইভাবে নিচের তরল উপরে উঠিতে থাকে। স্পর্শ-রেখায় তরল পৃষ্ঠের উপর কঠিনের যে টান তাহা এইভাবে তরলকে টানিয়া তুলিতে থাকে। উত্তোলিত তরলের ওজন এই টানের খাড়া উপাংশের সমান হইলে ওঠা শেষ হয়। খানিকটা তরল নলে ওঠার পর সাম্য আসে।

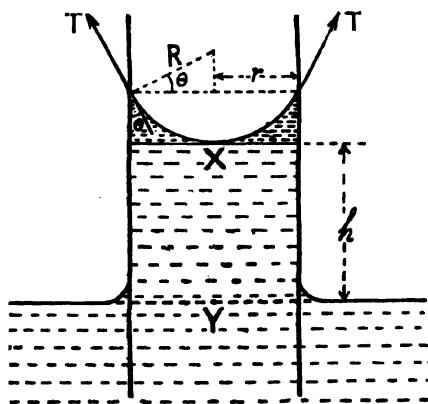
সংসক্তি বেশী হইলে স্পর্শস্থলে তরল নামিয়া আসে, এবং ক্ষেত্রফল কমাইবার প্রয়াসে আরও তরল টানিয়া নামায়। ঔদ প্রেষ (hydrostatic pressure) নামান তরলকে ঠেলিয়া উপরে তুলিতে চায়। স্পর্শরেখায় তরল পৃষ্ঠের উপর মোট নিম্নমুখী টান ঔদ প্রেষজনিত বলের সমান হইলে সাম্য হয়।

কঠিন ও তরল পৃষ্ঠের **স্থিতিশক্তির সাহায্যেও** কৈশিক নলে তরলের ওঠা বা নামার স্থূল ব্যাখ্যা দেওয়া যায়। গ্যাসের সংস্পর্শে কঠিন পৃষ্ঠের একক ক্ষেত্রের স্থিতিশক্তি γ_{SG}, কঠিন-তরলে γ_{SL} ও তরল-গ্যাসে γ_{LG} ধরা যাক। $\gamma_{SG} > \gamma_{SL}$ হইলে, স্থিতিশক্তি কমাইবার প্রয়াসে তরল কঠিনের গা ঢাকিয়া ফেলিতে চাহিবে, অর্থাৎ উহার গা বাহিয়া উঠিবে। $\gamma_{SG} < \gamma_{SL}$ হইলে ইহার বিপরীত ক্রিয়া হইবে। উভয় ক্ষেত্রেই তরলের পিঠ বাঁকায় γ_{LG}-র জন্য স্থিতিশক্তি বাড়ে। কাজেই ইহার ক্রিয়া আগের বিপরীত। তরলের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি কঠিনের ক্ষেত্রফল পরিবর্তনের সমান নয়। চূড়ান্ত ক্ষেত্রে উভয়কে সমান ধরিলে বলা যায় $\gamma_{SG} - \gamma_{LG} > \gamma_{SL}$ হইল তরল ওঠার শর্ত, এবং $\gamma_{SG} - \gamma_{LG} < \gamma_{SL}$ হইল তরল নামার শর্ত।

10-6.3. কৈশিক নলে তরল কতটা উঠিবে। স্পর্শকোণ 90°-র কম হইলে তরল কৈশিক নলে উপরে উঠিবে। কতটা উঠিবে হিসাব করা যাক। 10.15 চিত্রে তরলে আংশিক ডোবান একটি কৈশিক নল দেখান হইয়াছে। বুঝিবার সুবিধার জন্য নলের ব্যাস অনেক বড় করিয়া আঁকা। নলের ব্যাসার্ধ r, এবং কঠিন ও তরলের স্পর্শকোণ $\theta < 90°$। নলে তরল মুক্তল হইতে h উচ্চতায় উঠিয়া থাকিলে এবং $h > r$ হইলে নলের ভিতরের তরল পৃষ্ঠকে $R = r/\cos\theta$ ব্যাসার্ধের গোলকের অংশ বলিয়া ধরা যায়।

বায়ুপ্রেষ A এবং তরলের বক্রতলের ঠিক নিচে তরলের ভিতরে X বিন্দুতে প্রেষ P ধরা যাক। তল উপরের দিকে অবতল বলিয়া $A > P$। নলের ভিতরে তরলের মুক্ততলের একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত Y বিন্দুতে প্রেষ A। অতএব, তরলের ঘনত্ব ρ হইলে,

$$A = P + h\rho g$$

10 5.5 সূত্র অনুসারে বক্রতলের দুই পাশে প্রেষের প্রভেদ $p = 2\gamma/R$ (বক্রতার ব্যাসার্ধ)। এক্ষেত্রে $p = A - P = h\rho g$, এবং বক্রতার ব্যাসার্ধ $R = r/\cos\theta$

10.15 চিত্র

[চিত্রে T স্থানে γ পড়িতে হইবে]

$$\therefore \quad \frac{2\gamma}{R} = h\rho g \text{ বা } \frac{2\gamma\cos\theta}{r} = h\rho g$$

$$\text{বা } h = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g} \qquad (10\text{-}6.1)$$

$$\text{এবং } \gamma = \frac{rh\rho g}{2\cos\theta} \qquad (10\text{-}6.2)$$

বিকল্পে, নলের তরলের উপর খাড়া যে সব বল ক্রিয়া করে তাহাদের সাম্য বিচার করিয়াও এ সম্পর্ক পাওয়া যায়। নল ও তরলের স্পর্শরেখার দৈর্ঘ্য $2\pi r$। এই রেখার আড়াআড়ি প্রতি একক দৈর্ঘ্যে তরলপৃষ্ঠ নলকে পৃষ্ঠের স্পর্শক বরাবর γ বলে টানে। প্রতিক্রিয়াস্বরূপ নলও

তরলপৃষ্ঠকে সমান ও বিপরীত বলে টানে। এইরূপ মোট বলের খাড়া উপরের দিকের উপাংশ $2\pi r\ \gamma \cos\theta$। নলের তরলের উপর খাড়া নিচ দিকে বল উহার ভার $\pi r^2 h\rho g$। সাম্যে ইহারা সমান, অর্থাৎ
$2\pi r\ \gamma \cos\theta = \pi r^2 h\rho g$ বা $\gamma = rh\rho g/2\cos\theta$।

$\theta = 0^0$ হইলে $\cos\theta = 1$। এরূপক্ষেত্রে

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\ rh\rho g \qquad (10\text{-}6.3)$$

10.15 চিত্রে XY দূরত্বকে আমরা h ধরিয়াছি। কিন্তু X-এর উপরেও অল্প একটু তরল আছে। কাজেই h-এর কার্যকর মান আর একটু বেশী। $\theta = 0^0$ হইলে X-এর উপরের তরলের আয়তন $=$ (r ব্যাসার্ধের r উচ্চতার বেলনের আয়তন)—(r ব্যাসার্ধের অর্ধগোলকের আয়তন) $= \pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^3$। নলের প্রস্থচ্ছেদ πr^2। অতএব এই আয়তনের তরল নলে $\frac{1}{3}r$ উচ্চতার তরলের সমান। সুতরাং এই তরলের জন্য শুদ্ধি করিতে হইলে h-এর বদলে $h + \frac{1}{3}r$ লইতে হইবে। শোধিত 10-6.3 সমীকরণ হইয়া দাঁড়াইবে

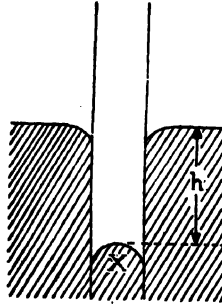
$$\gamma = \tfrac{1}{2}\ r\rho g\ (h + \tfrac{1}{3}r) \qquad (10\text{-}6.4)$$

25 °C উষ্ণতায় জলের পৃষ্ঠটান প্রায় 72 dyn/cm। 1 mm ব্যাসের নলে জল যে উচ্চতায় উঠিবে 10-6.3 সমীকরণ অনুসারে তাহার মান প্রায় 3 cm। এক্ষেত্রে $r/3 = 0.017$ cm। h-এর তুলনায় $r/3$ উপেক্ষা করিলে প্রভেদ হয় 0.6%। নল আরও সরু হইলে প্রভেদ আরও কম হয়।

উচ্চতার শুদ্ধি উপেক্ষা করিলে 10-6 3 সমীকরণ হইতে দেখা যায় একই পদার্থের বিভিন্ন ব্যাসের নলে একই তরল উঠিলে $h \times r$ গুণফল স্থির থাকিবে। উষ্ণতাও স্থির থাকিতে হইবে, কারণ উষ্ণতার সহিত পৃষ্ঠটান বদলায়। $h \times r =$ স্থির রাশি, এই সম্পর্কটিকে অনেক সময় 'জুরিনের সূত্র' (Jurin's law) বলিয়া উল্লেখ করা হয়; কিন্তু সম্পর্কটি স্থূল। শোধিত h লইলে ইহা অনেকটা ঠিক হয়। কিন্তু নল যত মোটা হইতে থাকে ব্যতিক্রম তত প্রকট হয়, কারণ মোটা নলে উত্তোলিত তরলপৃষ্ঠ গোলকের আকার নেয় না।

স্পর্শকোণ 0° ও $r < h/5$ হইলে উত্তোলিত তরল পৃষ্ঠকে কার্যতঃ উপগোলকের অংশ বলিয়া মনে করা যায়। ফার্গুসন (Ferguson) এই-ভাবে হিসাব করিয়া দেখাইয়াছেন h-এর শোধিত মান হইবে।

$$\left(1+\frac{r}{3h}-\frac{1}{9}\frac{r^2}{h^2}+\cdot\right. \qquad (10\text{-}6.5)$$

r আরও বড় হইলে শুদ্ধি কি হইবে সাগডেন (Sugden) তাহার তালিকা প্রণয়ন করিয়াছেন। কিন্তু এ সকলের তাত্ত্বিক মূল্য যাহাই হোক ব্যবহারিক মূল্য কম।

10.16 চিত্র

10-6.4. কাচের কৈশিক নলে পারার নামা। 10.16 চিত্রে পারার সাম্য অবস্থান দেখান হইয়াছে। মুক্ততল হইতে নলের ভিতরে পারার মাথা h নিচে। বক্রতলের ঠিক নিচে পারার ভিতরে X বিন্দুতে প্রেষ P বাহিরের প্রেষ A হইতে $h\rho g$ পরিমাণ বেশী এবং এই প্রভেদ $2\gamma/R$। নলের ব্যাসার্ধ r এবং স্পর্শকোণ θ হইলে আগের মত $r=R\cos\theta$। অতএব

$$p=P-A=\frac{2\gamma}{R}=\frac{2\gamma\cos\theta}{r}=h\rho g \text{ বা } \gamma=\frac{rh\rho g}{2\cos\theta}$$

ইহা 10-6.2 সমীকরণের সহিত অভিন্ন। এখানেও পারার মাথার বাঁকা অংশের জন্য শুদ্ধি সংক্রান্ত জটিলতা রহিয়া গিয়াছে।

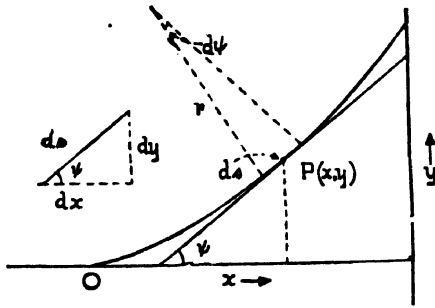
10-6.5. খাট নল। কোন কৈশিক নলে তরল যতদূর (h) উঠিতে পারে, তরলের উপরে নলের উচ্চতা যদি তাহার চেয়ে কম হয়, তাহা হইলে কি হইবে? এক্ষেত্রে নলের মাথায় বাঁকাতল আগের মত উপরের দিকে অবতল থাকিবে, কিন্তু উহার ব্যাস বাড়িবে। নলের উচ্চতা H ($H<h$) ও বাঁকাতলের ব্যাসার্ধ R হইলে, তলের দুই পাশে প্রেষের বৈষম্য $H\rho g=2\gamma/R$ হইবে। দেখা যায়, নল যত খাট হয় R তত বাড়ে। শুদ্ধি বিচার না করিলে $H\times R$ গুণফল স্থির থাকে।

10-6.6. ছেঁদা পাত্রে তরল রাখা। সরু ছেঁদার পাত্রে খানিকটা তরল রাখা যায়। ছেঁদার ব্যাসার্ধ r হইলে, ছেঁদা দিয়া তরল বাহির হইয়া যাইবার

আগে তরলের ফোঁটা r ব্যাসার্ধের অর্ধগোলকে পরিণত হয়। আমরা সাধারণতঃ ধরি ইহার পর ফোঁটা বিচ্ছিন্ন হয়। সাম্যে ফোঁটার ভিতরে $2\gamma/r$ প্রেষের আধিক্য থাকিতে পারিবে। এই প্রেষ ভিতরের তরলের চাপের জন্য হয়। তরলের h গভীরতায় এই চাপ হইলে এবং $r < h$ হইলে

$$h\rho g = 2\gamma/r \quad \text{বা} \quad h = 2\gamma/r\rho g \tag{10-6.6}$$

পাত্রের ভিতরে তরলের গভীরতা h অপেক্ষা বেশী হইলে ছেঁদা দিয়া তরল বাহির হইয়া যাইবে। পৃষ্ঠটান তরলকে আর আটকাইয়া রাখিতে পারিবে না।

একই কারণে ঐ পাত্রের তলা h গভীরতা পর্যন্ত ডুবাইলে পাত্রে তরল ঢুকিবে না। এক্ষেত্রে তরল ঢোকার আগে পাত্রের ভিতরে ছেঁদার মুখে যে তরলবিন্দু জমে তাহা উপরের দিকে উত্তল হয়। তরলবিন্দুর পিঠের বক্রতা ভিতরে বাহিরে প্রেষের প্রভেদ বহন করে।

10.17 চিত্র

প্রশ্ন। কোন পাত্রে নিচের দিকে 0.2 mm ব্যাসার্ধের একটি ছেঁদা আছে। জলের ভিতরে পাত্রটি কতখানি ঢুকাইলে ছেঁদা দিয়া পাত্রে জল ঢুকিবে? জলের পৃষ্ঠটান 72 dyn/cm।

একই মাপের আরও কয়েকটি ছেঁদা পাত্রে একই সমতলে থাকিলে যে গভীরতায় জল ঢোকে তাহার কোন তারতম্য হইবে কি না বুঝাইয়া বল।

[উত্তর : 7.3 cm]

10-6.7. কৈশিক বক্র (Capillary curve)। তরলে কোন সমতল পাত আংশিক ডুবাইলে পাতের খাড়া প্রান্ত হইতে দূরে পাতের তলের অভিলম্ব ছেদে তরলপৃষ্ঠের অনুরেখ (trace) একটি বিশেষ প্রকারের বক্র হইবে। ইহাকে কৈশিক বক্র বলে।

10.17 চিত্রে এইরূপ ছেদ দেখান হইয়াছে। পাত হইতে কিছু দূরে বক্র অনুভূমিক। কৈশিক বক্র যেখানে তরলের অনুভূমিক তল ছাড়িয়া উপরে ওঠে সেই বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া x-অক্ষ অনুভূমিক ও y-অক্ষ খাড়া উপরের দিকে নেওয়া গেল। কৈশিক বক্রের উপর P যে কোন বিন্দু; উহার স্থানাংক x, y। P বিন্দুতে বক্রের স্পর্শক x-অক্ষের সহিত ψ কোণ করিলে এবং ds ঐ স্থানে বক্রের স্বল্পাংশ হইলে $dy/ds = \sin \psi$ হইবে। চিত্রের তলে P বিন্দুতে কৈশিক বক্রের বক্রতা ব্যাসার্ধ $r = ds/d\psi$।

P বিন্দুতে তরল পৃষ্ঠের বক্রতা ছেদের, অর্থাৎ চিত্রের, তলে r এবং উহার অভিলম্বে ∞। অতএব P-তে বক্রতলের দুই পাশে প্রেষ বৈষম্য

$$p = \gamma/r.$$

P-র বাহিরে প্রেষ A হইলে মুক্ত অনুভূমিক তরল পৃষ্ঠের একই তলে সর্বত্র প্রেষ A হইবে। অতএব P বিন্দুতে তরল পৃষ্ঠের ঠিক নিচে প্রেষ ইহা অপেক্ষা $y\rho g$ কম। ρ = তরলের ঘনত্ব।

$$\therefore \quad y\rho g = \frac{\gamma}{r} = \gamma \frac{d\psi}{ds} = \gamma \frac{d\psi}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} = \gamma \sin \psi \frac{d\psi}{dy}$$

বা $\quad g\rho y \, dy = \gamma \sin \psi \, d\psi$

$$\therefore \quad \int_0^y g \rho y \, dy = \int_0^\psi \gamma \sin \psi \, d\psi$$

বা $\quad \frac{1}{2} g \rho y^2 = \gamma (1 - \cos \psi) \qquad (10\text{-}6.7)$

y এবং ψ চলরাশি দিয়া ইহাই কৈশিক বক্রের সমীকরণ।

পাত খাড়া এবং পাতের গা বাহিয়া তরল C বিন্দু পর্যন্ত উঠিলে ও θ স্পর্শকোণ হইলে, C-তে $\psi = \pi/2 - \theta$। C-তে $y = y_m$ লিখিলে পাই

$$\tfrac{1}{2} g \rho y_m^2 = \gamma \{1 - \cos(\pi/2 - \theta)\} = \gamma (1 - \sin \theta)$$

স্পর্শকোণ $0°$ হইলে

$$y_m^2 = 2\gamma / g\rho$$

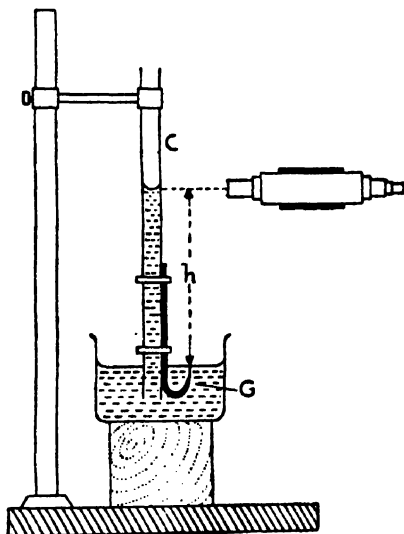
পাত তরলের সঙ্গে α-কোণে হেলিয়া থাকিলে C বিন্দুতে $\psi = \alpha - \theta$ হইবে। তখন

$$\tfrac{1}{2} g \rho y_m^2 = \gamma \{1 - \cos(\alpha - \theta)\}$$

10-7. পৃষ্ঠটান মাপা। পৃষ্ঠটান মাপিবার বহু উপায় উদ্ভাবিত হইয়াছে। ইহাদের স্থিতীয় ও গতীয় এই দুই অংশে ভাগ করা যায়।

স্থিতীয় উপায়গুলিতে তরল পৃষ্ঠ সাম্যে থাকে ; গতীয় উপায়গুলিতে তরল পৃষ্ঠ পরীক্ষাধীন অবস্থায় বাড়ে কমে, অর্থাৎ নূতন পৃষ্ঠের সৃষ্টি ও লয় চলিতে থাকে। সাম্যে তরল পৃষ্ঠ অপবস্তু দ্বারা দূষিত হওয়ার সম্ভাবনা বেশী থাকে। এজন্য কেহ কেহ গতীয় উপায়ই ভাল মনে করেন। কিন্তু তরল পৃষ্ঠ সাম্যে থাকিলেও উহা দোষমুক্ত করা সম্ভব, যদিও ইহাতে অত্যন্ত যত্নের দরকার। মাপনের সূক্ষ্মতা স্থিতীয় উপায়ে কিছু বেশী করা যায়, তবে তরল পৃষ্ঠের আকার ও স্পর্শকোণের মানজনিত কিছু অনিশ্চয়তা কোন কোন ক্ষেত্রে থাকে।

বিভিন্ন উপায়গুলির মধ্যে আমরা নিচের কয়েকটি আলোচনা করিব :

(১) কৈশিক নলের সাহায্যে,
(২) বড় ফোঁটার সাহায্যে,
(৩) বুদ্বুদের চরম প্রেষ-বৈষম্য মাপিয়া,

10.18 চিত্র

(৪) ফোঁটা ফেলিয়া,
(৫) তুলার সাহায্যে,
(৬) লহরীর সাহায্যে।

প্রথম পাঁচটি স্থিতীয় ও শেষেরটি গতীয় উপায়।

10-7.1. কৈশিক নলের সাহায্যে (Capillary rise method)। যে সকল তরল কাচের উপর ছড়াইয়া পড়ে, অর্থাৎ কাচ সাপেক্ষে যাহাদের স্পর্শকোণ ছোট, কাচের কৈশিক নলের সাহায্যে তাহাদের পৃষ্ঠটান সহজেই মাপা যায়। এজন্য সদ্য তৈয়ারী, পরিষ্কার এবং সুষম ব্যাসের সরু একটি কাচের নল দরকার।

10.18 চিত্রে C কাচের নল। নলের সঙ্গে বড়শির মত একটি কাচের কাঁটা (G) লাগান। নল ঠিক খাড়া করিয়া আটকান। পরীক্ষণীয় তরল একটি পাত্রে লইয়া নলের নিচ দিক তরলে ডুবাইলে তরল নলের মধ্যে উঠিবে। পাত্র একটু বেশী উঠাইয়া আস্তে আস্তে নামাইয়া, বা নল উঁচু নিচু করিয়া পাত্র এমনভাবে রাখিতে হইবে যাহাতে কাঁটার সরু মাথা তরলের ঠিক মুক্ততলে থাকে। ট্রাভলিং মাইক্রোস্কোপের পাটাতন অনুভূমিক করিয়া তরলের বাঁকাতলের নিম্নতম বিন্দু ফোকাস করিয়া নলে ঐখানে একটি দাগ দাও। পাত্রসমেত তরল সরাইয়া মাইক্রোস্কোপ কাঁটার সরু মাথায় ফোকাস কর। মাইক্রোস্কোপের দুই অবস্থানে পাঠের তফাৎ h। নলটি দাগ দেওয়া জায়গায় কাটিয়া পরস্পর অভিলম্ব দুইদিকে উহার ব্যাস মাপ এবং ইহাদের গড়মান নলের ব্যাস ($=2r$) বলিয়া ধর। 10-6.4 সমীকরণের সাহায্যে γ পাওয়া যাইবে। তরল মেনিস্কাসের (বক্র তরলপৃষ্ঠের নিম্নতম বিন্দুর অনুভূমিক তলের উপরের তরলের) জন্য শুদ্ধি r/h অনুপাতের উপর নির্ভর করে (10-6.5 সমীকরণ)।

স্পর্শকোণ $\theta=0°$ না হইলে তরল মেনিস্কাসের আয়তন হইবে

$$V=\pi r^3 \left(\sec\theta+\tfrac{2}{3}\tan^3\theta-\tfrac{2}{3}\sec^3\theta\right)$$

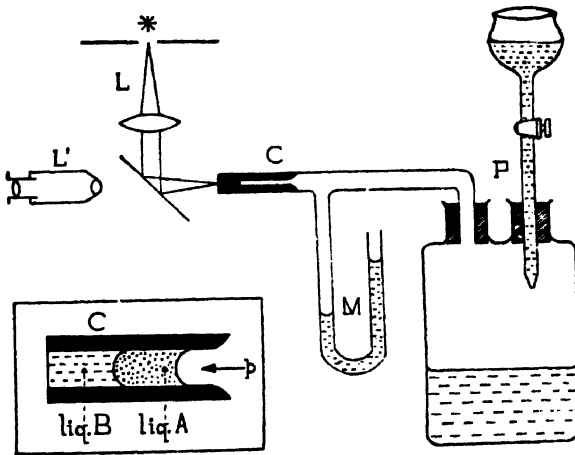
এক্ষেত্রে

$$\gamma=\frac{r\rho g}{2\cos\theta}\left\{h+r\left(\sec\theta+\tfrac{2}{3}\tan^3\theta-\tfrac{2}{3}\sec^3\theta\right)\right\} \qquad (10\cdot7.1)$$

r/h অনুপাত বড় হইলে শুদ্ধি আরও জটিল হয়, কারণ তখন বক্র তরল পৃষ্ঠকে গোলকের অংশ ধরা চলে না।

এ উপায়ে γ-র নির্ভরযোগ্য মান পাইতে হইলে তরলের উপরে বা নলের ভিতরে অপবস্তু, বিশেষ করিয়া তেল বা চর্বি জাতীয় পদার্থ থাকিলে চলিবে না। এ বিষয়ে খুব সতর্ক হইতে হইবে। তাছাড়া ইহাতে আরও কয়েকটি অসুবিধা আছে, যথা (১) স্পর্শকোণ সঠিক জানা না থাকা, (২) নলের ব্যাসের সুষমতা বিচারে অসুবিধা ও (৩) তরল মেনিস্কাসের উষ্ণতা না জানা। এ সব কারণে γ-র সঠিক মান পাইতে কৈশিক নলের ব্যবহার উপযুক্ত নয়।

উপরের অসুবিধাগুলি সত্ত্বেও পৃষ্ঠটান মাপনে কৈশিক নলের ব্যবহার বহু প্রচলিত। ঈষৎ পরিবর্তিতরূপে উহার দুইটি প্রয়োগ উল্লেখযোগ্য ; কোনটিতেই তরলের ঘনত্ব জানার দরকার হয় না। ইহার একটিতে নলের উপরাংশে প্রেষ বাড়াইয়া তরল নামাইয়া $h=0$ করা হয়। নলের ভিতরে তরল পৃষ্ঠ উপরের দিকে অবতল থাকে। এই পৃষ্ঠকে গোলীয় ধরা গেলে এবং R উহার বক্রতা ব্যাসার্ধ হইলে $p=2\gamma/R$ সমীকরণ প্রয়োগে γ পাওয়া যায়। বক্রতলে প্রতিফলন বা প্রতিসরণের সাহায্যে R মাপিতে হয়।

ফার্গুসনের উপায় (Ferguson's method)। দ্বিতীয়টিতে নল অনুভূমিক রাখিয়া নলে সামান্য তরল লইয়া এক পাশ হইতে প্রেষ বাড়াইয়া অন্য প্রান্তে তরলপৃষ্ঠ সমতল অবস্থায় আনা হয়। সমতলতা আলোক রশ্মির

10.19 চিত্র

প্রতিফলনের সাহায্যে বুঝিতে হয়। যান্ত্রিক ব্যবস্থা 10.19 চিত্রে দেখান হইয়াছে। C আলোচ্য কৈশিক নল ; M প্রেষমান ; P প্রেষ বাড়াইবার ব্যবস্থা ; L, L' প্রতিফলনে আলোকরশ্মি দেখিবার যন্ত্রাদি।

নলের তরলের অনুভূমিক সাম্য বিবেচনা করিলে দেখা যায়, θ স্পর্শকোণ এবং p প্রেষমানে দেখা চাপের আধিক্য হইলে

$$2\pi r.\gamma \cos\theta = p.\pi r^2 \quad (r = \text{নলের ব্যাসার্ধ}) \qquad (10\text{-}7.2)$$

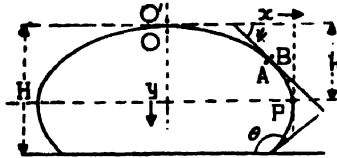
θ জানা থাকিলে p ও r মাপিয়া γ পাওয়া যায়।

পৃষ্ঠটান মাপনের এই উপায় ফার্গুসনের উপায় বলিয়া পরিচিত। ইহাতে তরল দরকার হয় মাত্র কয়েক mm^3। $\theta = 0^\circ$ এবং নলের ব্যাস 1 mm-এর কম হইলে ফল বেশ নির্ভরযোগ্য হয়।

ফার্গুসনের উপায়ে দুই তরলের আন্তঃপৃষ্ঠটানও মাপা যায়। চৌকায় ঘেরা ছবিতে C নলে তরল সূত্রের ডানদিকের অংশের তরলকে A ও বাঁদিকের অংশের তরলকে B বলা যাক। মাঝখানে উভয় তরলে সংস্পর্শ আছে। নলের ডানদিকে প্রেষ বাড়াইয়া B তলের বাঁ প্রান্ত সমতল করিলে, A তরলের ও আন্তঃপৃষ্ঠের স্পর্শকোণ উভয়েই 0° হইলে, A তরলের অনুভূমিক সাম্য বিচারে পাই

$$2\pi r\gamma_A + 2\pi r\ \gamma_{AB} = p.\pi r^2$$

$$\text{বা}\quad \gamma_{AB} = \tfrac{1}{2}pr - \gamma_A$$

10-7.2. বড় ফোঁটার সাহায্যে (Sessile drop method)। যে সকল তরলের স্পর্শকোণ 90°-র বেশী, অনুভূমিক সমতল পাতের উপর তাহাদের বড় একটি ফোঁটা গড়িয়া তরলের পৃষ্ঠটান ও স্পর্শকোণ উভয়ই বাহির করা যায়।

10.20 চিত্র

10.20 চিত্রে এইরূপ একটি ফোঁটার মধ্যচ্ছেদ (meridional section) দেখান হইয়াছে। ছেদের ঊর্ধ্বতম বিন্দু দিয়া যে খাড়া অক্ষ যায়, ঐ অক্ষে ছেদ ঘুরাইলে যে আকার হয় ফোঁটার তাহাই আকার।

চিত্রের O, O' এই প্রতিসম অক্ষে তরল পৃষ্ঠের ঠিক নিচে ও ঠিক উপরে দুইটি বিন্দু। A, B তরল পৃষ্ঠের অন্যত্র অনুরূপ দুইটি বিন্দু। O-কে মূলবিন্দু ধরিয়া x-অক্ষ অনুভূমিক ও y-অক্ষ নিচের দিকে নেওয়া গেল। A-র স্থানাংক x, y। O-র কাছে তরল পৃষ্ঠ গোলীয়; উহার বক্রতা ব্যাসার্ধ R_0 ধরা যাক। A-তে ছেদের তলে বক্রতা ব্যাসার্ধ R_1 এবং উহার অভিলম্বে R_2। O-তে প্রেষ P_0, A-তে P_A, ইত্যাদি হইলে

$$P_A - P_B = \gamma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$P_A - P_O = g\,\rho_1 y \quad (\rho_1 = \text{তরলের ঘনত্ব})$$

$$P_O - P_{O'} = 2\gamma/R_0$$

$$P_B - P_{O'} = g\,\rho_2 y \quad (\rho_2 = \text{তরলের বাহিরে গ্যাসের ঘনত্ব})$$

এখন, $P_A - P_B = (P_A - P_O) + (P_O - P_{O'}) - (P_B - P_{O'})$

বা $\gamma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2\gamma}{R_0} + g\,(\rho_1 - \rho_2)\,y$

$$= \frac{2\gamma}{R_0} + g\rho y \quad [\rho_1 - \rho_2 = \rho \text{ লিখিয়া}] \qquad (10\text{-}7.3)$$

ইহাই মধ্যচ্ছেদ বক্রের সমীকরণ। অবকল সমীকরণের আকারে ইহা লেখা যায়। সাধারণ ক্ষেত্রে ইহার সমাকলন সম্ভব নয়, কিন্তু ফোঁটার উপরের পৃষ্ঠের মধ্যাংশ সমতল ধরিলে সমাকলন সম্ভব। ফোঁটা আকারে যথেষ্ট বড় হইলে এরূপ ধরা চলে। নীচে ইহা করা হইল।

O-র কাছে পৃষ্ঠ সমতল হইলে $R_0 = \infty$ এবং

$$\gamma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = g\rho y$$

$R_2 > R_1$ হইলে $1/R_1$ এর তুলনায় $1/R_2$ উপেক্ষা করিয়া পাই

$$\gamma/R_1 = g\rho y$$

A-বিন্দুতে বক্রের স্পর্শক x-অক্ষের সঙ্গে ψ কোণ করিলে, এবং ds A-তে বক্রের স্বল্পাংশ হইলে

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\psi}{dy}\cdot\frac{dy}{ds} = \sin\psi\,\frac{d\psi}{dy} \qquad (10\text{-}6.7 \text{ অনুচ্ছেদ দেখ})$$

অতএব $\gamma \sin\psi\, d\psi = g\rho y\, dy$

বা $$\int_0^{\psi} \gamma \sin\psi\, d\psi = \int_0^{y} g\rho y\, dy$$

বা $\gamma\,(1 - \cos\psi) = \frac{1}{2}\, g\rho y^2 \qquad (10\text{-}7.4)$

মধ্যচ্ছেদের বক্রের P বিন্দুতে $\psi = 90°$ এবং $y = h$ হইলে

$$\gamma = \frac{1}{2}\, g\rho h^2 \qquad (10\text{-}7.5)$$

বক্র যেখানে নীচে সমতল পাতকে স্পর্শ করে সেখানে ψ = স্পর্শকোণ θ। ফোঁটার উচ্চতা H হইলে 10-7.4 সমীকরণ হইতে পাই

$$\gamma\,(1-\cos\theta)=\tfrac{1}{2}\,g\rho H^2 \qquad (10\text{-}7.6)$$

$$\text{বা}\quad \cos\theta=\frac{h^2-H^2}{h^2} \qquad (10\text{-}7.7)$$

θ স্থূলকোণ।

10-7.5 সমীকরণ হইতে γ, এবং ইহা জানিয়া 10-7.6 সমীকরণ হইতে θ পাওয়া যায়। ইহার জন্য ফোঁটার উচ্চতা (H), এবং ফোঁটার স্পর্শক যেখানে খাড়া (অর্থাৎ ফোঁটার অনুভূমিক ব্যাস সবচেয়ে বেশি) সেই তল হইতে ফোঁটার উপরের তলের খাড়া দূরত্ব (h) মাপিতে হয়। ইহা কিভাবে করা যায় তাহার একটি ব্যবস্থা নিচে বলা হইল।

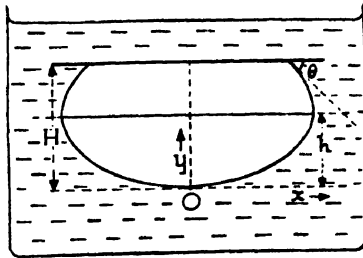
যে পাতের উপর তরলের ফোঁটা গড়া হইবে তাহা সম্পূর্ণ পরিষ্কার ও অনুভূমিক থাকিবে। ফোঁটাসমেত পাত্র একটি কাচের বাক্সে, এবং বাক্সের উপরের ঢাকার মাঝখানে একটি ছেঁদা থাকা দরকার। একটি স্ফেরো-মিটারের স্ক্রুর মাথায় খুব সূক্ষ্মাগ্র একটি কাচের পিন লাগাইয়া প্রথমে পিনের মাথা ফোঁটার উপরে ঠিক মাঝখানে স্পর্শ করাইয়া রাখা হইল। h মাপিতে গাউস আইপীস (Gauss eye-piece)-বিশিষ্ট ট্রাভলিং মাইক্রো-স্কোপ নিলে সুবিধা হয়। এই আইপীসে পাশে একটি ছেঁদা থাকে ও ছেঁদার বিপরীতে আইপীসের ভিতরে পাতলা একখানা কাচের পাত মাইক্রোস্কোপ অক্ষের সঙ্গে 45° কোণে লাগান থাকে। মাইক্রোস্কোপ অক্ষ অনুভূমিক করিয়া লইতে হয়। ছেঁদা দিয়া আইপীসের ভিতরে অনুভূমিক আলোকরশ্মি ফেলিলে, এবং মাইক্রোস্কোপ উঠাইয়া বা নামাইয়া ফোঁটার খাড়া স্পর্শকের অনুভূমিক তলে আনিলে, ফোঁটার খাড়া পাশ হইতে প্রতিফলিত আলো মাইক্রোস্কোপ অক্ষ বরাবর আসিয়া দর্শকের চেখে পড়িবে। অন্য অবস্থানে আলো দেখা যাইবে না। এই স্থানে পাঠ লইয়া, তরল ফোঁটা সরাইয়া মাইক্রোস্কোপ তুলিয়া ও আগাইয়া কাচের পিনের মাথায় ফোকাস করিলে মাইক্রোস্কোপের দুই অবস্থানের পাঠ হইতে h পাওয়া যাইবে। H পাইতে স্ফেরোমিটারের স্ক্রু নামাইয়া উহার পিন ফোঁটার পাতে স্পর্শ করাইতে হইবে।

γ ও θ সংক্রান্ত 10-7.5 ও 10-7.6 সমীকরণ দুটি পাইতে $R_2 > R_1$ ও ফোঁটার উপরের তল সমতল ধরা হইয়াছে। ফোঁটা খুব বড় না হইলে ইহা হয় না। পরীক্ষার জন্য যে সকল ফোঁটা গড়া হয় তাহার মূল বিন্দুতে

কিছু বক্রতা থাকে এবং R_2-র তুলনায় R_1 সম্পূর্ণ উপেক্ষণীয় হয় না। এরূপ ফোঁটা লইয়া মাপনে শুদ্ধি দরকার। ফার্গুসন দেখাইয়াছেন যে ফোঁটার বৃহত্তম অনুভূমিক ব্যাসার্ধ r হইলে $h^2 = 2\gamma/g\rho$ না হইয়া

$$h^2 = \frac{2\gamma}{g\rho} + 0{\cdot}606\frac{(2\gamma/g\rho)^{\frac{3}{2}}}{r}$$

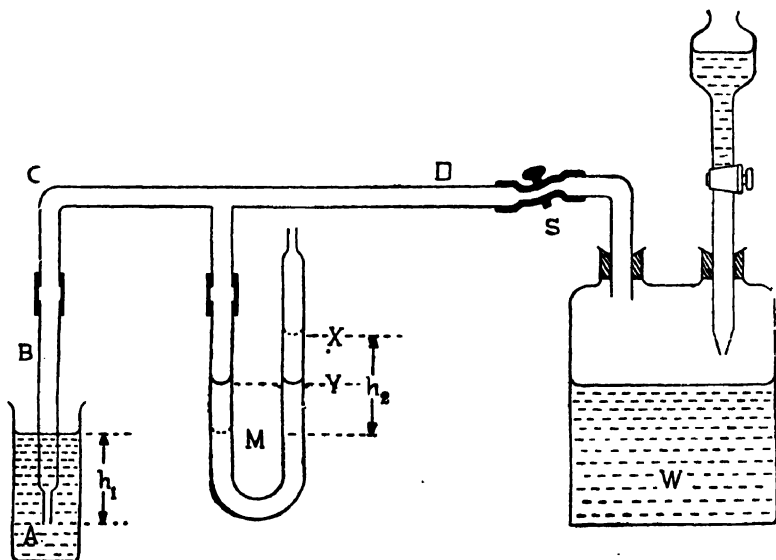
হইবে। $2\gamma/g\rho = h^2$ ধরিয়া উপরের সমীকরণের ডানদিকের দ্বিতীয় পদে এই মান বসাইলে $2\gamma/g\rho$-র আংশিক শুদ্ধ মান পাওয়া যায়। এই মান দ্বিতীয়বার একই পদে আর একবার বসাইয়া উহার আর একটু শোধিত মান পাওয়া যায়। কয়েকবার এরূপ করিলে $2\gamma/g\rho$-র মান কার্যতঃ স্থির হয়। ইহা হইতে γ হিসাব করা হয়। h/r-এর বিভিন্ন মানে কি শুদ্ধি দরকার তাহার সারণিও প্রস্তুত হইয়াছে।

$\theta < 90°$ হইলেও উপরের সম্পর্ক দুটি ব্যবহার করা যায়। এরূপ ক্ষেত্রে অনুভূমিক সমতল পাত তরলে ডুবাইয়া উহার নিচে বায়ু ঢুকাইয়া বড় বুদ্বুদ গঠন করিতে হয় (10.21 চিত্র)। এখানে ফোঁটার নিম্নতম বিন্দু (O) নির্দেশাংকের মূলবিন্দু ও y-অক্ষ উপরের দিকে ধরিতে হইবে। আর সকলই

10.21 চিত্র

আগের মত। মাইক্রোস্কোপ ব্যবহারের সুবিধার জন্য তরল পাত্রের পাশগুলি সমতল কাচের পাতের হওয়া দরকার।

বড় ফোঁটা বা বুদ্বুদ লইয়া ফার্গুসনের শুদ্ধি প্রয়োগ করিলে ইহাতে ভাল ফল পাওয়া যায়। h মাপনে বিশেষ সতর্কতা দরকার কারণ ইহাতেই অশুদ্ধি সবচেয়ে বেশী হইতে পারে। গলিত ধাতুর γ ও θ পাইতে বড় ফোঁটা ব্যবহার করা হইয়াছে। লেনসের সাহায্যে ফোঁটার বিবর্ধিত প্রতিবিম্ব গঠন করিয়া উহাতে মাপন করা হয়।

10-7.3. বুদ্বুদের চরম প্রেষ-বৈষম্য হইতে—ইয়েগারের উপায় (Maximum bubble pressure or Jager's method)। এই উপায়ে পরীক্ষণীয় তরলে আংশিক ডুবান সরু নলের মাথায় গড়া বুদ্বুদের ভিতরে বাহিরে চরম প্রেষ-বৈষম্য কত হইতে পারে তাহা মাপিয়া তরলের পৃষ্ঠটান বাহির করা যায়, স্পর্শকোণ জানিবার দরকার হয় না। প্রায় 0.5 mm ব্যাসের সমতল প্রান্ত একটি কৈশিক নল খাড়াভাবে তরলে ডুবান হয়। নলের ভিতরের মুখের সীমারেখা গোল এবং অভগ্ন হওয়া দরকার। তরল পাত্রের ব্যাস অন্তত: 8 cm হওয়া ভাল; নহিলে তরল পৃষ্ঠ সমতল না হইয়া উহাতে কৈশিক বক্রতা থাকিতে পারে।

10.22 চিত্রে যান্ত্রিক ব্যবস্থা দেখান হইয়াছে। W বোতলে ফোঁটা ফোঁটা করিয়া জল ফেলা হয়। ইহাতে $DCBA$ কৈশিক নলের মুখ A-তে বায়ুর বুদ্বুদ গঠিত হয়। কয়েক সেকেণ্ডে একটি করিয়া বুদ্বুদ A মুখ হইতে

10.22 চিত্র

বাহির হইতে পারে এমন হারে জলের ফোঁটা ফেলা হয়। ইহাতে প্রেষমানের তরলের উচ্চতা মাপিতে সুবিধা হয়। A-র বাহিরে পরীক্ষণীয় তরল।

প্রেষমান M-এর নলে হালকা তেল থাকে। W বোতলে ফোঁটা ফেলায় বুদ্বুদ যখন বড় হইতে থাকে তেল তখন খোলা নলে উপরে ওঠে। তেল

সবচেয়ে বেশী কতটা ওঠে তাহাই দেখিতে হয় কারণ বুদ্বুদ A হইতে বিচ্ছিন্ন হইবার আগ পর্যন্ত প্রেষ বাড়িতে থাকে।

A ছাড়িবার সময় বুদ্বুদের ব্যাসার্ধ r_b হইলে উহার ভিতরে প্রেষ বাহিরের প্রেষ অপেক্ষা $2\gamma/r_b$ বেশী। A পরীক্ষণীয় তরলের h_1 গভীরতায় থাকিলে এবং ρ_1 এই তরলের ঘনত্ব ও P_0 বায়ুমণ্ডলের প্রেষ হইলে, বুদ্বুদের বাহিরে প্রেষ $P_0+h_1\rho_1 g$। প্রেষমান M-এর তরলের ঘনত্ব ρ_2 এবং উহার দুই নলের উচ্চতার চরম প্রভেদ h_2 হইলে, ভিতরের চাপ $P_0+h_2\rho_2 g$। অতএব

$$2\gamma/r_b=(P_0+h_2\rho_2 g)-(P_0+h_1\rho_1 g)$$

$$\text{বা}\quad \gamma=\tfrac{1}{2}g r_b\,(h_2\rho_2-h_1\rho_1) \qquad (10\text{-}7.8)$$

r_b-কে নলের ব্যাসার্ধ r-এর সমান ধরা সমর্থনযোগ্য হইলে এই উপায়ে γ র নিরপেক্ষ মান পাওয়া যাইত। কিন্তু r_b-কে নলের ব্যাসার্ধের সমান ধরা চলে না। মনে করা গিয়াছিল r_b নলের ব্যাসার্ধের সমান না হইলেও একমাত্র উহার উপরই নির্ভর করে, অর্থাৎ $r_b=f(r)$। কিন্তু $f(r)$-এর রূপ জানা না থাকায় γ-র নিরপেক্ষ মাপনে 10-7.8 সমীকরণ প্রয়োগ করা সম্ভব হয় নাই। সকল তরলে $f(r)$-এর রূপ একই ধরিয়া উপরের সমীকরণের সাহায্যে দুই তরলের γ তুলনা করা চলে। বিভিন্ন উষ্ণতায় একই তরলের পৃষ্ঠটান, বা বিভিন্ন গাঢ়তার দ্রবণের পৃষ্ঠটান তুলনা করিতে এই উপায়ের সুষ্ঠু প্রয়োগ হইতে পারে। বিভিন্ন উষ্ণতায় গলিত ধাতুর পৃষ্ঠটান তুলনায়ও এ উপায় ব্যবহৃত হুইয়াছে।

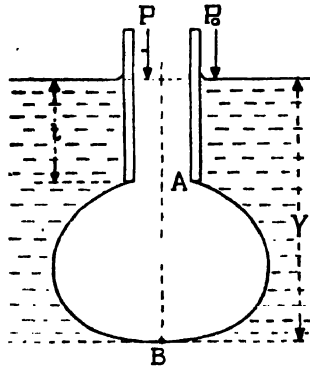
চরম প্রেষ বৈষম্য দেখিয়া পৃষ্ঠটান মাপনের পরীক্ষার অংশ এত সহজ যে ইহার সাহায্যে γ-র নিরপেক্ষ মাপনের তত্ত্ব রচনার চেষ্টা হইয়াছে। শ্রয়ডিঙ্গার (Schroedinger) দেখাইয়াছেন যে বুদ্বুদের চরম প্রেষ বৈষম্য p, তরলের ঘনত্ব ρ_1, বুদ্বুদের ভিতরে গ্যাসের ঘনত্ব ρ_2 ও নলের মুখের ব্যাসার্ধ r হইলে, এবং $h=p/(\rho_1-\rho_2)g$ লিখিলে

$$\gamma=\tfrac{1}{2}rp\left[1-\frac{2}{3}\cdot\frac{r}{h}-\frac{1}{6}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right]$$

হইবে। বিভিন্ন তরলে r-এর বিশেষ বিশেষ মানে এই সমীকরণ প্রয়োগে ভাল ফল পাওয়া যায়।

সাগডেনের তত্ত্ব। এ সম্পর্কে সাগডেনের (Sugden) তত্ত্বই সবচেয়ে ব্যাপক। তিনি বুদ্বুদকে গোলক না ধরিয়া উহার আকার 10-7.3 সমীকরণ

দিয়া নির্ণীত ধরিয়াছেন। আলোচ্য ক্ষেত্রে এ সমীকরণের সমাধান সোজাসুজি করা যায় না। তত্ত্বের সারাংশ নিচে সংক্ষেপে বলা হইল।

10.23 চিত্রে তরলের ভিতরে নলের মুখে গঠিত একটি বুদ্বুদের খাড়া মধ্যচ্ছেদ দেখান হইয়াছে। তরল পৃষ্ঠের সমতলে নলের ভিতরে চাপ P এবং

10.23 চিত্র

বাহিরে P_0। নলের প্রান্তস্থ বুদ্বুদের A বিন্দুতে মুখ্য ব্যাসার্ধ R_1, R_2, তরলের ঘনত্ব ρ_1, বুদ্বুদের ভিতরে গ্যাসের ঘনত্ব ρ_2, $\rho = \rho_1 - \rho_2$ এবং $t =$ নলের ডুবান অংশের দৈর্ঘ্য হইলে

$$\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \text{ভিতরের চাপ} - \text{বাহিরের চাপ}$$

$$= (P + g\rho_2 t) - (P_0 + g\rho_1 t)$$

$$\text{বা } \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + g\rho t = P - P_0.$$

বুদ্বুদের নিম্নতম বিন্দু B-তে $R_1 = R_2 = b$ ধরিলে

$$2\gamma \quad g\rho Y = P - P$$

$$\therefore \quad \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\gamma}{b} + g\rho(Y - t) = \frac{2\gamma}{b} + g\rho z.$$

$$[\, z = Y - t \,]$$

চাপের আধিক্য $\gamma\,(1/R_1 + 1/R_2) = g\rho h$ লিখিলে $g\rho h = 2\gamma/b + g\rho z$

$$\text{বা } h = \frac{2\gamma}{g\rho b} + z = \frac{a^2}{b} + z. \qquad (10\text{-}7.9)$$

এখানে আমরা $2\gamma/g\rho = a^2$ লিখিয়াছি।

10-7.9 সমীকরণের প্রতীকগুলির (symbols) অর্থ পরিষ্কার জানা থাকা দরকার। তরলের মুক্ততলে নলের ভিতরের চাপ P ও বাহিরে P_0 হইলে, নলের প্রান্তস্থ A বিন্দুতে চাপের আধিক্য $g\rho h$। a^2 রাশিটি তরলের ঘনত্ব ও পৃষ্ঠটান দিয়া নির্দিষ্ট। P চাপে বুদ্বুদের খাড়াই z এবং নিম্নতম বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ b। P_0-কে স্থির ধরা হইবে। P বদলাইলে h, b এবং z বদলাইবে। সমীকরণে নলের ব্যাস r-এর উল্লেখ নাই। উহার উভয়দিক r/a^2 দিয়া গুণ করিলে পাই

$$\frac{rh}{a^2}=\frac{r}{b}+\frac{rz}{a^2}=\frac{r}{b}+\frac{r}{a}\cdot\frac{z}{b}\cdot\frac{b}{a}$$

$$X=\frac{a^2}{h} \tag{10-7.10}$$

বলিয়া একটি নতুন রাশির অবতারণা করিলে উপরের সমীকরণ হয়

$$\frac{r}{X}=\frac{r}{b}+\frac{r}{a}\cdot\frac{z}{b}\cdot\frac{b}{a} \tag{10-7.11}$$

এখানে লক্ষণীয় যে বিচ্ছিন্ন হইবার সময় বুদ্বুদের ব্যাস নলের ব্যাসের সমান থাকে ধরিলে $X=r$ হইবে, কারণ তখন $2\gamma/r=g\rho h$ বা $r=a^2/h$।

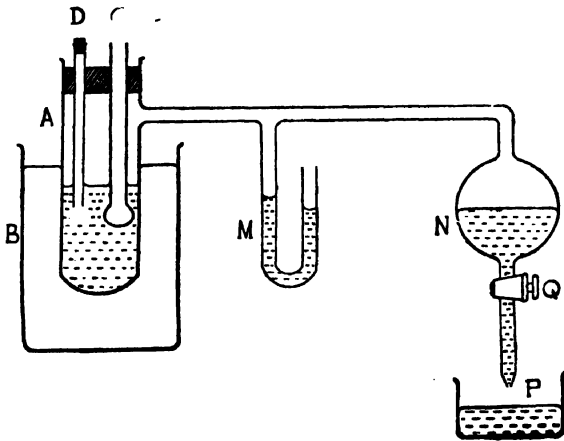
10-7.11 সমীকরণে r ব্যাসার্ধের নলে বুদ্বুদ গঠনে বুদ্বুদের ও পরীক্ষণীয় তরলের সকল সংশ্লিষ্ট রাশিগুলিই আছে। নির্দিষ্ট নল ও তরলে r/a স্থিরমান। ভিতরের চাপ বাড়াইলে বুদ্বুদের আকার ও আয়তন উভয়ই বদলাইবে। নির্দিষ্ট চাপে h, b, X ও r/X-এর মান স্থির।

ব্যাশফোর্থ (Bashforth) ও অ্যাডাম্‌স্‌ (Adams) b/a-র নির্দিষ্ট মানে উহার সহগামী (corresponding) r/b ও z/b-র তালিকা প্রণয়ন করিয়াছেন। ইহার সাহায্যে b/a-র কোন মানে r/X কত হইবে তাহা 10-7.11 সমীকরণ দিয়া পাওয়া যায়।

$$\frac{r}{X}=\frac{rh}{a^2}=\frac{rhg\rho}{2\gamma} \text{ বলিয়া}$$

$$\gamma=\tfrac{1}{2}g\rho h X \tag{10-7.12}$$

গণনায় দেখা যায় r/a-র নির্দিষ্ট মানে বুদ্বুদের আকার ক্রমাগত বাড়িতে থাকিলে, r/X চরমমানে পৌঁছিয়া কমিতে থাকে। ধরা হয় r/X চরম হইলে বুদ্বুদ বিচ্ছিন্ন হয়। এই সময়ই ভিতরে চাপের আধিক্য সবচেয়ে বেশী। সাগডেন r/a-এর বিভিন্ন মানে r/X-এর চরম মানের তালিকা চারটি সার্থক সংখ্যা পর্যন্ত তৈয়ারি করিয়াছেন।

প্রসঙ্গতঃ, এই তালিকা হইতে দেখা যায় বুদ্বুদ কি অবস্থায় বিচ্ছিন্ন হইবে তাহা নলের ব্যাসের উপর নির্ভর করে। নলের প্রান্তস্থ *A* বিন্দুতে বুদ্বুদ পৃষ্ঠের ভিতরের দিকে টানা লম্ব যদি বুদ্বুদের খাড়া অক্ষের সঙ্গে ϕ কোণ করে, তাহা হইলে দেখা যায় খুব সরু নলে বুদ্বুদ বিচ্ছিন্ন হইবার সময় ϕ কার্যতঃ 90°, অর্থাৎ বুদ্বুদের ব্যাস নলের ব্যাসের সমান এবং বুদ্বুদের আকার প্রায় অর্ধগোলক। 3.5 mm ব্যাসার্ধের নলে ϕ-এর এরূপ মান 160°।

10.24 চিত্র

পরীক্ষা। পরীক্ষণীয় তরলে একই গভীরতায় দুটি বিভিন্ন ব্যাসের নলের মাথায় গঠিত বুদ্বুদে চাপের চরম আধিক্য মাপিয়া সাগডেনের প্রস্তাবিত তত্ত্বের সাহায্যে তরলের পৃষ্ঠটান সূক্ষ্মভাবে পাওয়া যায়। যান্ত্রিক ব্যবস্থা 10.24 চিত্রে দেখান হইয়াছে। পরীক্ষণীয় তরল *A* পাত্রে রাখা। *B* পাত্র উষ্ণকুণ্ড (temperature bath); উহার সাহায্যে উষ্ণতা ইচ্ছামত মানে স্থির রাখা যায়। *C* ও *D* বিভিন্ন ব্যাসের কৈশিক নল; ইহাদের একটির ব্যাস প্রায় 3 mm ও অন্যটির 0.1-0.2 mm হইলে ভাল হয়। নল দুটি খাড়া এবং উহাদের নিচ প্রান্ত একই অনুভূমিক তলে। নলের মুখ সমতল ও মসৃণ। রবারের ছিপি দিয়া *A*-র মুখ আঁটা, এবং *C* ও *D* ছিপির ভিতর দিয়া আঁট করিয়া গলান। *C* বা *D*-র একটিতে যখন মাপন হয়, অন্যটির উপরের মুখ তখন বন্ধ থাকে। প্রেষমান *M*, *A* নলের ভিতরের বায়ুর সঙ্গে যুক্ত। *N* পাত্রে পারা থাকে; উহার সঙ্গে

লাগান নলের সরু মুখ P দিয়া পারা দরকার মত বাহির করিয়া দেওয়া যায়। Q স্টপকক্ খুলিলে পারা বাহির হইবে এবং A-র ভিতরে বায়ুর চাপ কমিবে। ইহাতে C বা D-র যেটি খোলা তাহা দিয়া বাহির হইতে বায়ু আসিয়া নলের মাথার বুদ্বুদ গঠন করিবে। বুদ্বুদ গঠনে প্রেষমানে চরম প্রেষ বৈষম্য কত হয় তাহাই দেখিতে হয়।

ধরা যাক ρ = তরলের ঘনত্ব − বায়ুর ঘনত্ব। প্রেষমানে পাওয়া চরম প্রেষ বৈষম্য $p = g\rho H$ রূপে লেখা হইবে। নল দুটিকে 1, 2 পাদাংক দিয়া নির্দেশ করা হইবে। উহাদের নিচের মুখের ব্যাসার্ধ r_1 ও r_2, এবং চরম প্রেষ বৈষম্য যথাক্রমে $p_1 = g\rho H_1$ ও $p_2 = g\rho H_2$।

$g\rho H_1$ দুটি চাপের যোগফল। একটি হইল নলের মুখ t গভীরতায় থাকার জন্য ঔদ চাপ, ও অন্যটি হইল বুদ্বুদ পৃষ্ঠের বক্রতার জন্য। সাগডেনের তত্ত্ব অনুসারে শেষোক্ত চাপ $g\rho h_1$ রূপে লেখা যায় (10-7.9 সমীকরণ)। অতএব

$$g\rho H_1 = g\rho t + g\rho h_1 \quad \text{বা} \quad H_1 = t + h_1 = t + \frac{a^2}{X_1} \quad \text{(10-7.10 সমীকরণ)}$$

অনুরূপে $H_2 = t + a^2/X_2$।

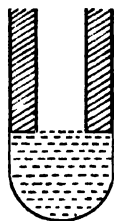
$$\therefore \quad H_1 - H_2 = a^2 \left(\frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2}\right) \quad \text{বা} \quad a^2 = \frac{H_1 - H_2}{1/X_1 - 1/X_2} \qquad \text{(10-7.13)}$$

এই সমীকরণে $X_1 = r_1$ ও $X_2 = r_2$ ধরিয়া a^2-এর স্থূলমান পাওয়া যায়। এই মান লইয়া r_1/a ও r_2/a বাহির করিয়া সাগডেনের সারণি হইতে r_1/X_1 ও r_2/X_2-র চরমমান দেখিতে হয়। ইহা হইতে যে X_1 ও X_2 পাওয়া যায় তাহা আবার 10-7.13 সমীকরণে বসাইলে a^2-এর আগের চেয়ে সূক্ষ্ম মান পাওয়া যায়। a-র এই মানে আবার r_1/a ও r_2/a বাহির করিয়া সারণি হইতে r_1/X_1 ও r_2/X_2, অর্থাৎ X_1 ও X_2, নিয়া a^2-এর আরও সূক্ষ্ম মান পাওয়া যায়। কয়েকবার এই রকম করিলে a^2-এর আর বিশেষ কোন পরিবর্তন পাওয়া যায় না। $a^2 = 2\gamma/g\rho$ সম্পর্কের সাহায্যে তখন γ বাহির করা হয়। এইভাবে নির্ণীত মান খুব সূক্ষ্ম বলিয়া অনুমিত হয়।

এই উপায়ে সাগডেন 20°C উষ্ণতায় জলের পৃষ্ঠটান পাইয়াছিলেন 72.91 dyn/cm।

10-7.4 ফোঁটার ভার মাপিয়া (Drop weight method)। ইহাতে সমতল প্রান্ত এবং ঠিক গোল ছেদের একটি সরু নল হইতে ফোঁটা ফোঁটা

তরল পড়িতে দিয়া ফোঁটার ভার মাপিয়া γ পাওয়া যায়। স্পর্শকোণ জানার দরকার হয় না।

সরু নলের মুখে আস্তে আস্তে একটি ফোঁটা জমিতে দিলে, সুবিধার জন্য আমরা ধরিব পড়ার ঠিক আগে উহার আকার 10.25 চিত্রের মত হয়।

10.25 চিত্র

ফোঁটার উপরের দিক বেলনের অংশ আর নিচের দিক গোলকের অংশ। এইরকম হইবার পর উপরের অংশ নিচের অংশের ভারে সরু হইয়া ফোঁটা খসিয়া পড়ে।

নল ও তরলে বাহিরে যেখানে স্পর্শ ঘটিয়াছে সেখানে নলের ব্যাসার্ধ r হইলে ফোঁটার উপরে পৃষ্ঠটানের জন্য উর্ধ্বমুখী বল $2\pi\gamma r$। ফোঁটার ওজন mg। বায়ুপ্রেষ ফোঁটার সবদিকেই আছে বলিয়া উহার ক্রিয়া উপেক্ষা করা যায়। বেলন আকার অংশে ভিতরের দিকে প্রেষের আধিক্য γ/r। ইহার জন্য ফোঁটার অর্ধগোলক অংশের উপর $\pi r^2.\gamma/r$ বল নিচের দিকে ক্রিয়া করে। অতএব

$$2\pi r\gamma = \pi r^2\gamma/r + mg$$

$$\text{বা} \quad \pi r\gamma = mg \tag{10-7.14}$$

এ সম্পর্ক সঠিক নয়। প্রথম প্রথম পরীক্ষায় দেখা গিয়াছিল সমীকরণের বাঁদিকে গুণক π না হইয়া 4-এর কাছাকাছি সংখ্যা হইলে সম্পর্ক অনেকটা ঠিক হয়। সব তরলে একই গুণক হইলে একই যন্ত্রে বিভিন্ন γ তুলনা করিতে সঠিক সম্পর্কের প্রয়োজন নাই, কারণ এক্ষেত্রে

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{m_1}{m_2} \tag{10-7.15}$$

তুলনার জন্য নলে একই আয়তনের তরল নেওয়া হয়। প্রথম তরলে এই

V আয়তনে n_1 সংখ্যক ফোঁটা হইলে এবং তরলের ঘনত্ব ρ_1 হইলে $V\rho_1 = n_1 m_1$ । দ্বিতীয় তরলে অনুরূপে $V\rho_2 = n_2 m_2$ । অতএব

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{V\rho_1/n_1}{V\rho_2/n_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{n_2}{n_1} \tag{10-7.16}$$

বিভিন্ন গাঢ়তার দ্রবণের পৃষ্ঠটান তুলনা করিতে এই সমীকরণ ব্যবহৃত হয়।

পড়ন্ত ফোঁটার ভারের সহিত পৃষ্ঠটানের সঠিক সম্পর্ক হারকিন্‌স (Harkins) ও ব্রাউন (Brown) বাহির করিয়াছেন। তাঁহাদের যুক্তি কিছুটা তত্ত্বগত ও কিছুটা পরীক্ষালব্ধ। নলের মুখ হইতে বিচ্ছিন্ন ফোঁটার আয়তন V, ভার mg, তরলের পৃষ্ঠটান γ ও ঘনত্ব ρ এবং নলের মুখের ব্যাসার্ধ r হইলে লেখা যায়

$$mg = f(r, \gamma, V, \rho)$$

উভয় দিকের মাত্রা সমান হইতে হইবে। অতএব ডানদিকের রাশিগুলি $r^x \gamma^y V^z \rho^u$ রূপে লিখিলে মাত্রীয় সমীকরণ হইবে

$$MLT^{-2} = L^x (MT^{-2})^y (L^3)^z (ML^{-3})^u.$$

দুপাশে M-এর মাত্রা একই হইবে বলিয়া পাই

$$1 = y + u$$

L ও T হইতে অনুরূপে পাই

$$1 = x + 3z - 3u$$

$$\text{এবং} \quad -2 = -2y.$$

অতএব $y = 1, u = 0$ এবং $z = (1-x)/3$, অর্থাৎ

$$mg = f(r^x . \gamma . V^{(1-x)/3})$$
$$= r\gamma f_1 (r^{x-1} . V^{-(x-1)/3})$$
$$= r\gamma f_1 \left(\frac{r}{V^{\frac{1}{3}}}\right)^{x-1} = r\gamma\phi\left(\frac{V}{r^3}\right) \tag{10.7-17}$$

$r\gamma$-এর মাত্রা mg-র মাত্রা এবং V/r^3 মাত্রা-বিহীন রাশি।

হারকিন্‌স্ ও ব্রাউন বিভিন্ন ব্যাসের নল লইয়া প্রত্যেকটি হইতে একই তরলের ফোঁটা ফেলিয়া উহাদের mg ও V মাপেন ও অন্য উপায়ে তরলের পৃষ্ঠটান বাহির করেন। r জানা থাকায় ইহাতে V/r^3 এবং $\phi(V/r^3)$-এর মান পাওয়া গেল, এবং V/r^3-কে ভুজ ও ϕ কে কোটি করিয়া বক্র টানা গেল। চারিটি বিভিন্ন তরল লইয়া তাঁহারা দেখেন সকলের $V/r^3 - \phi$ বক্র একই।

ইহা হইতে সাব্যস্ত করা হয় যে এইরূপ বক্রের সাহায্যে যে কোন তরলের পৃষ্ঠটান মাপা সম্ভব। ফোঁটা ফেলিয়া V/r^3 দেখিতে হয়, এবং এই মানে ϕ কত তাহা বক্র বা সারণি হইতে দেখা হয়। প্রযোজ্য সমীকরণ হয়

$$\phi r\gamma = mg \qquad (10\text{-}7.18)$$

(10-7.14 সমীকরণ তুলনীয়।)

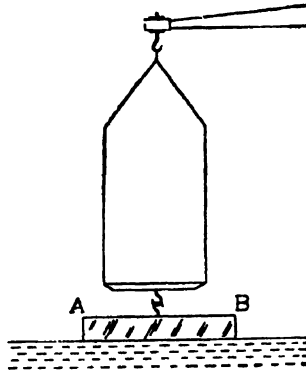
V/r^3 ও ϕ লইয়া সারণি প্রস্তুত হইয়াছে। V/r^3 10.29 হইতে 0.570 পর্যন্ত বদলাইলে ϕ-এর পরিবর্তন 4.170 হইতে 3.764 পর্যন্ত হয়। $V/r^3 = 10.29$ হইলে $\phi = 4.170$, এবং $V/r^3 = 1.555$ হইলে $\phi = 3.764$। ইহা হইতে বোঝা যায় 10-7.14 সমীকরণের বাঁদিকের গুণক π না হইয়া 4-এর মত হইলে ফল কেন বেশী শুদ্ধ হয়।

এ জাতীয় পরীক্ষায় কয়েকটি সতর্কতা দরকার ঃ

(১) নলের মুখ অনুভূমিক ও নল পরিষ্কার থাকিবে ;

(২) নলের উষ্ণতা পরীক্ষাকালে অপরিবর্তিত থাকিবে ;

(৩) নলের মুখের ব্যাসার্ধ 1 mm হইতে 1 cm-এর মধ্যে হইবে ;

(৪) নলের মুখ ঠিক গোলাকার হইতে হইবে ; নহিলে মাপনে অশুদ্ধি ঘটিবে।

10.26 চিত্র

এই উপায়ে আন্তঃপৃষ্ঠটান মাপা খুব সুবিধার। মাপন স্পর্শকোণের উপর নির্ভর না করা আর একটি বিশেষ গুণ।

10-7.5. তুলার সাহায্যে (Balance methods)। তুলার সাহায্যে পৃষ্ঠটান মাপন স্পর্শকোণ নিরপেক্ষ নয়। মাপনে (ক) পাত, (খ) ফ্রেম

বা (গ) আংটা তরলে স্পর্শ করাইয়া তরল হইতে উহা ছাড়াইয়া লইতে যে বলের দরকার হয় তাহা দণ্ডতুলা বা ব্যাবর্তন তুলার সাহায্যে মাপা হয়।

(ক) পাত লইয়া পরীক্ষা (Plate method)। যে কঠিন পদার্থ সাপেক্ষে কোন তরলের পৃষ্ঠটান মাপিতে হইবে, তাহার একখানা পরিষ্কার সমতল পাতের লম্বা দিক অনুভূমিক ও চওড়া দিক খাড়া রাখিয়া ক্লিপের সাহায্যে উহাকে তুলাপাত্রের নিচে আটকান হয় (10.26 চিত্র)। এই অবস্থায় উহার ভার প্রতিমিত রাখিয়া তুলাদণ্ড মুক্ত রাখা হয়। একটু বড় পাত্রে তরল লইয়া তরল পৃষ্ঠ পরিষ্কার করিয়া পাত্রটি উপযুক্ত একটি পাটাতনের উপর রাখা হয়। পাটাতন খুব আস্তে আস্তে উপরে তুলিবার বা নিচে নামাইবার ব্যবস্থা থাকা দরকার।

পাটাতনের উপরের তরল পাতের নিচে রাখিয়া পাটাতন আস্তে আস্তে উপরে তুলিলে তরল ও পাতের কিনারায় স্পর্শ ঘটিলেই পৃষ্ঠটানের জন্য তরল পাতকে হঠাৎ টানিয়া নামাইবে। এই অবস্থায় অন্য তুলাপাত্রে আস্তে আস্তে ভার বাড়াইয়া পাত তরল হইতে ছাড়াইয়া লইতে হইবে। ছাড়াইবার জন্য অতিরিক্ত ভার mg, পাতের পরিসীমা (perimeter) $2(l+t)$ এবং স্পর্শকোণ θ হইলে

$$mg = 2\gamma\,(l+t)\cos\theta. \qquad (10\text{-}7.19)$$

$\theta = 0^0$ হইলে γ সোজাসুজি জানা যায়; নহিলে θ জানা থাকা দরকার। পাতের নিচের কিনারা তরলের পৃষ্ঠতলে ছিল বলিয়া উর্ধ্বচাপের (buoyancy) জন্য কোন শুদ্ধি দরকার হয় না। উত্তোলিত তরলের ওজন এখানে ধরা হয় নাই।

(খ) ফ্রেম লইয়া পরীক্ষা (Frame method)। সাবান জলের মতন যে সকল তরল সহজেই ঝিল্লী (film) গঠন করে তাহাদের পৃষ্ঠটান ফ্রেমের সাহায্যে মাপা সুবিধার। যে কঠিন পদার্থ সাপেক্ষে কোন তরলের পৃষ্ঠটান মাপিতে হইবে, তাহার একগাছা সরু তার দুবার সমকোণে বাঁকাইয়া আয়তক্ষেত্রের তিন বাহুর মত করিয়া ফ্রেম বানান হয়। তুলাপাত্রের নিচে ফ্রেমের দীর্ঘবাহু অনুভূমিক রাখিয়া ফ্রেম ঝুলান থাকে। পরীক্ষাধীন তরলের পাত্র নিচ হইতে আস্তে আস্তে উঠাইয়া ফ্রেমের দীর্ঘবাহুর প্রায় 0.5 cm নিচে আনিয়া তুলা প্রতিমিত করা হয়। ইহার পর ফ্রেম তরলে সম্পূর্ণ ডুবাইয়া ছাড়িয়া দিলে ফ্রেমে তরলের ঝিল্লী গঠিত হইবে এবং তরল ফ্রেমকে টানিয়া রাখিবে। তুলা আবার প্রতিমিত করিতে অতিরিক্ত ভার mg দরকার হইলে এবং ফ্রেমের দীর্ঘবাহুর দৈর্ঘ্য l হইলে

$$mg = 2l\gamma \qquad (10\text{-}7.20)$$

ধরা হয়। স্পর্শকোণের ক্রিয়া, উত্তোলিত তরলের ভার এবং ফ্রেমের খাড়া দুই বাহুর গায়ে লাগা তরলের টানের জন্য এই সমীকরণ শুদ্ধ মনে করা যায় না।

লেনার্ড (Lenard) ফ্রেমের শুদ্ধিগুলি বিস্তারিত আলোচনা করিয়াছেন। তিনি দেখাইয়াছেন ফ্রেমের উপর বল মাপিয়া পৃষ্ঠটানের সঠিক মান পাওয়া অত্যন্ত দুরূহ। সঠিক মান পাইতে ফ্রেম তরলে বিভিন্ন গভীরতায় ডুবাইতে হইবে এবং এইভাবে বলের চরম মান পাইতে হইবে। ফ্রেমের তারের দৈর্ঘ্য ও ব্যাস এবং তরলের ঘনত্ব জানা থাকিলে বলের চরম মান হইতে পৃষ্ঠটান অনেক শুদ্ধভাবে জানা যাইবে। বল মাপনের পরেও কিছু শুদ্ধির প্রয়োজন থাকে। লেনার্ড দাবী করেন তাঁহার উপায়ে পৃষ্ঠটান মাপনে অশুদ্ধি 0.05% অপেক্ষাও কম। তাঁহার তত্ত্ব জটিল ও বিস্তারিত বলিয়া এখানে আলোচনা করা হইল না।

(গ) আংটা লইয়া পরীক্ষা (Ring method)। অনুভূমিক আংটা তরলে স্পর্শ করাইয়া ছাড়াইয়া লইতে অতিরিক্ত বল লাগিবে, কারণ ছাড়াইবার সময় কিছু তরল আংটার সঙ্গে উত্তোলিত হয়, এবং উত্তোলিত তরলপৃষ্ঠের টান আংটাকে তরলের সঙ্গে ধরিয়া রাখিতে চায়। উত্তোলিত তরলের দুই পিঠ। আংটার গড় ব্যাসার্ধ R হইলে, মনে হয়, অতিরিক্ত বল হইবে

$$F = 4\pi R\gamma. \qquad (10\text{-}7.21)$$

এ সম্পর্ক সঠিক নয়। উত্তোলিত তরল পৃষ্ঠের আকার জটিল, এবং সব জটিলতা গণনায় লইয়া বল হিসাব করা অত্যন্ত দুরূহ। কিন্তু ইহার পরীক্ষার অংশ সহজ, এবং পরীক্ষা খুব অল্প সময়ে হইতে পারে। তাছাড়া ইহাতে খুব কম তরল দরকার হয়। এই সকল কারণে আংটার সাহায্যে পৃষ্ঠটান সঠিক মাপিবার তত্ত্ব রচনা প্রয়োজন হইয়া পড়ে। ইয়ং (Young) ও চেং-এর (Cheng) সহযোগিতায় হারকিন্‌স্ ইহা করেন।

তরল হইতে আংটা তুলিতে থাকার সময় আংটার উপরে যে বল ক্রিয়া করে তাহা ক্রমশঃ বাড়িয়া চরমে পৌঁছায় ও আবার কমে। ছাড়াইবার বল চরম নয়। এই চরম বল F_m হইলে $R\gamma/F_m$ ঘাতবিহীন রাশি। হারকিন্‌স্ অনুমান করেন সংশ্লিষ্ট অন্যান্য রাশিগুলি লইয়া যে সকল মাত্রাবিহীন রাশি গঠন করা যায়, $R\gamma/F_m$ তাহাদের ফলন (function) হইবে। সংশ্লিষ্ট রাশিগুলি হইল আংটার গড় ব্যাসার্ধ R আংটার তারের ব্যাসার্ধ r, পৃষ্ঠটান γ, তরলের ঘনত্ব ρ এবং উত্তোলিত তরলের আয়তন

$V = F_m/g\rho$। ইহাদের R/r এবং R^3/V সম্পর্কিত মাত্রাবিহীন রাশি। হারকিন্‌সের মতানুসারে ধরা যায়

$$\frac{R\gamma}{F_m} = f_1\left(\frac{R}{r}\right).\ f_2\ \left(\frac{R^3}{V}\right) \qquad (10\text{-}7.22)$$

হারকিন্‌স্ বিভিন্ন R ও r কিন্তু একই R/r-এর তিনঠি আংটা লইয়া জল, বেনজিন ও ব্রোমোবেনজিনের F_m মাপেন। তিনটি তরলেরই γ জানা। দেখা যায় R^3/V-কে ভুজ ও $R\gamma/F_m$-কে কোটি লইয়া বিভিন্ন তরলের বিন্দুগুলি ছকিলে উহারা একই মসৃণ (smooth) বক্রের উপর থাকে। ইহা হইতে হারকিন্‌স্ অনুমান করেন একই R/r-এর আংটা লইয়া অন্য তরলের F_m মাপিলে উহার $R\gamma/F_m$ বিন্দুও এই বক্রের উপর থাকিবে। হারকিন্‌সের উপায় এই যুক্তির উপর প্রতিষ্ঠিত।

এইভাবে পরীক্ষা করিতে হইলে হারকিন্‌সের নেওয়া আংটার মত একই পদার্থের ও একই R/r-এর আংটা লইতে হইবে। উহার সাহায্যে পরীক্ষাধীন তরলের F_m ব্যাবর্তন তুলা বা সূক্ষ্ম স্প্রিং তুলার সাহায্যে মাপিয়া $R^3/V = R^3g\rho/F_m$ হিসাব করিতে হইবে। তারপর হারকিন্‌সের বক্রে ভুজ এই R^3/V হইলে কোটি কত হইবে তাহা $(R\gamma/F_m)$ দেখিয়া γ পাওয়া যাইবে।

10-7.6. লহরীর সাহায্যে (Ripple method)। তরল পৃষ্ঠে স্থির কম্পাংকের দ্রুত কম্পন ঘটাইলে তরল পৃষ্ঠে লহরীর (ripples) সৃষ্টি হয়। তরলপৃষ্ঠে ইহারা যে বেগে চলে তাহার মান

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\ \gamma}{\rho\lambda} + \frac{g\lambda}{2\pi}}. \qquad (10\text{-}7.23)$$

এখানে λ = লহরীর তরঙ্গদৈর্ঘ্য, ρ = তরলের ঘনত্ব ও g = অভিকর্ষীয় তীব্রতা।*

লহরীর কম্পাংক n হইলে, অর্থাৎ সেকেণ্ডে n সংখ্যক হারে লহরী উৎপন্ন হইলে $c = n\lambda$। অতএব উপরের সমীকরণ হইতে পাই

$$\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} = c^2 - \frac{g\lambda}{2\pi} = n^2\lambda^2 - \frac{g\lambda}{2\pi}$$

$$\text{বা} \quad \gamma = \frac{n^2\lambda^3\rho}{2\pi} - \frac{g\rho\lambda^2}{4\pi^2} \qquad (10\text{-}7.24)$$

এ উপায়ে পৃষ্ঠটান মাপনে প্রধান কাজ λ মাপা। লহরী সৃষ্টি করার জন্য একখানা খাড়া পাত পরীক্ষাধীন তরলে আংশিক ডুবাইয়া স্থির

---

* সমীকরণটি 12-9 বিভাগে প্রতিষ্ঠা করা হইয়াছে। কি শর্তে c-র এই মান হয় তাহা 12-9 বিভাগের শেষ অনুচ্ছেদে দ্রষ্টব্য।

কম্পাংকে উহাকে খাড়া তলে কাঁপান হয়। এই কম্পাংকই n। লহরীগুলি তরল পৃষ্ঠ দিয়া c বেগে আগায়। উহাদের পাশাপাশি দুই শীর্ষ বা দুই পাদের দূরত্বই λ। সাধারণ উপায়ে সচল শীর্ষগুলির বা পাদের দূরত্ব মাপা যায় না। ইহার জন্য বিশেষ ব্যবস্থা দরকার। স্ট্রোবোস্কোপের (stroboscope) সাহায্যে এই ব্যবস্থা করা যায়। আধুনিক স্ট্রোবোস্কোপে নির্দিষ্ট সময় পর পর একটি আলো হঠাৎ জ্বলিয়া উঠিয়া তৎক্ষণাৎ নিভিয়া যায় এবং এই সময়ের ব্যবধান ইচ্ছামত কমান বাড়ান যায়। কেবল স্ট্রোবোস্কোপের আলোয় তরল পৃষ্ঠ আলোকিত হইলে এবং আলোকসম্পাতের কম্পাংক (অর্থাৎ সেকেণ্ডে উহা যতবার জ্বলে-নেভে) লহরীর কম্পাংকের সমান হইলে লহরীগুলিকে স্থির দেখায়, কারণ পর পর দুবার আলো জ্বলিবার অবসরে এক লহরীর শীর্ষ তাহার ঠিক আগের লহরীর শীর্ষের অবস্থানে যায়। স্ট্রোবোস্কোপের আলোকে লেন্সের সাহায্যে সমান্তরাল কিরণে পরিবর্তিত করিয়া তরল পৃষ্ঠে পড়িতে দিলে, বক্র তরল পৃষ্ঠের অবতল অংশ হইতে প্রতিফলিত কিরণ কম্পমান পাতের সমান্তরালে বিভিন্ন সরল রেখায় কেন্দ্রীভূত হইবে। ট্রাভলিং মাইক্রোস্কোপের সাহায্যে এই রেখাগুলির দূরত্ব, অর্থাৎ λ, তখন সূক্ষ্মভাবে মাপা যায়। স্ট্রোবোস্কোপের স্কেল হইতে আলোর কম্পাংক পাওয়া যায়; ইহাই 10-7.24 সমীকরণের n। স্ট্রোবোস্কোপের আলো জোরাল হওয়া দরকার। সুবিধামত স্ট্রোবোস্কোপ না পাইলে অন্যভাবে অনুরূপ ব্যবস্থা করিতে হয়। সকল ক্ষেত্রেই লহরীর কম্পাংকের সমান কম্পাংকবিশিষ্ট বিচ্ছিন্ন আলোক সম্পাত করাইতে হয়। কেবল এরূপ হইলেই লহরীগুলিকে স্থির দেখায়।

বৈদ্যুতিক ঘণ্টা যে উপায়ে বাজান হয়, পাত সে রকম উপায়ে কাঁপান যায়। বিদ্যুচ্চুম্বকে প্রত্যাবর্তী বিদ্যুৎপ্রবাহ (alternating electric current) ব্যবহার করিয়াও বিকল্প ব্যবস্থা করা যায়। পাত যে স্প্রিং-এর সঙ্গে আটকান থাকিবে তাহার ও প্রত্যাবর্তী প্রবাহের কম্পাংক একই হইতে হইবে। তরল একটি বড় চৌকা পাত্রে লইতে হয়। পাতের দীর্ঘবাহু পাত্রের চওড়ার দিকের সমান্তরালে থাকে। আধারের পাশ হইতে লহরী প্রতিফলিত হইয়া যাহাতে অগ্রসরশীল লহরীর উপর না পড়ে সে জন্য পাত্রের পাশে প্রতিফলন রোধক কোন ব্যবস্থা করিতে হয়।

10-8. পৃষ্ঠটান মাপনের বিভিন্ন উপায়ের সমালোচনা। পৃষ্ঠটান মাপনের সকল ক্ষেত্রেই তরল পৃষ্ঠ এবং তরল যে সকল কঠিন তলের সংস্পর্শে আসিবে তাহাদের নিখুঁত পরিষ্কার রাখা দরকার। ইহা অত্যন্ত কঠিন কাজ, এবং সব ঠিক মত পরিষ্কার হইল কি না তাহা বোঝাও কঠিন। বার

বার পরিষ্কার করিয়া যদি একই ফল পাওয়া যায়, তাহা হইলেই ভরসা করা যায় যে পরিষ্কার করা ঠিক মত হইয়াছিল।

বিভিন্ন উপায়ে মাপনে যে সমীকরণগুলি ব্যবহার করা হয়, তাহাদের বিশেষ শর্তাধীনে ব্যুৎপন্ন করা হইয়াছে। এই সকল শর্তের কোনটি যদি পরীক্ষা ব্যবস্থায় ভঙ্গ হইয়া থাকে, তাহা হইলে লব্ধ ফলে অজানা ত্রুটি থাকিবে। পরীক্ষাকালে শর্তগুলি সব পূরণ করা অত্যন্ত কঠিন। তাছাড়া সমীকরণের ব্যুৎপত্তিতে অনেক সময় জটিলতা কমাইবার জন্য ছোট ছোট ক্রিয়া উপেক্ষা করা হয়। কোন কোন ক্ষেত্রে এ জাতীয় ক্রিয়ার ফল হিসাব করিয়া শুদ্ধি প্রয়োগ করা যায় ; আবার কোথাও বা তাহা করা যায় না।

তরল পৃষ্ঠ পাত্রের গায়ে বাঁকা হইয়া লাগিয়া থাকে। কতটা দূরে উহা অনুভূমিক হইল তাহা দেখিয়া বোঝা যায় না। অথচ আমাদের সকল গণনাই অনুভূমিক তরল পৃষ্ঠ হইতে। এই কারণে তরল পৃষ্ঠে যেখানে মাপন হইতেছে তাহা তরলের কিনারা হইতে বেশ দূরে রাখা দরকার। নহিলে লব্ধ মানে অজানা ত্রুটি থাকিবে।

অন্যান্য ভৌত রাশি যতটা সূক্ষ্মতায় মাপা যায়, এই সকল কারণে পৃষ্ঠটান ততটা সূক্ষ্মতায় মাপা সম্ভব হয় না। প্রামাণ্য ফলগুলিতেও প্রায় 0.1°/。 ত্রুটি আছে বলিয়া অনুমিত হয়। ঘরের উষ্ণতায় বিভিন্ন তরলের পৃষ্ঠটান $10—10^2$ dyn/cm সীমার মধ্যে। গলিত ধাতুর পৃষ্ঠটান বেশী ; কোন কোনটি 10^3 dyn/cm ক্রমের। যেখানে পৃষ্ঠটান কম সেখানে ফলে বেশী অশুদ্ধি থাকিবার সম্ভাবনা। তাছাড়া পৃষ্ঠটানের আণবিক তত্ত্ব হইতে বোঝা যায় নির্দিষ্ট তরলের পৃষ্ঠটান উহার সংস্পর্শে অবস্থিত কঠিন ও গ্যাসের প্রকৃতি দ্বারা কিছু প্রভাবিত হইতে পারে। এই কারণে কোন তরলের সঠিক পৃষ্ঠটান উল্লেখে কঠিন ও গ্যাসের প্রকৃতিও বলা হয়।

পৃষ্ঠটান মাপনের বিভিন্ন উপায়ের সুবিধা অসুবিধাগুলি নিচে সংক্ষেপে বলা হইল। উপরে মাপন সম্বন্ধে যে সাধারণ মন্তব্য করা হইয়াছে, তাহা সকল ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

(১) কৈশিক নলে স্পর্শকোণ, উত্তোলিত তরলের শীর্ষে নলের ব্যাস এবং তরল মেনিস্কাসের উষ্ণতা জানা দরকার। এগুলি সঠিক জানা বেশ কঠিন। তাছাড়া নলের ছিদ্র সুষম ও ভিতর পরিষ্কার করাও কঠিন। ফার্গুসনের উপায়ে অসুবিধাগুলি কম ; তাছাড়া ইহাতে খুব অল্প তরলের দরকার হয়।

(২) বড় ফোঁটায় $R_2=\infty$ ধরিয়া 10-7.5 সমীকরণ ব্যুৎপন্ন করা হইয়াছিল। ফোঁটা যত বড়ই করা যাক না কেন, উহার বৃহত্তম অনুভূমিক

ব্যাসার্ধ সসীম হওরার ফলে কিছু ত্রুটি থাকিবে। কিন্তু ইহা হিসাবে আনা যায়। ফার্গুসনের শুদ্ধি প্রয়োগে যে ফল পাওয়া যাইবে তাহা অধিকাংশ ত্রুটিমুক্ত বলিয়াই মনে হয়। তবে ফোঁটার বৃহত্তম ছেদ হইতে উপর পর্যন্ত দূরত্ব মাপিতে মাপনের ত্রুটি 1°/。 অপেক্ষাও বেশী হইতে পারে। ইহাই এই ব্যবস্থার প্রধান ত্রুটি। θ সাক্ষাৎভাবে মাপিয়া 10-7.6 সমীকরণ প্রয়োগে লব্ধ ফল ইহা অপেক্ষা শুদ্ধ হইবে মনে হয়।

মাপনের সময় ফোঁটা অনেকক্ষণ ধরিয়া খোলা অবস্থায় থাকায় উহার পৃষ্ঠ দূষিত হওয়ার আশঙ্কা থাকে।

(৩) ইয়েগারের উপায়ে কয়েকটি সুবিধা আছে। (ক) ইহাতে স্পর্শকোণ মাপার কোন দরকার হয় না ; (খ) নলের ব্যাস কেবল মুখের কাছে মাপা দরকার ; (গ) বুদ্বুদগুলি তরল পাত্রের মাঝখানে গঠন করা যায় বলিয়া উষ্ণতা নিয়ন্ত্রণ সহজ হয় ; (ঘ) বুদ্বুদের পৃষ্ঠতল সর্বদা নতুন করিয়া গঠিত হইতেছে বলিয়া অপবস্তুর স্পর্শদোষের সম্ভাবনা কম ; (ঙ) ইহাতে বেশী পরিমাণ তরলের দরকার হয় না ; (চ) সাগডেনের তত্ত্ব প্রয়োগ করিয়া পৃষ্ঠটানের নির্ভরযোগ্য নিরপেক্ষ মান পাওয়া যায়।

দুইটি ক্রিয়ার ফল ইয়েগারের উপায়ে অজ্ঞাত। তত্ত্ব প্রতিষ্ঠায় ধরা হয় বুদ্বুদ সর্বদা সাম্যে আছে এবং নলের মুখ ঠিক গোল ও অনুভূমিক। এই শর্ত দুইটি সঠিক পূর্ণ না হইলে লব্ধ ফলে কতটা ত্রুটি ঘটে তাহা সঠিক জানা নাই।

(৪) ফোঁটা ফেলিয়া ও আংটা লইয়া তুলার সাহায্যে মাপনের তাত্ত্বিক ভিত্তি কিছু দুর্বল। কিন্তু উভয় উপায়ে মাপনের সুবিধা এত বেশী যে দুয়েরই ব্যাপক ব্যবহার হয়। মাপন নিরপেক্ষ নয়, তুলনামূলক। হারকিন্‌সের শুদ্ধি প্রয়োগে নির্ভরযোগ্য মান পাওয়া যায়।

(৫) ফ্রেমের সাহায্যে মাপনের তত্ত্বকে লেনার্ড অনেক উন্নত করিয়াছেন। কিন্তু পরীক্ষা দীর্ঘ সময় সাপেক্ষ এবং চরম বল মাপনের পরেও একাধিক শুদ্ধি প্রয়োগ করিতে হয়। লেনার্ড দাবী করেন তাঁহার লব্ধ ফলে ত্রুটি 0.05°/。 অপেক্ষাও কম। সম্ভবতঃ জটিলতার জন্য লেনার্ডের উপায় তেমন জনপ্রিয় হয় নাই।

(৬) লহরীর সাহায্যে পৃষ্ঠটান মাপনে তরঙ্গবেগের মান পাইতে যে সকল শর্ত (12.9 বিভাগ ; শেষ অনুচ্ছেদ) পূর্ণ হওয়া দরকার সেগুলির দিকে লক্ষ্য রাখিতে হইবে। লহরীর বিস্তার (amplitude) খুব কম এবং জলের গভীরতার তুলনায় উহা উপেক্ষণীয় হইতে হইবে। পৃষ্ঠটান λ^{3}-এর উপর নির্ভর করে বলিয়া

λ মাপনে যে ত্রুটি হয়, γ-তে আসে তাহার তিনগুণ। n মাপনে শতকরা যে ত্রুটি ঘটে, n^2 থাকায় γ-তে আসে তার দ্বিগুণ। তাত্ত্বিক অসুবিধার চেয়ে ব্যবহারিক অসুবিধা এখানে বেশী ; যন্ত্রও জটিল। তাছাড়া যে পাত কাঁপাইয়া লহরী সৃষ্টি হয় তাহার কম্পন সরল দোলীয় না হইলে তরঙ্গরূপ (wave form) সরল দোলীয় হয় না। এরূপ ক্ষেত্রে একাধিক তরঙ্গদৈর্ঘ্যের লহরীর সৃষ্টি হয় এবং উহাদের বেগও হয় বিভিন্ন। ইহার জন্য ফলে ত্রুটি বাড়িতে পারে।

10-9. বক্র তরল পৃষ্ঠে বাষ্পচাপ (Vapour pressure over a curved surface)। একই উষ্ণতায় সমতল ও বক্র তরলপৃষ্ঠে তরলের সংপৃক্ত বাষ্প চাপ সমান হয় না। উত্তল তরলপৃষ্ঠ যে বাষ্পচাপের সঙ্গে সাম্যে থাকিতে পারে তাহা সমতল পৃষ্ঠে সংপৃক্ত বাষ্পচাপের চেয়ে বেশী। অবতল পৃষ্ঠে ইহা কম। তলের পৃষ্ঠটানের জন্য এরূপ হয়।

বক্রতলে বাষ্পচাপের সঙ্গে পৃষ্ঠটানের সম্পর্ক সহজেই দেখান যায়। মনে কর স্থির উষ্ণতা T^oK-তে কোন তরল উহার নিজ সংপৃক্ত বাষ্পের সঙ্গে কোন বদ্ধপাত্রের ভিতর সাম্যে আছে, এবং পাত্রে অন্য কোন গ্যাস বা বাষ্প নাই। তরলে কোন কৈশিক নল ডুবাইলে ধরা যাক তরল উহাতে জলতলের চেয়ে h উচ্চতায় ওঠে এবং নলে বক্রতলের ব্যাসার্ধ হয় r। তরলের সমতলের উপর সাম্যাবস্থায় বাষ্পচাপ P_0 ও অবতল বক্রতলের উপর সাম্য বাষ্পচাপ P। তাহা হইলে বক্র তরলপৃষ্ঠের ঠিক নিচে চাপ $P-2\gamma/r$ এবং সমতল তরল পৃষ্ঠে চাপ $P_0=P-2\gamma/r+h\rho g$ (ρ = তরলের ঘনত্ব)। অন্য হিসাবে P_o-P $=h$ উচ্চতার বাষ্পস্তম্ভের চাপ $=h\sigma g$ (σ = বাষ্পের গড় ঘনত্ব)। অতএব $P_0-P=gh\rho-2\gamma/r=gh\sigma$ বা $gh=2\gamma/r(\rho-\sigma)$। $\sigma<\rho$ হওয়ায় ρ-র তুলনায় σ উপেক্ষা করিয়া লেখা যায়

$$gh=2\gamma/r\rho \qquad (10\text{-}9.1)$$

P_0 ও P-তে h নিরপেক্ষ সম্পর্ক পাইতে উচ্চতার সঙ্গে বাষ্পের ঘনত্বের পরিবর্তন ধরিয়া আমরা gh অপনীত করিতে পারি। মনে কর সমতল তরল হইতে h' উচ্চতায় বাষ্পের চাপ P' ও ঘনত্ব σ'। dh' বেধের বাষ্পের জন্য ঐ স্থানে চাপের প্রভেদ $dP'=-g\sigma'dh'$। বাষ্পে আদর্শ গ্যাস সমীকরণ প্রয়োগে পাই $P'/\sigma'=RT/M$ (R = গ্যাসীয় নিত্যসংখ্যা ; M = বাষ্পের আণবিক ভার)। অতএব $dP'=-g\,(P'M/RT)dh'$

$$\text{বা } dP'/P'=-(gM/RT)dh'$$

$h'=0$ হইতে $h'=h$ পর্যন্ত ইহার সমাকলন করিলে পাই

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP'}{P'} = -\frac{gM}{RT}\int_0^h dh' \text{ বা } \ln\frac{P}{P_0} = -\frac{M}{RT}gh = -\frac{2\gamma}{r\rho}\cdot\frac{M}{RT}$$

$$\text{অর্থাৎ } P = P_0 e^{-\frac{2\gamma}{r\rho}\cdot\frac{M}{RT}} \qquad (10\text{-}9.2)$$

তরলপৃষ্ঠ উত্তল হইলে $P>P_0$ হইবে। এক্ষেত্রে অনুরূপে দেখান যায়

$$P = P_0\, e^{+\frac{2\gamma}{r\rho}\cdot\frac{M}{RT}} \qquad (10\text{-}9.3)$$

10-9.2 ও 10-9.3 সমীকরণ হইতে দেখা যায় r ছোট হইলে চাপের প্রভেদ অনেক বেশী হইতে পারে।

কাঠ কয়লা, সিলিকা জেল (silica gel) প্রভৃতি পদার্থে সূক্ষ্ম ছেঁদা বা ফাটল উহার সর্বত্র ছড়ান থাকে। এই সকল ছিদ্রে বাষ্প তরলিত হইলে যে অবতল তরল পৃষ্ঠ গঠিত হয় তাহার উপর বাষ্প চাপ অবতলপৃষ্ঠের সাম্য বাষ্প চাপের চেয়ে বেশী থাকে। ফলে ঐ সকল স্থানে আরও বাষ্প জমিয়া তরল হয়। এই কারণে এই সকল বস্তু ভাল বাষ্পশোষক।

ছোট জলকণার সাম্য বাষ্পচাপ জলের সাধারণ সংপৃক্ত বাষ্পচাপের চেয়ে অনেক বেশী কারণ উহার ব্যাস খুব কম। সাধারণ সংপৃক্ত বাষ্পে এরূপ কণা উবিয়া যাইবে। এই কারণে সংপৃক্ত বাষ্প নিজ হইতেই জমে না। ধূলা, আহিত কণা বা জলশোষক কণা সংপৃক্ত বাষ্পে থাকিলে অতিসংপৃক্ত না হইলেও বাষ্প এগুলির উপরে সহজে জমিতে পারে, কারণ এই কণাগুলির জন্য তরলকণার প্রাথমিক ব্যাস অপেক্ষাকৃত বড় হইতে পারে। উইলসন মেঘপ্রকোষ্ঠে অতিসংপৃক্ত বাষ্পের ভিতর দিয়া আহিত কণা ছুটিয়া যায় ও পথে অণুগুলিকে আয়নিত করে। এই আহিত কণাগুলির উপর বাষ্প সহজে জমিতে পারে।

প্রশ্ন। 10^{-7} cm ব্যাসার্ধের জলকণার সাম্য বাষ্পচাপ কত হইবে হিসাব কর। দেওয়া আছে জলের পৃষ্ঠটান $=73$ dyn/cm, সমতল পৃষ্ঠে জলের বাষ্পচাপ $=2.3\times10^4$ dyn/cm^2। জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব 2×10^{-5} g/cm^3 ধর।
[উঃ $5{\cdot}2\times10^4$ dyn/cm^2]

প্রশ্ন

1. তরলের পৃষ্ঠটান কাহাকে বলে? দৈনন্দিন অভিজ্ঞতা হইতে পৃষ্ঠটানের ক্রিয়ার কয়েকটি উদাহরণ দাও।

পৃষ্ঠটানের আণবিক ব্যাখ্যা দাও।

তরল পৃষ্ঠে স্থিতিশক্তি থাকিবার কারণ কি? এই স্থিতিশক্তির সহিত পৃষ্ঠটানের কি সম্পর্ক?

2. স্পর্শকোণ কাহাকে বলে? উহা কি করিয়া মাপা যায়? স্পর্শকোণ 90° হইতে (ক) বেশী, (খ) কম হইলে তরল কঠিনের সংস্পর্শে কিভাবে থাকে ছবি আঁকিয়া দেখাও। সংসক্তি ও আসঞ্জনের ক্রিয়ার উপর স্পর্শকোণ কিভাবে নির্ভর করে বুঝাইয়া বল।

3. তরলের বক্রতলের দুই পাশে প্রেষের তফাতের সহিত পৃষ্ঠটানের সম্পর্ক বাহির কর।

গোল এক ফোঁটা জলের ভিতরে পৃষ্ঠটানজনিত অতিরিক্ত চাপ এক প্রমাণ বায়ুমণ্ডলের চাপের সমান হইলে উহার ব্যাসার্ধ কত? জলের পৃষ্ঠটান = 72 dyn/cm। [উত্তর : 1.32×10^{-4} cm]

4. (ক) কোন পাত্রের তলায় ছোট একটি ছেঁদা আছে। উহাকে জলের নীচে 40 cm চাপিয়া ধরিলে ছেঁদা দিয়া জল ঢোকে। ছেঁদার ব্যাস কত? জলের পৃষ্ঠটান 73 dyn/cm। [উত্তর : 0.074 mm]

(খ) কোন পাত্রের তলায় 0.05 cm ব্যাসের দশটি ছেঁদা আছে। উহাতে কত গভীর জল রাখা যাইবে? এই জলের উপর এক টুকরা কাঠ ভাসাইয়া দিলে কি হইবে? জলের পৃষ্ঠটান 73 dyn/cm। [উত্তর : 6 cm]

(গ) 500 *g* ওজনের এবং 10 cm ব্যাসার্ধের একটি বেলনাকার পাত্রের তলায় 0.2 mm ব্যাসার্ধের একটি ছেঁদা আছে। পাত্রটি জলে ভাসাইয়া রাখিলে উহাতে জল ঢুকিবার আগ পর্যন্ত উহা কত ভার বহন করিতে পারিবে? জলের পৃষ্ঠটান 73 dyn/cm। [উত্তর : 1.84 kg]

5. কৈশিক নলে তরল ওঠে বা নামে কেন বুঝাইয়া বল। কৈশিক নলে পৃষ্ঠটান কি করিয়া মাপা যায় তাহার তত্ত্বসমেত পরীক্ষার বিবরণ দাও। পৃষ্ঠটান মাপনের এই উপায়ের সুবিধা অসুবিধাগুলি আলোচনা কর।

কোন *U*-নলের দুই বাহুর ব্যাস 10 mm ও 1 mm। উহাতে আংশিক জল ভরিয়া বাহু খাড়া করিয়া রাখিলে দুই বাহুতে জলের উচ্চতার কতটা প্রভেদ হইবে? জলের পৃষ্ঠটান 72 dyn/cm। [উত্তর : 1.3 cm]

6. কোন কৈশিক নলের এক প্রান্ত তরলে ডুবাইয়া নল খাড়া রাখিয়া উহাতে তরল উঠিতে দিয়া সাম্য প্রতিষ্ঠিত হইতে দেওয়া গেল। প্রমাণ কর যে উত্তোলিত তরলের উচ্চতা তরলশীর্ষের নিচের অংশের নলের আকারের উপর নির্ভর করিবে না।

নল আস্তে আস্তে কাত করিলে নলে তরলশীর্ষের কি পরিবর্তন হইবে ?

নল আস্তে আস্তে তরলে ডুবাইতে থাকিলে তরল মেনিস্‌কাসের কি পরিবর্তন হইবে ?

7. (ক) শঙ্কু আকারের 12 cm লম্বা একটি কৈশিক নলের এক প্রান্তের ব্যাস 0.12 cm ও অন্য প্রান্তের ব্যাস 0.04 cm। নল খাড়া রাখিয়া উহার মোটা দিক কোন পাত্রস্থ জলে ছোঁয়ান হইল। জলের পৃষ্ঠটান 72 dyn/cm হইলে নলে জল কতদূর উঠিবে ? [উত্তর : প্রায় 2.9 cm]

(খ) 0.25 cm ব্যাসার্ধের কৈশিক নল জলে খাড়া করিয়া রাখা হইল। জলের পৃষ্ঠটান 73 dyn/cm। (১) নল আস্তে আস্তে জলে ডুবাইয়া উহার মাত্র 3 cm জলের উপরে রাখা হইল। এ অবস্থায় তরল মেনিস্‌কাসের স্পর্শকোণ ও ব্যাসার্ধ কত হইবে ? (২) নল না ডুবাইয়া আস্তে আস্তে কাত করিয়া উহার উপরের প্রান্ত পাত্রস্থ জলের মুক্ততলের 3 cm উপরে আনিলে মেনিস্‌কাসের ব্যাসার্ধ কত হইবে ? [উত্তর : (১) 60° ; 0.0496 cm ; (২) ব্যাসার্ধ একই থাকিবে]

8. পৃষ্ঠটান নিরপেক্ষ মাপনের বিভিন্ন উপায় সংক্ষেপে আলোচনা কর। পৃষ্ঠটান ও স্পর্শকোণ একই পরীক্ষায় কিভাবে মাপা যায় ?

9. পৃষ্ঠটান তুলনা করার বিভিন্ন উপায় সংক্ষেপে আলোচনা কর।

(ক) বিভিন্ন উষ্ণতায় কোন তরলের এবং (খ) বিভিন্ন গাঢ়তায় কোন দ্রবণের পৃষ্ঠটান তুলনা করার একটি সুষ্ঠু উপায় তত্ত্বসমেত বর্ণনা কর।

খুব অল্প পরিমাণ তরল থাকিলে উহার পৃষ্ঠটান কি উপায়ে মাপিবে বর্ণনা কর।

10. পৃষ্ঠটান নিরপেক্ষ মাপনের কোন্ উপায় তুমি সবচেয়ে ভাল মনে কর এবং কেন কর ? তত্ত্বসমেত ইহার পরীক্ষা বর্ণনা কর।

11. পৃষ্ঠটান তুলনা করার কোন্ উপায় তুমি সবচেয়ে ভাল মনে কর এবং কেন কর ? তত্ত্বসমেত ইহার পরীক্ষা বর্ণনা কর।

12. 10^{-7} cm ব্যাসার্ধের জলকণার সাম্য বাষ্পচাপ কত হইবে হিসাব কর। দেওয়া আছে জলের পৃষ্ঠটান = 73 dyn/cm, সমতল পৃষ্ঠে জলের বাষ্পচাপ = 2.3×10^4 dyn/cm². জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব 2×10^{-5} g/cm³ ধর। [উত্তর : 5.2×10^4 dyn/cm²]

13. পৃষ্ঠটান নিরপেক্ষ মাপনের প্রধান উপায়গুলির তুলনামূলক আলোচনা কর।

14. পৃষ্ঠটান তুলনা করার প্রধান উপায়গুলির তুলনামূলক আলোচনা কর।

শুদ্ধি প্রয়োগে ইহাদের কোন্ বা কোন্ কোন্‌টিকে নিরপেক্ষ মাপনে পরিণত করা যায় ? শুদ্ধির প্রকৃতি আলোচনা কর।

15. কোন জলবিন্দুর ব্যাসার্ধ r cm। বাষ্পীভবনে উহার ব্যাসার্ধ δr কমিলে একই উষ্ণতায় পৃষ্ঠটানের স্থিতিশক্তি কতটা কমিবে ?

জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ (latent heat) 600 cal/g, ঘনত্ব 1g/cm³ ও পৃষ্ঠটান 73 dyn/cm হইলে, যে জলবিন্দু বিনা তাপ প্রয়োগে বাষ্প হইতে পারিবে তাহার ব্যাসার্ধ হিসাব কর। [উত্তর 8×10^{-9} cm]

16. (ক) 1 cm ও 3 cm ব্যাসার্ধের দুটি সাবানের বুদ্বুদ পাশাপাশি আছে। সাবান জলের পৃষ্ঠটান 27 dyn/cm ; বায়ুর চাপ 76 cm পারা। দুই বুদ্বুদে বায়ুর ভরের অনুপাত বাহির কর।

(খ) 3.0 cm ব্যাসার্ধের একটি সাবানের বুদ্বুদের ভিতরে 2.0 cm ব্যাসার্ধের আর একটি বুদ্বুদ আছে। ভিতরের বুদ্বুদের সমান চাপের একটি বুদ্বুদ থাকিলে উহার ব্যাসার্ধ কত হইবে? [উত্তর : 1.2 cm]

17. (ক) 50 g ভরের একটি হাইড্রোমিটারের নলের মাত্র 3 cm জলের উপরে রহিয়াছে। নলের ব্যাস 0.4 cm। জলে পৃষ্ঠটান না থাকিলে নলের কতটা জলের উপরে থাকিত? [উত্তর : পৃষ্ঠটান 72 dyn/cm ধরিলে 3.7 cm]

(খ) 10 cm লম্বা একটি খাড়া কৈশিক নলের অর্ধেক জলে ডুবাইলে জল উহার মাথার 1 cm পর্যন্ত ওঠে। এই অবস্থায় নলের নিচের প্রান্তে অর্ধগোলক আকারের বায়ুর বুদ্বুদ গঠন করিতে বায়ুমণ্ডলের চাপের চেয়ে কত বেশী চাপ দরকার হইবে? [উত্তর : 9 cm জল]

18. পারার পৃষ্ঠটান 520 dyn/cm, কাচের সহিত উহার স্পর্শকোণ 140° ও উহার ঘনত্ব 13.6 g/cm³ হইলে, 0.010 cm ব্যাসার্ধের খাড়া কাচের নলে পৃষ্ঠটান কত দৈর্ঘ্যের পারাস্তম্ভের ভার বহন করিতে পারিবে? [উত্তর 1.81 cm]

19. 2 cm ব্যাসার্ধের একটি সাবানের বুদ্বুদের আয়তন আস্তে আস্তে বাড়াইয়া 20 cm করা হইল। সাবান জলের পৃষ্ঠটান 30 dyn/cm। আয়তন বাড়াইতে কত কার্য করিতে হইয়াছে হিসাব কর। আয়তন দ্রুত বাড়াইলে কার্য বেশী হইত, না কম? [উত্তর : 2.99×10^5 erg ; বেশী]

20. a এবং b ব্যাসার্ধের দুটি সাবানের বুদ্বুদ এক সঙ্গে জুড়িয়া একটি বুদ্বুদ হওয়ায় উহার ব্যাসার্ধ c হইল। বাহিরের প্রেষ P হইলে প্রমাণ কর যে পৃষ্ঠটান $\gamma = P(c^3 - a^3 - b^3)/4(a^2 + b^2 - c^2)$।

21. দুখানা সমতল পাতের ভিতরে 1 g পারা রাখিয়া পাতে চাপ দেওয়ায় পারা সমান বেধের 5 cm ব্যাসার্ধের বৃত্তের আকারে ছড়াইয়া গেল। পারার পৃষ্ঠটান 440 dyn/cm, স্পর্শকোণ 140° ও ঘনত্ব 13.6 g/cm³ হইলে, কত বল প্রয়োগ করা হইয়াছিল? [উত্তর : 5.51×10^7 dyn]

22. অনুভূমিক পাতের উপর পারার বড় একটি ফোঁটা গঠন করিয়া দেখা গেল যেখানে ফোঁটায় ব্যাস সবচেয়ে বেশী, ফোঁটার উপর হইতে তাহার দূরত্ব ফোঁটার বেধের $\sqrt{3/2}$ গুণ। প্রমাণ কর যে স্পর্শকোণ $\pi - \cos^{-1}(1/3)$।

প্রয়োজনীয় সমীকরণগুলি প্রতিষ্ঠা কর।

23. t দূরত্বের দুখানা সমান্তরাল পাতের মধ্যে খানিকটা তরল R ব্যাসার্ধে গোল হইয়া ছড়াইয়া আছে। তরলের স্পর্শকোণ θ ও পৃষ্ঠটান γ হইলে দুই পাতের মধ্যে কত বল ক্রিয়া করে? [সংকেত—θ 90°-র কম হইলে দুই পাতে আকর্ষণ হইবে ; 90°র

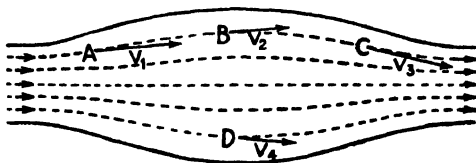
বেশী হইলে হইবে বিকর্ষণ। তরলের ভিতরে বাহিরে চাপের প্রভেদ $p=\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)$। $r<R$ ধর। তখন $p=\gamma/r$। পাত দুখানা কাছাকাছি হইলে $r=t/2\cos\theta$ এবং বল $=p(\pi R^2)$। এ ছাড়া তরল ও পাতের স্পর্শরেখায় পৃষ্ঠটানের যে উপাংশ পাতের অভিলম্বে তাহার মান $2\pi R\gamma\sin\theta$। ইহাকে $p(\pi R^2)$-এর তুলনায় উপেক্ষা করা যায়।]

24. তরল পৃষ্ঠ হইতে পৃষ্ঠের সমান্তরাল পাত খাড়া টানিয়া ছাড়াইয়া নিতে কত বল লাগিবে? [সংকেত—পাত খাড়া টানিয়া তোলার সময় উহার সঙ্গে কিছু তরল লাগিয়া থাকে। ধর পাত বিচ্ছিন্ন হইবার সময় উত্তোলিত তরলের উচ্চতা z। পাত R ব্যাসার্ধের ধরা যাক। বায়ুমণ্ডলীয় চাপ P। পাতের ঠিক নিচে তরলে চাপ $(P-g\rho z)$ এবং পাতের উপর নিচমুখী টান $F=\pi R^2.g\rho z$। ছাড়াইবার বল ইহার সমান। সুবিধার জন্য স্পর্শকোণ $\theta=0^\circ$ ধর। বিচ্ছিন্ন হওয়ার সময় তরলের ব্যাসার্ধ একদিকে $r=\frac{1}{2}z$ ও অন্যদিকে R $(R\gg r)$। অতএব উত্তোলিত তরলের $\frac{1}{2}z$ উচ্চতায় ভিতরে বাহিরে চাপবৈষম্য $p=\gamma/r=2\gamma/z=\frac{1}{2}g\rho z$ বা $z^2=4\gamma/g\rho$। z-এর এই মান F-এ বসাইয়া পাই $F=\pi R^2 g\rho.(4\gamma/g\rho)^{1/2}=2\pi R^2\sqrt{\gamma\rho g}$। ইহাই নির্ণেয় বল।]

একাদশ পরিচ্ছেদ

সান্দ্রতা
(Viscosity)

11-1. শান্ত ও বিক্ষুব্ধ প্রবাহ (Streamline flow and turbulent flow)। তরল ও গ্যাসীয় পদার্থের গতির আলোচনা কঠিনের তুলনায় অনেক জটিল। সান্দ্রতা আলোচনায় প্রবাহী পদার্থের (অর্থাৎ তরল ও গ্যাসের) প্রবাহ মোটামুটি দুই শ্রেণীতে ভাগ করিয়া নেওয়া যায়—(ক) শান্ত প্রবাহ (streamline flow) ও (খ) বিক্ষুব্ধ প্রবাহ (turbulent flow)।

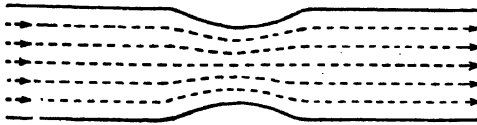
11-1.1. শান্ত প্রবাহ। প্রবাহকালে কোন কণা প্রবাহে যে পথ ধরিয়া চলে তাহাকে উহার 'প্রবাহ রেখা' (line of flow) বলে। যে প্রবাহে কোন প্রবাহ রেখার উপরস্থ সকল কণাগুলি সেই একই রেখা ধরিয়া চলিতে থাকে তাহাকে 'শান্ত প্রবাহ' (streamline flow)* ও সেই রেখাকে 'শান্ত প্রবাহ রেখা' (streamline) বলে। শান্ত প্রবাহে নির্দিষ্ট কোন বিন্দুতে যে কণাই যখন আসুক না কেন তাহার বেগ একই হইবে। শান্ত প্রবাহ রেখার যে কোন বিন্দুতে গতির অভিমুখে টানা স্পর্শক ঐ বিন্দুতে কণার গতির দিক্ নির্দেশ করে। শান্ত প্রবাহে প্রবাহক্ষেত্রের প্রত্যেক বিন্দুতে প্রবাহের বেগের দিক্ ও মান অপরিবর্তিত থাকে।

11.1 চিত্র

11.1 চিত্রে কোন নল বা খাতের মধ্য দিয়া প্রবাহিত তরলের এক অংশ

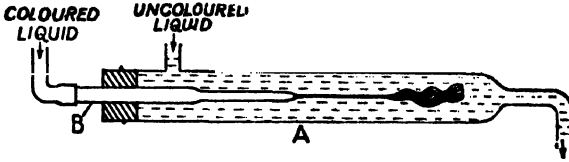
---

* এখানে যাহাকে আমরা 'শান্তপ্রবাহ' বলিয়াছি প্রবাহীর বলবিজ্ঞান (দ্বাদশ পরিচ্ছেদ) আলোচনায় তাহাকে 'অপরিবর্তী প্রবাহ' (Steady flow) বলা হয়। শিরনামায় (Heading-এ) Streamline flow কথাটি Steady flow অর্থে ধরিতে হইবে। Streamline বা 'ধারারেখা'র যথার্থ সংজ্ঞা একটু আলাদা (12.3 বিভাগ দেখ)।

দেখান হইয়াছে। মনে কর উহার *A*, *B*, *C* বিন্দুতে কোন এক সময় বেগ যথাক্রমে v_1, v_2, v_3। স্রোতে বাহিত হইয়া যে কণাই যখন *A* তে আসুক না কেন, *A* তে সর্বদাই উহার বেগ v_1, *B* তে v_2, *C*-তে v_3, ইত্যাদি হইলে প্রবাহকে 'শান্ত' (যথার্থ বলিতে 'অপরিবর্তী' বা Steady) বলা হইবে। শান্ত প্রবাহে কোন কণা যে পথ ধরিয়া চলে তাহাকে এখন আমরা 'শান্ত-প্রবাহ রেখা' বা streamline বলিব। ঐ রেখার যে কোন বিন্দুতে যে কণাই থাকুক না কেন, সকলে ঐ রেখা ধরিয়াই চলিবে। 11.1 চিত্রে ভাঙ্গা রেখাগুলি দিয়া শান্ত প্রবাহ রেখা দেখান হইয়াছে।

স্পষ্টই বোঝা যায় দুই শান্ত প্রবাহ রেখা কখনও পরস্পর ছেদ করিতে পারিবে না, কারণ তাহা হইলে ছেদ বিন্দুতে কণার সম্ভাব্য গতিপথ দুইটি হইতে পারে। কিন্তু শান্ত প্রবাহে কোন কণা যে কোন বিন্দুতে মাত্র এক পথেই চলিতে পারে। অতএব রেখার ছেদ সম্ভব নয়। শান্ত প্রবাহ রেখার এই ধর্ম বৈদ্যুত বা চৌম্বক ক্ষেত্রে বলরেখার মত। দুয়ের মধ্যে আরও সাদৃশ্য আছে। বলক্ষেত্রের যে কোন বিন্দুতে তীব্রতার অভিমুখ বলরেখার ঐ বিন্দুতে টানা স্পর্শক বরাবর। শান্ত প্রবাহরেখার যে কোন বিন্দুতে টানা স্পর্শক ঐ বিন্দুতে কণার বেগের বা গতির দিক্ নির্দেশ করে। বলরেখা ঘন সন্নিবিষ্ট থাকিলে সেখানে বলক্ষেত্রের তীব্রতা বেশী। শান্ত প্রবাহ রেখা ঘন সন্নিবিষ্ট হইলে সেখানে প্রবাহ বেশী বেগবান হয়। রেখার ঘনত্ব কম হইলে বেগও কম হয় (11.2 চিত্র)।

11.2 চিত্র

11-2. বিক্ষুব্ধ প্রবাহ। শান্ত প্রবাহ কম ক্ষেত্রেই ঘটে। সাধারণতঃ বেগ কম ও প্রবাহের খাত সরু হইলে প্রবাহ শান্ত হয়। অধিকাংশ ক্ষেত্রেই প্রবাহ বিক্ষুব্ধ। প্রবাহ পথের যে কোন বিন্দুতে বেগের দিক্ ও মান স্থির না থাকিয়া সময়ের সঙ্গে এলোমেলোভাবে বদলাইতে থাকিলে প্রবাহকে বিক্ষুব্ধ বলা হয়। পথের কোন বিন্দুতে আগন্তুক কণা বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন পথে

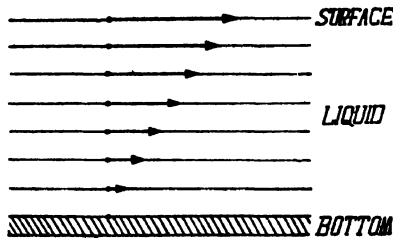
চলে। তরলের কোন কোন অংশ আবর্ত সৃষ্টি করিয়া আবর্তিত হইতে হইতে স্রোতের সঙ্গে চলে। ইহাদের ঘূর্ণি (Vortex) বলে।

11.3 চিত্র

রেনল্ডস্ (Reynolds) শান্ত ও বিক্ষুব্ধ প্রবাহের প্রভেদ একটি সহজ পরীক্ষার সাহায্যে দেখাইয়াছেন। 11.3 চিত্রে মোটা নল A দিয়া কোন স্বচ্ছ তরল প্রবাহিত হইতেছে। যে পাত্রে স্বচ্ছ তরল রাখা আছে তাহা উঠাইয়া বা নামাইয়া প্রবাহের বেগ বাড়ান বা কমান যায়। অন্য পাত্রে ঐ তরলকে গাঢ় রং করিয়া সরু নল B-র সাহায্যে A-র অক্ষ বরাবর রঙীন তরল সরু সুতার আকারে ছাড়া যায়। স্বচ্ছ তরলের বেগ কম হইলে রঙীন সুতা সোজা এবং অবিচ্ছিন্ন থাকে। স্রোতের বেগ বাড়াইয়া চলিলে ক্রমে সুতা কাঁপিতে থাকিবে। পরে এলোমেলোভাবে চলিতে থাকিবে এবং হয়ত ছিন্ন হইয়া আবর্তের সৃষ্টি করিবে। স্রোতের যে বেগে এই গোলমাল আরম্ভ হয় তাহাকে 'ক্রান্তিক বেগ' (Critical velocity) বলে। ইহা তরলের প্রকৃতি, প্রবাহ খাতের প্রস্থ ও দেওয়ালের মসৃণতা ইত্যাদির উপর নির্ভর করে!

ঘূর্ণি। ঘূর্ণিতে তরলের এক অংশ সোজা বা বাঁকা অক্ষে আবর্তিত হইতে থাকে। ক্রান্তিক বেগ ছাড়াইয়া স্রোতের বেগ আরও বাড়িলে ঘূর্ণি স্পষ্টতর হয়। তরলের উপর হালকা গুঁড়া ছড়াইয়া দিলে ঘূর্ণি সহজে বোঝা যায়। প্রবাহে লাঠি ডুবাইয়া বা অন্যভাবে বাধার সৃষ্টি করিলে বাধার পিছনে ঘূর্ণি স্থানচ্যুত হইয়া স্রোতের সঙ্গে চলিয়া যায় ও তাহার জায়গায় অন্য ঘূর্ণির সৃষ্টি হয়।

জলের স্তম্ভে একটি মার্বেল ছাড়িয়া দিলে উহা সোজা না পড়িয়া আঁকা-বাঁকা পথে পড়ে। উহার পিছনে ঘূর্ণির সৃষ্টি হয় বলিয়া উহার আচরণ এরূপ হয়। বেগ বেশী হইলে বাধার পিছনে পালা করিয়া একবার ডাইনে, একবার বাঁয়ে ঘূর্ণির সৃষ্টি হয়। হাওয়ায় নিশান পতপত করিয়া উড়িবার কারণও ইহাই। ঘূর্ণি বিচ্ছিন্ন হইবার সময় পাশের দিকে চাপ দেয় বলিয়া এরূপ হয়।

11-2. সান্দ্রতা (Viscosity)। প্রবাহমান তরল বা গ্যাসের দুই পাশাপাশি স্তরে প্রবাহের বেগের তফাত থাকিলে কৃন্তন বলের ক্রিয়ায় উহাদের আপেক্ষিক বেগ কমিতে চায়, অর্থাৎ দ্রুততর স্তর মন্থর স্তরকে দ্রুত করিতে চায়, ও মন্থর স্তর অন্যটির বেগ কমাইতে চায়। তরল বা গ্যাসের যে ধর্মের জন্য তাহারা পাশাপাশি স্তরের আপেক্ষিক বেগ কমাইতে চায় তাহাকে সান্দ্রতা বলে। একটি পাত্রে কোহল ও অনুরূপ অন্য একটি পাত্রে তেল লইয়া উভয়কে একইভাবে নাড়িয়া দিলে তেল তাড়াতাড়ি থামিয়া যাইবে, কিন্তু কোহল থামিতে দেরী হইবে। তেলের সান্দ্রতা কোহলের চেয়ে বেশী বলিয়া এরূপ হয়। তেল নিজের দুই স্তরের আপেক্ষিক গতিতে বেশী বাধা দিতে পারে।

সমতল স্থানের উপর দিয়া তরল আস্তে আস্তে প্রবাহিত হইতে থাকিলে, কঠিনের সংস্পর্শে অবস্থিত তরলের স্তর আসঞ্জনের জন্য স্থির থাকে। তাহার উপরের স্তর নিচের তরল স্তরের উপর দিয়া স্বল্প বেগে চলে। আরও উপরের স্তর আরও বেগে চলে (11.4 চিত্র)। স্তর কঠিন তলের যত উপরে তাহার বেগ তত বেশী হয়। তরলের পর পর অবস্থিত স্তর একে অন্যকে ত্বরান্বিত বা মন্থর করিয়া আপেক্ষিক বেগ কমাইতে চায়। বলের প্রকৃতি স্পার্শক। স্পার্শক বল দুই স্তরের স্পর্শতলে ক্রিয়া করে। দ্রুততর তলে উহার ক্রিয়া গতির বিপরীতে এবং মন্থর তলে উহা গতির দিকে। অধিকাংশ তরলে স্পার্শক বলের মান (ক) তরলের প্রকৃতি, (খ) স্তরের স্পর্শতলের ক্ষেত্রফল ও (গ) স্তরের দূরত্বের সহিত বেগের পরিবর্তনের হারের উপর নির্ভর করে।

11.4 চিত্র

বেগের নতিমাত্রা (Velocity gradient)। স্তরের দূরত্বের সহিত বেগের পরিবর্তনের হারকে বেগের নতিমাত্রা বলে। দুই স্তরের দূরত্ব dz ও উহাদের আপেক্ষিক বেগ dv হইলে বেগের নতিমাত্রা dv/dz।

তরল স্থির থাকিলে তখন উহাতে সান্দ্রতাজনিত কোন বল ক্রিয়া করে না। দুই স্তরে আপেক্ষিক গতি থাকিলেই সান্দ্রতা সক্রিয় হয়। দেখা যায় সান্দ্রতার ক্রিয়া এ বিষয়ে ঘর্ষণের মত। এই কারণে সান্দ্রতাকে অভ্যন্তরীণ ঘর্ষণও (Internal friction) বলা হয়। পাত্রের জল নাড়িয়া দিলে জল ক্রমে যে থামিয়া যায় তাহা জলের বিভিন্ন স্তরের মধ্যে অভ্যন্তরীণ ঘর্ষণ বা সান্দ্রতার জন্য।

গ্যাসেরও সান্দ্রতা আছে। পড়ন্ত বারিবিন্দুর গতিতে বায়ুর সান্দ্রতা বাধা দেয়। বারিবিন্দুর বেগ যত বাড়ে বায়ুর সান্দ্রতাজনিত বাধাও তত বাড়ে। বেগের সঙ্গে বাধা বাড়িতে বাড়িতে উহা ক্রমে অভিকর্ষের সমান, অর্থাৎ বারিবিন্দুর ভার mg-র সমান হয়। এরূপ হইলে বেগ আর বাড়িতে পারে না। এই সীমান্ত বেগ (terminal velocity) লইয়া বারিবিন্দু পড়িতে থাকে।

সান্দ্রতা আলোচনায় প্রবাহকে শান্ত ও স্তরিত (laminar) বলিয়া ধরা হইবে। প্রবাহীর বেগ ক্রান্তিক বেগ (11.5 অনুচ্ছেদ) না ছাড়াইলে প্রবাহ শান্ত থাকে। কাজেই সান্দ্রতা মাপনের কোন আলোচ্য ব্যবস্থায় প্রবাহীর বেগ ক্রান্তিক বেগের চেয়ে বেশী না হয় সে বিষয়ে সতর্ক থাকিতে হইবে। স্তরিত প্রবাহ বলিতে বুঝায় তরলের সমবেগী স্তরগুলি সমান্তরাল বা সমাক্ষ, কিন্তু বিভিন্ন স্তরে বেগ বিভিন্ন।

11-3. সান্দ্রতার গুণাংক (Coefficient of viscosity)। শান্ত, স্তরিত প্রবাহে অধিকাংশ তরলে পাশাপাশি দুই স্তরের মধ্যে ক্রিয়াশীল স্পার্শক বল F, স্পর্শতলের ক্ষেত্রফল A এবং বেগের নতিমাত্রা dv/dz-এর সমানুপাতিক হয়। লেখা যায়

$$F \propto A.\frac{dv}{dz} \text{ বা } F = \eta A\frac{dv}{dz} \qquad (11\text{-}3.1)$$

η রাশিটিকে সান্দ্রতার গুণাংক বলে। উহার মান তরলের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে।

$$\eta = \frac{F}{A \cdot \frac{dv}{dz}} \qquad (11\text{-}3.2)$$

বলিয়া η-র নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেওয়া যায়:

কোন তরলের সান্দ্রতার গুণাংক বলিতে বেগের একক নতিমাত্রায় তরলের এক বর্গক্ষেত্রের উপর ক্রিয়াশীল স্পার্শক বল বুঝায়।

F/A-র প্রকৃতি হইতে বোঝা যায় উহা কৃন্তনের পীড়ন (shearing stress) জাতীয় রাশি।

η-র মাত্রা (Dimensions of η)।

$$[\eta]=\frac{[F]}{[A][dv/dz]}=\frac{MLT^{-2}}{L^2(LT^{-1}/L)}=ML^{-1}T^{-1}$$

সিজিএস পদ্ধতিতে η-কে $g\ cm^{-1}s^{-1}$ এককে প্রকাশ করা যায়। এই একককে পয়্জ্ (poise) বলে। কোন তরলে 1 cm দূরত্বে অবস্থিত দুই স্তরে 1 cm/s আপেক্ষিক বেগ রাখিতে যদি প্রতি 1 cm^2 বর্গক্ষেত্রে 1 dyne স্পার্শক বল ক্রিয়া করে, তাহা হইলে ঐ তরলের সান্দ্রতা গুণাংক এক পয়্জ্।

নিচে কয়েকটি তরল ও গ্যাসের η-র মান দেওয়া হইল। উষ্ণতা বাড়িলে তরলের সান্দ্রতা কমে, কিন্তু গ্যাসের বাড়ে।

পদার্থ	উষ্ণতা (°C)	η (Poise)	পদার্থ	উষ্ণতা (°C)	η (Poise)
জল	20	0·01002	বায়ু	0	171×10^{-6}
	30	0·00798		20	181 ,,
বেনজিন	20	0·00647	হাইড্রোজেন	0	84 ,,
	30	0·00560		20	88 ,,
পারা	20	0·01552	হিলিয়াম	0	186 ,,
	30	0·01499		20	194 ,,
সালফিউরিক এসিড	20	0·27	অক্সিজেন	0	192 ,,
	30	0·20		20	200 ,,
রেড়ির তেল	20	9·86	নিয়ন	0	298 ,,
	30	4·51		20	310 ,,
জলপাই তেল	20	0·84	কার্বনডাই-অক্সাইড	0	138 ,,
	30	0·52		20	146 ,,

11-4. নিউটনীয় এবং অ-নিউটনীয় তরল (Newtonian and non-Newtonian liquids)। সান্দ্রতার আলোচনায় নিউটনই প্রথম $F/A=\eta\ dv/dz$ সম্পর্কটি প্রস্তাব করেন। যে সকল তরলে নির্দিষ্ট উষ্ণতা ও চাপে η স্থির থাকে, অর্থাৎ F/A রাশিটি dv/dz-এর আনুপাতিক হয়, তাহাদের নিউটনীয় তরল বলে। এরূপ না হইলে সে তরলকে অনিউটনীয় বলা হয়। অনিউটনীয় তরলে নির্দিষ্ট উষ্ণতা ও চাপে dv/dz

বাড়াইলে F/A ইহার অনুপাতে বাড়ে না। তখন $(F/A)/(dv/dz) = \eta$ অনুপাতকে 'আপাত সান্দ্রতা' (apparent viscosity) বলা হয়। অনিউটনীয় তরলে বেগের নতি বাড়িলে আপাত সান্দ্রতা কমে। নিউটনীয় তরলে η বেগের নতি নিরপেক্ষ, কিন্তু অনিউটনীয় তরলে উহা নতির উপর নির্ভর করে।

সকল বিশুদ্ধ তরল ও সাধারণ পদার্থের দ্রবণ নিউটনীয়। যে তরল গঠনে সমসত্ত্ব (homogeneous) নয়, উহা সাধারণতঃ অনিউটনীয়। রক্ত ও রং (paint) অনিউটনীয়। কোন তরলে যথেষ্ট পরিমাণ কলয়্‌ড্‌ (colloid) থাকিলে উহার আচরণ অনিউটনীয় হয়।

প্রবাহকালে পদার্থের আকারের বিকৃতি (Flow deformation) ফলিত পদার্থবিদ্যার রিওলজি (Rheology) নামক শাখার আলোচ্য বস্তু। পদার্থ কঠিন বা তরল হইতে পারে এবং প্রযুক্ত পীড়ন স্থিতিস্থাপক সীমার ঊর্ধ্বে থাকে। কঠিন ও তরলকে একইভাবে বিচার করিতে হইলে নিউটনের সান্দ্রতার সমীকরণ একটু অন্যভাবে লিখিলে বিচারে সুবিধা হয়। নিচে ইহা করা হইল।

সান্দ্রতার বল স্পার্শিক। F/A-কে কৃন্তন পীড়ন (shearing stress) মনে করা যায়। dt অবসরে dz দূরত্বে অবস্থিত দুই স্তরে আপেক্ষিক বেগ dv-র জন্য আপেক্ষিক সরণ হইবে $dv.dt$ এবং এক স্তর সাপেক্ষে অন্যের কৌণিক সরণ হইবে $d\theta = dv.dt/dz$। অতএব $d\theta/dt = dv/dz$। $d\theta/dt$ কৃন্তন কোণ পরিবর্তনের হার ; সংক্ষেপে ইহাকে কৃন্তন পরিবর্তনের হার বলা যায়। বেগের নতির বদলে কৃন্তন পরিবর্তনের হার লইয়া লিখিলে নিউটনের সান্দ্রতার সমীকরণ হইবে

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{d\theta}{dt}$$

η স্থির থাকিলে, অর্থাৎ পদার্থ নিউটনীয় হইলে, কৃন্তন পীড়ন (F/A) কৃন্তন পরিবর্তনের হারের সমানুপাতিক থাকিবে।

যে সকল পদার্থ সাম্যাবস্থায় সামান্যতম কৃন্তন বলও সহ্য করিতে পারে না তাহাদের আদর্শ প্রবাহী বলা হয়। আদর্শ কোন তরলে সামান্যতম হারেও কৃন্তন প্রয়োগ করিলে উহা প্রবাহিত হইবে। কিন্তু অনিউটনীয় তরল কিছু কৃন্তন সহ্য করিতে পারে। কলয়্‌ড্‌ যুক্ত তরলে ইহা দেখিতে পাওয়া যায়। কলয়্‌ড্‌ 'জেল' (gel)-এর আকারে, অর্থাৎ অর্ধ কঠিন পদার্থের মত, থাকিতে

পারে, আবার 'সল' (sol)-এর আকারে, অর্থাৎ তরল পদার্থের মতও থাকিতে পারে। জেল কিছু কৃন্তন সহ্য করিতে পারে। কোন কোন জেলকে ঝাঁকাইলে বা নাড়াচাড়া করিলে উহা সলের মত আচরণ করে ; রাখিয়া দিলে উহা আবার জেলে পরিণত হয়। এই ঘটনাকে থিক্সট্রপি (Thixotropy) বলে। রং-এর এই ধর্ম থাকা দরকার। স্থির থাকিতে দিলে উহা জেলের মত থাকিবে ; নাড়াচাড়া পাইলে উহা সলে পরিণত হইবে। তখন বুরুশের সাহায্যে উহাকে সহজে লাগান যাইবে। যেখানে লাগান হইয়াছে সেখানে উহা জেলের মত অর্ধ কঠিন অবস্থায় থাকিবে, প্রবাহিত হইবে না। তরলের অণু বা অণুগুচ্ছের গঠন সরু ও লম্বা হইলে উহাতে থিক্সট্রপীয় ধর্ম দেখা যায়।

11-.5. ক্রান্তিক বেগ ও রেনল্ডস সংখ্যা (Critical velocity and Reynolds number)। আগে বলা হইয়াছে প্রবাহের বেগ একটা সীমা ছাড়াইলে শান্ত প্রবাহ অশান্ত প্রবাহে পরিণত হয়। এই বেগকে ক্রান্তিক বেগ বলে। পরীক্ষায় দেখা যায় ক্রান্তিক বেগ v_c নির্ভর করে সান্দ্রতার গুণাংক η, তরলের ঘনত্ব ρ এবং প্রবাহ খাতের ব্যাস d-র উপর। মাত্রা সম্বন্ধীয় সমীকরণের সাহায্যে ইহাদের সম্পর্ক বাহির করা যায়। ধরা যাক

$$v_c = N\eta^x \rho^y d^z \qquad (11\text{-}5.1)$$

N সংখ্যা মাত্র, উহা মাত্রাবিহীন।

সমীকরণের দুদিকের মাত্রা একই হইবে। অতএব

$$LT^{-1} = (ML^{-1}T^{-1})^x (ML^{-3})^y L^z$$

M, L ও T-র উভয় দিকের মাত্রা পৃথক পৃথক ভাবে সমান হইবে। সুতরাং

M-এর জন্য পাই $\qquad 0 = x + y$

L-এর জন্য পাই $\qquad 1 = -x - 3y + z$

T-র জন্য পাই $\qquad -1 = -x$

অতএব $x = 1$, $y = -1$ এবং $z = -1$.

$$\therefore \quad v_c = N\frac{\eta}{\rho d} \qquad (11\text{-}5.2)$$

d-ব্যাসের নলে প্রবাহমান তরলের v_c মাপিয়া ও ρ এবং η জানিয়া নলে N-এর মান বাহির করা যায়। সিজিএস একক ব্যবহার করিলে এই মান প্রায় 2300 হয়। d-র বদলে নলের ব্যাসার্ধ r লইবার রীতিও প্রচলিত আছে। সেক্ষেত্রে $N = 1150$ হইবে।

রেনল্ডস্ সংখ্যা। প্রবাহের বেগ ক্রান্তিক বেগের চেয়ে বেশী হইলে 11-5.2 সমীকরণ হইতে দেখা যায় N-এর মান সেক্ষেত্রে 2300-র চেয়ে বেশী, এবং বেগ কম হইলে N 2300-র চেয়ে কম। অতএব প্রবাহের যে কোন ক্ষেত্রে N-এর মান জানিয়া বলা যায় প্রবাহ শান্ত কি অশান্ত।

দেখা যায়, প্রবাহের বেগ v, ঘনত্ব ρ, সান্দ্রতা গুণাংক η এবং প্রবাহ নলের ব্যাস d, এই চারটি রাশির সমবায়ে এমন একটি মাত্রাবিহীন সংখ্যা গঠিত হইতে পারে যাহা দেখিয়া বোঝা যায় প্রবাহ শান্ত কি অশান্ত। এই সংখ্যাকে রেনল্ডস সংখ্যা বলে (1-6 অনুচ্ছেদ দেখ), এবং ইহার মান

$$N = \frac{v\rho d}{\eta} \qquad (11\text{-}5.3)$$

নলের ছেদে v-র মান সর্বত্র সমান হয় না। সে জন্য v-র গড় মান লইতে হয়।

বেগ ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে বিশেষ কোন বেগ অতিক্রম করার পরই প্রবাহ শান্ত হইতে হঠাৎ অশান্তে পরিণত হইবে, ইহা মনে করা ঠিক নয়। মোটামুটি দেখা যায় $N = 2000$ পর্যন্ত প্রবাহ শান্ত, এবং $N = 3000$-এর বেশী হইলে প্রবাহ অশান্ত। N-এর মান 2000 হইতে 3000-এর মধ্যে থাকিলে প্রবাহের প্রকৃতি স্থির না থাকিয়া ক্রমশঃ বদলায়।

1 cm ব্যাসের নলে জল 10 cm/s বেগে প্রবাহিত হইতে থাকিলে 20°C-এ ($\eta = 0.01$ poise) রেনল্ডস সংখ্যার মান 11-5.3 সমীকরণ অনুসারে প্রায় 1000। অতএব প্রবাহ শান্ত। বায়ুতে ঐ উষ্ণতায় $\rho = 0.0012\ g/cm^3$, $\eta = 180 \times 10^{-6}$ poise ধরিয়া দেখা যায় 1 cm ব্যাসের নলে প্রবাহ শান্ত হইতে হইলে বেগ $v = 300$ cm/s-এর মধ্যে থাকা দরকার। জলের ক্ষেত্রে এই বেগ হইবে $v = 20$ cm/s।

লাভাস্রোতের সান্দ্রতা গুণাংক খুব বেশী। এজন্য স্রোতের বেগ বেশী হইলেও লাভা প্রবাহের প্রকৃতি শান্ত হইতে পারে।

11-6. সরু নলে তরলের প্রবাহ। পোয়াস্যেই (Poiseuille) নামে একজন ফরাসী পদার্থবিদ পরীক্ষার সাহায্যে দেখান (1840) নলের মধ্য দিয়া শান্তভাবে তরল প্রবাহিত হইলে, যে পরিমাণ তরল প্রতি সেকেণ্ডে নল দিয়া বাহির হয় তাহার আয়তন (ক) নলের ব্যাসের চতুর্থ ঘাত ও (খ) নলের দুই প্রান্তে চাপের বৈষম্যের সমানুপাতিক, এবং (গ) নলের দৈর্ঘ্যের বিষমানুপাতিক

হয়। প্রবাহে নিম্নলিখিত শর্তগুলি প্রযোজ্য হইলে গণিতের সাহায্যে পোয়াসোঁইর লব্ধ ফলে পৌঁছা যায় ঃ

(১) তরল নিউটনীয়, অর্থাৎ প্রবাহে সান্দ্রতাজনিত স্পার্শক বল বেগের নতির সমানুপাতিক ;

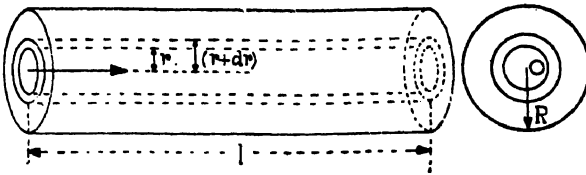
(২) প্রবাহ শান্ত ;

(৩) নলের যে কোন ছেদের প্রত্যেক বিন্দুতে চাপ একই (চাপ একই হইলে নলের ব্যাস বরাবর তরলের গতির কোন উপাংশ থাকিবে না) ;

(৪) নলের সংস্পর্শে অবস্থিত তরল স্তর স্থির, অর্থাৎ গতিহীন।

11·6.1. পোয়াসোঁইর সমীকরণ (Poiseuille's equation)।

মনে কর l দৈর্ঘ্যের ও R ব্যাসার্ধের কোন সরু অনুভূমিক নলে অসংনম্য (incompressible) কোন তরল শান্ত, স্থরিত গতিতে প্রবাহিত হইতেছে। 11.5 চিত্রে তরলের গতি বাঁ হইতে ডানদিকে ধরা হইয়াছে। নলের দেওয়ালে তরল স্তর উহাতে সংলগ্ন এবং এই স্তরের বেগ $v=0$। বিভিন্ন স্তরগুলি নলের সহিত সমাক্ষ। দেওয়াল হইতে অক্ষের দিকে স্তরের বেগ ক্রমশঃ বেশী এবং অক্ষে উহা চরম।

নলের দুই প্রান্তে চাপের প্রভেদ P ধরা যাক। নলের যে কোন ছেদে চাপ ছেদের সকল বিন্দুতেই সমান, এবং নলের এক প্রান্ত হইতে অন্য প্রান্ত পর্যন্ত চাপ সুষমভাবে বদলায় ধরা হইবে।

11.5 চিত্র

নলের সমাক্ষ r ব্যাসার্ধের তরলের বেলন কল্পনা কর। ইহার পৃষ্ঠে যে কোন বিন্দুতে বেগের অরীয় (radial) নতিমাত্রা dv/dr। অক্ষীয় অংশে বেগ বেশী বলিয়া এই বেলনের বাহিরের তরল বেলনের পিঠে গতির বিপরীতে সান্দ্রতাজনিত যে স্পার্শক বল প্রয়োগ করে তাহার মান

$$F = 2\pi r l \eta dv/dr \qquad (11\text{-}6.1)$$

বেলনে তরলের প্রবাহ হয় উহার দুই প্রান্তে চাপের প্রভেদের জন্য। এই কারণে প্রবাহের অভিমুখে বেলনের উপর যে অনুভূমিক বল ক্রিয়া করে তাহার মান $\pi r^2 P$।

প্রবাহে ত্বরণ নাই ধরা হইবে। এ অবস্থায় আলোচ্য তরল বেলনের উপর ক্রিয়াশীল বলগুলি সাম্যে থাকিবে। অনুভূমিক সাম্য বিচার করিলে অনুভূমিক বলগুলির যোগফল শূন্য হইতে হইবে। অতএব $F+\pi r^2 P=0$ হইবে। ইহা হইতে পাই

$$\pi r^2 P+2\pi r l\eta dv/dr=0 \text{ বা } rP=-2l\eta\, dv\, dr$$

$$\text{বা } -rdr=\frac{2l}{P}\eta dv \text{ বা } -\int_R^r rdr=\frac{2l\eta}{P}\int_0^v dv$$

$$\text{বা } \tfrac{1}{2}(R^2-r^2)=\frac{2l\eta}{P}v \text{ বা } v=\frac{(R^2-r^2)P}{4l\eta} \qquad (11\text{-}6.2)$$

এই সমীকরণে নলের অক্ষ হইতে r দূরত্বে বেগ v পাওয়া গেল। অক্ষে $r=0$ বলিয়া, তরলের অক্ষীয় বেগ

$$v_o=\frac{PR^2}{4l\eta} \qquad (11\text{-}6.3)$$

নলের সমাক্ষ r এবং $r+dr$ ব্যাসার্ধের বেলন আকারের খোলকের মধ্য দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে যে পরিমাণ তরল নির্গত হয়, তাহার আয়তন dV ধরিলে

$$dV=2\pi r\, dr.v=2\pi r\frac{(R^2-r^2)P}{4\eta l}dr$$

$$=\frac{\pi P}{2\eta l}(R^2-r^2)\, r\, dr$$

মোট যে পরিমাণ তরল নল দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে নির্গত হয় তাহার আয়তন

$$V=\int dV=\frac{\pi P}{2\eta l}\int_0^R (R^2 r-r^3)\, dr$$

$$=\frac{\pi P}{2\pi l}\left(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right)=\frac{\pi PR^4}{8\eta l} \qquad (11\text{-}6.4)$$

ইহাকে পোয়াস্যেইর সমীকরণ (Poiseuille's equation) বলে। পোয়াস্যেইর পরীক্ষালব্ধ ফলগুলি এখানে গণিতের সাহায্যে পাওয়া গেল।

প্রসঙ্গতঃ বলা যায় শিরায় রক্ত চলাচলের নিয়ম খুঁজিতে গিয়া পোয়াস্যোই তাঁহার পরীক্ষালব্ধ ফলে উপনীত হইয়াছিলেন। কিন্তু রক্ত অনিউটনীয় তরল ; উহা গঠনে সমসত্ত্ব নয় এবং উহাতে প্রচুর কলয়্‌ড্‌ পদার্থ আছে। অতএব রক্ত প্রবাহে পোয়াস্যোই সমীকরণ সঠিক প্রযোজ্য নয়।

গড়বেগ। নলের যে কোন ছেদে তরলের গড় বেগ

$$v_{av}=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v\,2\pi r\,dr=\tfrac{1}{2}.\frac{PR^2}{4l\eta}=\tfrac{1}{2}v_0 \qquad (11\text{-}6.5)$$

গড় বেগ অক্ষীয় বেগের $\frac{1}{2}$।

11-6.2. পোয়াস্যোই সমীকরণের শুদ্ধি। পোয়াস্যোইর সমীকরণে দুটি শুদ্ধি প্রয়োগ করা দরকার হয়। এই সমীকরণ প্রতিষ্ঠায় আমরা ধরিয়াছি প্রযুক্ত বল নলে কেবল সান্দ্রতাজনিত বাধা অতিক্রম করে। কিন্তু নল দিয়া যে তরল বাহির হয় তাহার কিছু গতিশক্তি থাকে। প্রযুক্ত বলই ইহা জোগায়। তা ছাড়া, নলের প্রবেশ মুখের কাছে তরল ত্বরিত হইয়া আসিবার সময় উহার বিভিন্ন অংশে আপেক্ষিক বেগ থাকায় ঐখানে সান্দ্রতাজনিত বাধা অতিক্রম করার জন্য কিছু শক্তি ব্যয় হয়। অতএব প্রযুক্ত বলকে নলের ভিতরে সান্দ্রতার বাধা অতিক্রম করার কার্য করা ছাড়া নলের তরলে গতিশক্তি দেওয়া ও নলের মুখের তরলে সান্দ্রতার বাধা অতিক্রম করার জন্যও কার্য করিতে হয়। শেষের দুটি কার্যের জন্য পোয়াস্যোইর সমীকরণে শুদ্ধি প্রয়োগ দরকার।

গতিশক্তির জন্য শুদ্ধি। ইহা বাহির করিতে নলের সমাক্ষে তরলের r ও $r+dr$ ব্যাসার্ধ দিয়া সীমাবদ্ধ বেলন আকার একটি খোলক কল্পনা কর। এই খোলকে তরলের বেগ v 11-6.2 সমীকরণ দিয়া নির্ণীত বলিয়া ধরা যায়। প্রতি সেকেণ্ডে এই খোলক দিয়া $\rho\,dV=\rho.2\pi r dr.v$ ভরের তরল নির্গত হয় (ρ = তরলের ঘনত্ব)। ইহার গতিশক্তি

$$dT=\tfrac{1}{2}\rho\,dV.v^2=\pi\rho\,v^3 r dr.$$

নলের তরলকে এইরূপ অনেকগুলি খোলকে ভাগ করিয়া সকলের গতিশক্তি যোগ করিলে প্রতি সেকেণ্ডে নির্গত তরলের মোট গতিশক্তি T পাইব।

$$T=\Sigma dT=\int_0^R \pi\rho\,v^3 r\,dr=\pi\rho\left(\frac{P}{4l\eta}\right)^3\int_0^R (R^2-r^2)^3 r\,dr$$

$$\pi\rho\left(\frac{P}{4l\eta}\right)^3.\ \frac{R^8}{8}=\frac{\rho}{\pi}.\frac{P}{8l\eta}.V^2=\frac{\rho V^3}{\pi^2 R^4}.$$

প্রযুক্ত প্রেষবৈষম্য P প্রতি সেকেণ্ডে V আয়তন তরল ঠেলিয়া বাহির করিতে যে কার্য করে তাহার মান PV। কেবল সান্দ্রতার বাধা অতিক্রম করিতে যদি P' প্রেষের দরকার হয়, তাহা হইলে

$$P'V+\frac{\rho PV^2}{8\pi\eta l}=PV$$

বা $$P'=P-\frac{\rho PV}{8\pi\eta l}=P-\frac{\rho V^2}{\pi^2R^4} \qquad (11\text{-}6.6)$$

গতিশক্তির জন্য শুদ্ধি করিলে 11-6.5 সমীকরণে P-র বদলে P' ধরিতে হইবে। অতএব শোধিত সমীকরণ অনুসারে

$$\eta=\frac{\pi P'R^4}{8\,l\,V}=\frac{\pi\ R^4}{8\,l\,V}\left(P-\frac{\rho\ PV}{8\pi\eta\ l}\right)$$

$$=\frac{\pi\ PR^4}{8\,l\,V}-\frac{\rho\ PR^4}{8l.8\eta l}=\frac{\pi\ PR^4}{8\,l\,V}-\frac{\rho V}{8\pi l}. \qquad (11\text{-}6.7)$$

ত্বরণের শুদ্ধি। ত্বরণের জন্য শুদ্ধি হিসাব নিশ্চয়তার সহিত করা যায় না কারণ নলের মুখের কাছে তরলের বেগ পরিবর্তন সঠিকভাবে গণনায় আনা সম্ভব বলিয়া মনে হয় না। মুখের কাছে সান্দ্রতাজনিত বাধা অতিক্রম করার জন্য যে অতিরিক্ত শক্তি ব্যয় দরকার তাহা দীর্ঘতর নলে অতিরিক্ত শক্তি ব্যয়ের সমান ধরিয়া নলের কার্যকর দৈর্ঘ্য l-এর বদলে $l+nR$ নেওয়া হয়। R নলের ব্যাসার্ধ। n একটি সংখ্যা ; উহার পরীক্ষালব্ধ মান মোটামুটি 0.5 হইতে 0.8-এর মধ্যে।

উভয় শুদ্ধি প্রয়োগ করিলে পাইব

$$\eta=\frac{\pi PR^4}{8V(l+nR)}-\frac{\rho V}{8\pi(l+nR)}$$

গতিশক্তির জন্য শুদ্ধিকে অনেক সময় হ্যাগেনব্যাকের (Hagenbach) শুদ্ধি বলা হয়। ইহার পরীক্ষালব্ধ মান গণনালব্ধ মানের সমান নয়। এজন্য হ্যাগেনব্যাকের শুদ্ধি $m\rho V/8\pi(l+nR)$ রূপে লেখা হয়। m একটি সংখ্যা ; উহার পরীক্ষালব্ধ মান 0.5 হইতে 1.55-এর মধ্যে। এভাবে লিখিলে

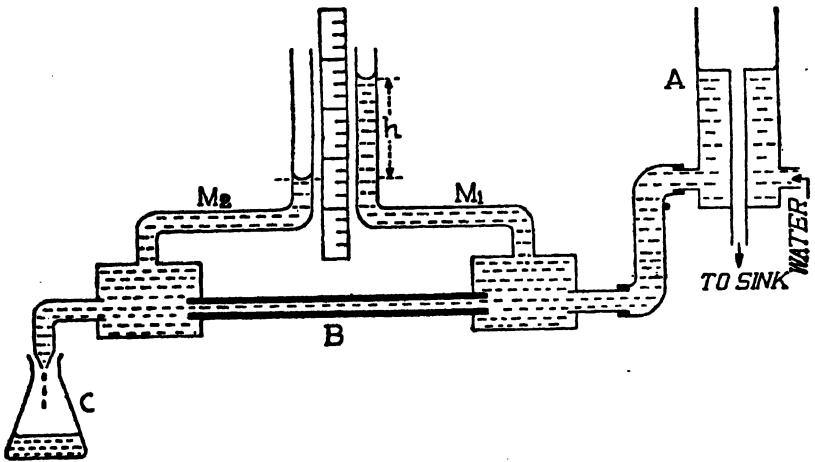
$$\eta=\frac{\pi PR^4}{8V(l+nR)}-\frac{m\rho V}{8\pi(l+nR)} \qquad (11\text{-}6.8)$$

11-6.3. পোয়াজ্যেই সমীকরণের সাহায্যে তরলের সান্দ্রতা নির্ণয়। পোয়াসোই সমীকরণের সাহায্যে তরলের সান্দ্রতা নিরপেক্ষভাবে, অর্থাৎ অন্য

তরলের সান্দ্রতার সহিত তুলনা না করিয়া, মাপা যায়। কিন্তু শুদ্ধিগুলির অনিশ্চয়তার জন্য মাপনে ত্রুটির সীমা আকাঙ্ক্ষিতরূপে কমান যায় না। পরীক্ষায় কৈশিক নল অনুভূমিক থাকে' এবং অন্য একটি পাত্র হইতে স্থির চাপে তরল নল দিয়া প্রবাহিত হইতে দেওয়া হয়। সূক্ষ্ম মাপনে নলের দুই মুখের কাছে প্রেষ জানিতে হয়।

11.6 চিত্রে কৈশিক নলের সাহায্যে সান্দ্রতা মাপনের একটি সহজ ব্যবস্থা দেখান হইয়াছে। পরীক্ষাধীন তরল জল বলিয়া ধরিব। A পাত্রে জলের লেভল স্থির রাখা হয়। B কৈশিক নলের দুই মাথায় মোটা নলের সঙ্গে প্রেষমান M_1 ও M_2 লাগান থাকে। M_1, M_2-তে জলের উচ্চতার প্রভেদ h হইলে $P=h\rho g$। t অবসরে m গ্রাম জল C পাত্রে সংগৃহীত হইলে $V=m/\rho t$।

পরীক্ষায় কয়েকটি সতর্কতা দরকার ঃ—

(১) নলে জলের বেগ সংকট বেগের নিচে থাকিবে। জলের গড়বেগ $V/\pi R^2$। এই মান নিয়া 11.5.3 সমীকরণের সাহায্যে রেনল্ডস সংখ্যা হিসাব করিতে হইবে। ইহা 1000 বা কম থাকিতে হইবে। দরকার হইলে A পাত্রে জলের লেভল কমাইতে হইবে।

11.6 চিত্র

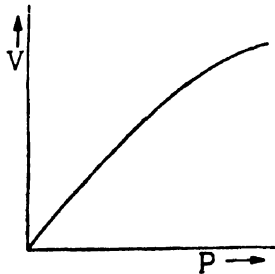
(২) পরীক্ষার আগে কৈশিক নল সুষম কি না দেখিয়া লইতে হইবে। ইহার জন্য নলে কয়েক সেণ্টিমিটার লম্বা পারার সূতা টানিয়া লইয়া নলের

বিভিন্ন জায়গায় উহার দৈর্ঘ্য দেখিতে হইবে। ব্যাসের পরিবর্তন 3°/ₒ-এর কম থাকা দরকার।

(৩) নলের ব্যাসার্ধ যথাসম্ভব সূক্ষ্মভাবে মাপিতে হইবে। η R^4-এর আনুপাতিক হওয়ায় R মাপনে 1°/ₒ ত্রুটি থাকিলে η-তে এজন্য ত্রুটি হইবে 4°/ₒ।

(৪) কৈশিক নলের উষ্ণতা যথাসম্ভব স্থির রাখা দরকার। তরলের সান্দ্রতা উষ্ণতার সহিত দ্রুত বদলায়। জলের ক্ষেত্রে 30°C-এ প্রতি ডিগ্রী সেণ্টিগ্রেডে সান্দ্রতা পরিবর্তন প্রায় 1.3°/ₒ। উষ্ণতা বৃদ্ধির সঙ্গে ইহা দ্রুত বাড়ে।

(৫) লম্বা ও সরু কৈশিক নল ব্যবহার করিলে শুদ্ধিগুলির মান কম হইবে। $l=100$ cm এবং $R=0{\cdot}1$ cm হইলে n-এর অনিশ্চয়তার জন্য কার্যকর l-এর ত্রুটি অন্য ত্রুটির তুলনায় উপেক্ষণীয় হইবে। ইহাতে V কম হওয়ায় গতিশক্তির জন্য ত্রুটিও কম থাকিবে।

তরলের সান্দ্রতা জানা না থাকিলে রেনল্ডস সংখ্যা পাইতে 11-5.3 সমীকরণ প্রয়োগ করা যায় না। এরূপ ক্ষেত্রে P র মান প্রথমে কম রাখিয়া পরে উহা ক্রমশঃ বাড়াইয়া P-র সহিত V-র পরিবর্তন দেখা যাইতে পারে। P, V লেখ আঁকিলে (11.7 চিত্র) উহা প্রথমে সরলরেখা হয়, পরে বাঁকে। P কম থাকিলে V P-র আনুপাতিক। P অনেক বাড়াইলে V প্রায় $\sqrt{P}$-র আনুপাতিক হয়। সান্দ্রতা মাপনে P-কে সরল রৈখিক অংশে রাখিতে হইবে।

11.7 চিত্র

11-6.4. খাড়া কৈশিক নলে সান্দ্র তরলের প্রবাহ (Viscous flow through a vertical capillary)। নল অনুভূমিক না হইয়া খাড়া থাকিলে প্রতি সেকেণ্ডে উহা হইতে কতটা তরল নির্গত হইবে তাহা বাহির

করিতে অনুভূমিক নলে যে সকল শর্ত প্রয়োগ করা হইয়াছিল, খাড়া নলেও সেগুলি প্রযোজ্য ধরা যাক। নলের সমাক্ষ r ব্যাসার্ধের বেলন আকার তরলের উপর ক্রিয়াশীল খাড়া বলগুলি কি কি দেখা যাক। এই বেলনের ওজন $\pi r^2 l\rho g$ নিচের দিকে ক্রিয়া করে। নলের উপর প্রান্তে চাপ P_1 ও নিচের প্রান্তে চাপ P_2 $(P_1 > P_2)$ হইলে $\pi r^2(P_1 - P_2) = \pi r^2 P$ বল বেলনের উপর নিচের দিকে ক্রিয়া করে। বেলনের তরল নিচের দিকে নামে বলিয়া উহার পৃষ্ঠে সান্দ্রতার বাধা উপরের দিকে ক্রিয়া করে। বেলনের পৃষ্ঠে তরলের বেগের নতি dv/dr হইলে এই বাধার মান $2\pi r l \eta dv/dr$। বেলনের তরলের কোন নিম্নমুখী ত্বরণ নাই ধরিলে এই বল তিনটির যোগফল শূন্য হইবে।

$$2\pi r l \eta dv/dr + \pi r^2 P + \pi r^2 l\rho g = 0$$

$$\text{বা}\quad 2\, l\, \eta dv = -(P + l\rho g)\, r dr$$

$$\text{বা}\quad v = \int_0^v dv = -\frac{P + l\,\rho g}{2\, l\eta} \int_R^r r dr = \frac{P + l\,\rho\, g}{2\, l\eta} \cdot \frac{R^2 - r^2}{2} \qquad (11\text{-}6.9)$$

দেখা যায়, সম্পর্ক অনুভূমিক নলের মতই (11-6.2 সমীকরণ), কেবল নলের দুই প্রান্তের প্রেষবৈষম্য P-র সঙ্গে নলের সমান দৈর্ঘ্যের তরল স্তম্ভের প্রেষ $(l\rho g)$ যোগ করিতে হইবে।

অনুভূমিক নলের মত যুক্তি প্রয়োগ করিয়া প্রতি সেকেণ্ডে নির্গত তরলের আয়তন V পাওয়া যায়।

$$V = \frac{\pi\,(P + l\,\rho\, g)\, R^4}{8\,\eta\, l} \qquad (11\text{-}6.10)$$

তরলের গতিশক্তি ও নলের উপরের মুখের কাছে ত্বরণের জন্য শুদ্ধি অনুভূমিক নলের মতই। এগুলি ধরিয়া লেখা যায়।

$$\eta = \frac{\pi\,(P + l\rho g)\, R^4}{8V\,(l + nR)} - \frac{m\,\rho\, V}{8\pi\,(l + nR)} \qquad (11\text{-}6.11)$$

11-6.5. আধারে তরলের লেভ্‌ল্ পড়িতে দিয়া সান্দ্রতা নির্ণয়। 11.6 চিত্রের ব্যবস্থায় A পাত্রে তরলের লেভ্‌ল্ স্থির রাখার চেষ্টা না করিয়া উহা যদি কৈশিক নল দিয়া তরল বাহির হইয়া যাওয়ার জন্য নামিতে দেওয়া হয়, তাহা হইলে নির্দিষ্ট সময়ে সংগৃহীত তরলের আয়তন দেখিয়া সান্দ্রতা কিভাবে পাওয়া যাইবে? অনুভূমিক নলে তরল নির্গমনের হার

V প্রেষবৈষম্য P-র সমানুপাতিক। A পাত্রে তরলের লেভ্‌ল্ B নলের অক্ষের h সেণ্টিমিটার উপরে থাকিলে $P = h\rho g$। খাড়া নলের আচরণ অনুভূমিক নলের মতই, কেবল P-র বদলে $P + l\rho g = (h+l)\rho g$ নিতে হইবে।

অনুভূমিক নলে $H = h$, এবং খাড়া নলে $H = h + l$ ধরিলে উভয় ক্ষেত্রে লেখা যায়।

$V \propto H$ বা $V = kH$। তাছাড়া, $dh = dH$.
$k = \pi R^4 \rho g / 8\eta l$ উভয় ক্ষেত্রে একই।

dt অবসরে Vdt আয়তন তরল নল দিয়া বাহির হয়। তরল কার্যতঃ অসংনম্য। A নলের প্রস্থচ্ছেদ α হইলে ইহার জন্য A পাত্রে তরলের লেভল dh পরিমাণ কমিলে

$$-\alpha\, dh = V\, dt = k\, H\, dt$$

$$\text{বা} \quad -\frac{\alpha}{k} \cdot \frac{dH}{H} = dt$$

t সময়ে h h_1 হইতে h_2-তে নামিলে এই দুই সীমার মধ্যে উপরের সমীকরণ সমাকলন করিয়া পাই

$$\frac{\alpha}{k} \ln \frac{H_1}{H_2} = t$$

t সময়ে Q আয়তন তরল নির্গত হইয়া থাকিলে $Q = \alpha(h_1 - h_2) = \alpha(H_1 - H_2)$ বলিয়া লেখা যায়

$$t = \frac{Q}{k(H_1 - H_2)} \ln \frac{H_1}{H} = \frac{8\,\eta l\, Q}{\pi R^4 \rho g} \cdot \frac{\ln(H_1/H_2)}{H_1 - H_2}$$

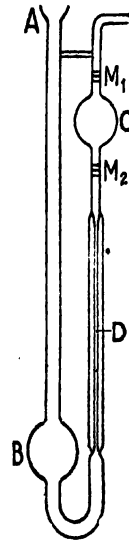
$$\therefore\ \eta = \frac{\pi R^4 \rho g t}{8 l Q} \cdot \frac{H_1 - H_2}{\ln(H_1/H_2)} \qquad (11\text{-}6.12)$$

11-6.6. আসোয়াল্ডের ভিস্কোমিটার (Ostwald's viscometer)। ভিস্কোমিটার বলিতে সান্দ্রতা মাপনের যে কোন যান্ত্রিক ব্যবস্থা বুঝায়। মাপন নিরপেক্ষ বা আপেক্ষিক হইতে পারে। ইহাদের যে কোন যন্ত্রকেই ভিস্কোমিটার বলা হয়। কৈশিক নলের সাহায্যে নিরপেক্ষ মাপনের ব্যবস্থা আগেই বলা হইয়াছে। 11-7 ও 11-8 অনুচ্ছেদগুলিতে অন্য প্রকার নিরপেক্ষ ভিস্কোমিটারের কথা বলা হইয়াছে।

নিরপেক্ষ মাপন সময় সাপেক্ষ এবং উহাতে মাপজোখও বেশী। তাছাড়া উহাতে তরলের পরিমাণও একটু বেশী দরকার হয়। নানা কাজে বিশেষ করিয়া তরল সংক্রান্ত শিল্প ও ব্যবসায়ে, কোন তরলের সান্দ্রতা তাড়াতাড়ি

জানিয়া লইতে পারা খুব সুবিধার। তুলনায় ইহা সহজেই করা যায় ; ইহার যন্ত্রও সরল এবং তরলের পরিমাণও কম দরকার হয়।

এই সকল তুলনামূলক যন্ত্রের মধ্যে আসোয়াল্ডের ভিস্কোমিটার বহু ব্যবহৃত। ইহার গঠন 11.8 চিত্রে দেখান হইয়াছে ! যন্ত্রটি কতকটা U নলের মত। উহাতে দুটি বালব্ (B ও C) এবং একটি কৈশিক নল (D) আছে। পরীক্ষাধীন তরল A মুখ দিয়া B বালবে ঢালা হয়। তাহার পর নলের অন্য মুখ দিয়া তরল টানিয়া উহা M_1 দাগের উপর তোলা হয়। এ সময়ে তরলের নিচের প্রান্ত B-র নিচে থাকিতে হইবে। যন্ত্রটি খাড়া রাখিয়া তরলকে অভিকর্ষের প্রভাবে পড়িতে দিয়া উহার মাথা M_1 দাগ হইতে M_2 দাগে পৌঁছিতে যে সময় (t) লাগে তাহা মাপিতে হয়। সান্দ্রতার সহিত t-র সম্পর্ক ধরা হয়

$$\eta = A\rho t - B\rho/t \qquad (11\text{-}6.13)$$

11.8 চিত্র

এখানে ρ তরলের ঘনত্ব, এবং A ও B দুইটি স্থির রাশি। উহাদের মান গৃহীত যন্ত্রের উপর নির্ভর করে। জানা সান্দ্রতার দুইটি তরল ব্যবহার করিয়া A ও B-র মান বাহির করিয়া লইলে পরে উহা ব্যবহার করিয়া অন্য তরলের সান্দ্রতা মাপা যায়।

$\eta/\rho = \nu$ রাশিটিকে 'শুদ্ধগতীয় সান্দ্রতা' (kinematic viscosity) বলে। ইহার মাত্রা L^2T^{-1} এবং ইহার সিজিএস একক 'স্টোক্স্' (stokes)। $\eta = 1$ cgsu এবং $\rho = 1$ cgsu হইলে $\nu = 1$ স্টোক্স্ $= 1$ cm²/s হইবে। (ν-কে কখন কখন 'গতীয় সান্দ্রতা' (dynamic viscosity) বলা হয়।) আসোয়াল্ডের ভিস্কোমিটার ν মাপে, কারণ

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = At - \frac{B}{t} \qquad (11\text{-}6.14)$$

t যথেষ্ট বড় হইলে At-র তুলনায় B/t উপেক্ষা করা যায়। তখন

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{t_1}{t_2} \qquad (11\text{-}6.15)$$

অর্থাৎ শুদ্ধগতীয় সান্দ্রতা তরলের পতনকালের সমানুপাতিক। কৈশিক নল খুব সরু হইলে বা তরল বেশী সান্দ্র হইলে t বড় হয়।

খাড়া নল ভিস্কোমিটারে t সময়ে Q আয়তন তরল নির্গত হইলে 11-6.11 সমীকরণ অনুসারে লেখা যায়

$$\eta = \frac{\pi(P + l\rho g)R^4 . t}{8Q(l + nR)} - \frac{m\rho Q}{8\pi(l + nR)} \cdot \frac{1}{t}$$

P যদি স্থির উচ্চতার তরলের চাপের জন্য হইয়া থাকে এবং এই উচ্চতা যদি h হয়, তাহা হইলে $P = h\rho g$ এবং $P + l\rho g = (h + l)\rho g$। অতএব কার্যকর চাপ তরলের ঘনত্বের আনুপাতিক। আলোচ্য কোন নির্দিষ্ট যন্ত্রে তরল নির্গত হইতে থাকিলে h একটা নির্দিষ্টভাবে কমিতে থাকিবে। অতএব এরূপ ক্ষেত্রে তরল M_1 হইতে M_2-তে নামায় h-এর গড়মান ঐ যন্ত্রের একটি স্থির রাশি হইবে। যে কোন তরলই ব্যবহার করা যাক না কেন, উহাতে h-এর গড়মান স্থির থাকিবে। ইহাকে h_m ধরিলে মনে করা যায় তরল t সময় ধরিয়া $(h_m + l)$ তরলের চাপে নির্গত হইয়াছে। h_m-এর মান হিসাব করার কোন দরকার হয় না কারণ তুলনামূলক ফল পাইলেই চলে। এক্ষেত্রে উপরের সমীকরণে

$$\frac{\pi R^4(h_m + l)g}{8Q(l + nR)} = A \quad \text{এবং} \quad \frac{mQ}{8\pi(l + nR)} = B$$

লিখিলে 11-6.13 সমীকরণ পাওয়া যায়।

11-6.7. একাধিক কৈশিক নলের শ্রেণীসজ্জায় প্রবাহ (Flow through capillaries in series)। ওহ্‌ম্ সূত্রের সহিত পোয়াসোই সূত্রের

রূপগত মিল আছে। ওহ্‌ম্ সূত্র অনুসারে R রোধবিশিষ্ট তারে প্রতি সেকেণ্ডে I কুলম্ব আধান প্রবাহিত করাইতে তারের প্রান্তে যে বৈদ্যুত প্রেষবৈষম্য দরকার হয় তাহার মান $E=RI$। পোয়াসোই সূত্র অনুসারে R ব্যাসার্ধের l দৈর্ঘ্যের নলে প্রতি সেকেণ্ডে V আয়তন তরল প্রবাহিত করাইতে নলের প্রান্তে যে প্রেষবৈষম্য দরকার হয় তাহার মান

$$P=\frac{8\eta lV}{\pi R^4}$$

ওহ্‌ম্ সূত্রের সঙ্গে তুলনা করিলে E-র সহিত P-র এবং I-র সহিত V-র মিল দেখা যাইবে। দুই সমীকরণের সাদৃশ্য হইতে

$$Z=\frac{P}{V}=\frac{8\eta l}{\pi R^4} \qquad (11\text{-}6.16)$$

রাশিটিকে তরল প্রবাহ সংক্রান্ত ব্যাপারে নলের রোধ (resistance) বলা যায়।

বৈদ্যুত রোধ শ্রেণীসজ্জায় (in series) বা সমান্তরাল সজ্জায় (in parallel) থাকিলে যৌথ রোধ যে সকল সূত্র মানিয়া চলে, তরল প্রবাহ সংক্রান্ত ব্যাপারে কৈশিক নলের রোধও অনুরূপ সূত্র মানিয়া চলিবে। মনে রাখিতে হইবে পোয়াসোই সমীকরণ খাটিলে তবেই যৌথ রোধ এভাবে হিসাব করা চলিবে।

R_1, R_2……ইত্যাদি ব্যাসার্ধের l_1, l_2……ইত্যাদি দৈর্ঘ্যের নল শ্রেণী-সজ্জায় থাকিলে, Z_1, Z_2……যদি উহাদের রোধ এবং P_1, P_2 ……এক একটির প্রান্তীয় প্রেষবৈষম্য হয়, তাহা হইলে সবগুলি নলেই প্রবাহের হার V হওয়ায়

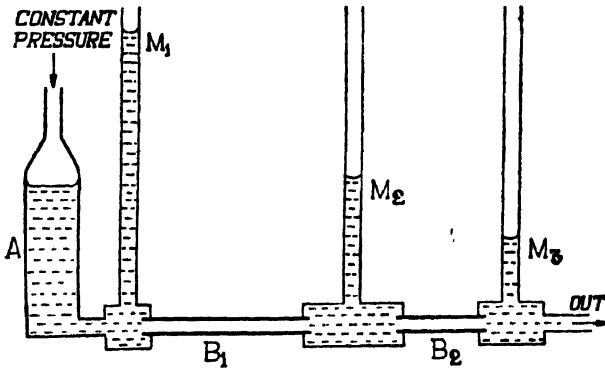
$$V=\frac{P_1}{Z_1}=\frac{P_2}{R_2}=\cdots\cdots=\frac{P_1+P_2+\cdots\cdots}{Z_1+Z_2+\cdots\cdots}=\frac{P}{Z} \qquad (11\text{-}6.17)$$

এখানে P নলগুলির দুই প্রান্তে প্রেষবৈষম্য এবং $Z=Z_1+Z_2+\cdots\cdots$ উহাদের যৌথ রোধ।

প্রশ্ন। এক মিটার লম্বা কোন নলের প্রথম অর্ধেকের ব্যাস 1 mm এবং দ্বিতীয় অর্ধেকের ব্যাস 2 mm। নল দিয়া জল শান্ত, স্থরিত গতিতে প্রবাহিত হইতেছে। উহার দুই প্রান্তে প্রেষবৈষম্য 20 cm জলের সমান। নল দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে কত জল বাহির হইবে? নলের মধ্য বিন্দুতে প্রেষ নির্গম প্রান্তের প্রেষ হইতে কত বেশী? ($\eta=0.01$ poise)

[সংকেত: এখানে 11-6.17 সমীকরণের $P=20g$। $Z=Z_1+Z_2$ হিসাব কর। $V=P/Z$ এবং $P_2=VZ_2$।]

শ্রেণীসজ্জায় দুইটি কৈশিক নল লইয়া সান্দ্রতা মাপন। ত্বরণ ও গতিশক্তির শুদ্ধির অনিশ্চয়তার জন্য কৈশিক নলে সান্দ্রতা মাপনে ত্রুটি থাকে। লম্বা সরু নলে ত্বরণজনিত শুদ্ধি প্রায় উপেক্ষণীয় হয়। গতিশক্তির জন্য শুদ্ধি অপনীত করিতে পারিলে মাপনে ত্রুটি খুব কম হয়।

দুইটি নল শ্রেণীসজ্জায় লইয়া জার্মান জাতীয় বিজ্ঞানাগারে (Reichsanstalt) গতিশক্তির জন্য শুদ্ধি অপনীত করার একটি সুষ্ঠু উপায় উদ্ভাবিত হইয়াছিল। 11.9 চিত্রে যান্ত্রিক ব্যবস্থা বুঝান হইয়াছে। পরীক্ষাধীন তরল A পাত্রে থাকে। প্রবাহে পাত্রের তরল কমিতে থাকিলে

11.9 চিত্র

উহার উপর বায়ুর চাপ বাড়াইয়া প্রেষ স্থির রাখা হয়। A-র সঙ্গে দুটি কৈশিক নল B_1 ও B_2 শ্রেণীসজ্জায় যুক্ত। M_1, M_2 ও M_3 নলে তরলের উচ্চতা h_1, h_2, h_3 মাপিয়া দুই নলের প্রান্তীয় প্রেষবৈষম্য জানা যায়। B_2 নল B_1-এর পিছনে থাকে, এবং তরল আর একটি নল দিয়া উপর দিয়া বাহির হয়। এইভাবে যন্ত্রটি অল্প পরিসর স্থানে রাখা যায়, এবং যন্ত্রের নিচের অংশ থার্মোস্ট্যাটে রাখিয়া তরলের উষ্ণতা সহজেই নিয়ন্ত্রিত করা যায়।

M_1, M_2, M_3 নলে প্রেষ P_1, P_2, P_3 হইলে

$$\text{প্রথম নলে } \eta = \frac{\pi(P_1 - P_2)R_1^4}{8Vl_1} - \frac{mV\rho}{8\pi l_1}$$

$$= \frac{\pi^2(P_1 - P_2)R_1^4 - mV^2\rho}{8\pi l_1 V} = \frac{A_1}{B_1}$$

ও দ্বিতীয় নলে $\eta = \frac{\pi^2(P_2 - P_3)R_2^4 - mV^2\rho}{8\pi l_2 V} = \frac{A_2}{B_2}$

$$\text{অতএব } \eta = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1 - A_2}{B_1 - B_2}$$

$$= \frac{\pi}{8V} \cdot \frac{(P_1 - P_2)R_1^4 - (P_2 - P_3)R_2^4}{l_1 - l_2}$$

11-8.6. গ্যাসের সান্দ্রতা। কৈশিক নলের সাহায্যে গ্যাসের সান্দ্রতাও মাপা যায়। গ্যাস সংনম্য বলিয়া সরু নলে গ্যাসের প্রবাহ আলোচনা তরল হইতে একটু পৃথক।

সরু নলে বিভিন্ন স্থানে চাপ বিভিন্ন হওয়ায় গ্যাসের ঘনত্বও বিভিন্ন হয়। কিন্তু প্রবাহের সময় নলের ভিতরে গ্যাস কোথাও জমিয়া থাকে না বলিয়া নলের যে কোন ছেদ অতিক্রম করিয়া একই সময়ে একই ভরের গ্যাস প্রবাহিত হয়। যে কোন ছেদে গ্যাসের ঘনত্ব ρ, ছেদের ক্ষেত্রফল α এবং প্রবাহের বেগ u হইলে, নলের সর্বত্র

$$\rho\alpha u = \text{স্থির রাশি}$$

হইবে। নল সুষম হইলে α স্থির। অতএব নলের বিভিন্ন ছেদে $\rho u =$ স্থির থাকিবে। ρ স্থানীয় প্রেষ P-তে গ্যাসের ঘনত্ব এবং P-র সমানুপাতিক। অতএব নলে $PV =$ স্থির রাশি হইবে। প্রেষ P প্রবেশ মুখ হইতে নির্গম মুখের দিকে ক্রমশঃ কমে এবং ρ P-র সমানুপাতিক বলিয়া উহাও কমে। অতএব নলে প্রবেশ মুখ হইতে দূরত্বের সহিত u ক্রমশঃ বাড়ে।

নলে δx দৈর্ঘ্যের অতি ক্ষুদ্র এক অংশ নেওয়া যাক। ইহার দুই পাশে প্রেষবৈষম্য δP-ও অতি সামান্য। এক্ষেত্রে δx অংশে গ্যাসের ঘনত্ব সর্বত্র সমান ধরিয়া পোয়াস্যেই সূত্র (11-6.5 সমীকরণ) প্রয়োগ করিলে পাই

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\delta P}{\delta x} \qquad (11\text{-}6.18)$$

δx-কে ক্ষুদ্র হইতেও ক্ষুদ্রতর করিয়া চলিলে $\delta P/\delta x$-এর সীমান্ত অনুপাত হইয়া দাঁড়াইবে dP/dx। x বাড়িলে P কমে বলিয়া dP/dx নিগেটিভ রাশি; ইহাকে আমরা $-dP/dx$ লিখিব।

নলের প্রবেশ মুখে প্রেষ P_1, নির্গম মুখে প্রেষ P_2 ও যে কোন ছেদে প্রেষ P, এবং ঐ সকল স্থানে প্রতি সেকেণ্ডে প্রবাহিত গ্যাসের আয়তন যথাক্রমে V_1, V_2 ও V হইলে, প্রবাহিত গ্যাসের ভর সর্বত্র সমান বলিয়া পাই

$$P_1V_1 = P_2V_2 = PV$$

অতএব লেখা যায়

$$P_1V_1 = P_2V_2 = PV = -P.\frac{\pi R^4}{8\eta}.\frac{dP}{dx}$$

$$\text{বা}\quad P_1V_1\int_0^l dx = -\frac{\pi R^4}{8\eta}\int_{P_1}^{P_2} P\,dP$$

$$\text{বা}\quad P_1V_1 = \frac{\pi R^4}{16\eta l}\left(P_1^2 - P_2^2\right) \qquad (11\text{-}6.19)$$

পোয়াসোই এবং উপরের সমীকরণ প্রতিষ্ঠায় ধরা হইয়াছে নলের দেওয়ালে সংলগ্ন প্রবাহী স্তর প্রবাহকালে দেওয়ালেই সংলগ্ন থাকে এবং সরে না। তরলের ক্ষেত্রে শান্ত প্রবাহে ইহা সত্য হইলেও নিম্নচাপ গ্যাসের ক্ষেত্রে ইহা সত্য নয় বলিয়া অনুমিত হয়, কারণ নির্গত আয়তনের পরীক্ষালব্ধ মান গণনালব্ধ মানের চেয়ে বেশী হইতে দেখা যায়। ইহার ব্যাখ্যা হিসাবে মনে করা হয় দেওয়ালে সংলগ্ন গ্যাসের স্তর স্থির না থাকিয়া প্রবাহিত হয়। এই ঘটনাকে স্তরের বিচ্ছিন্নীভবন বা 'স্লিপিং' (slipping) বলে। গ্যাসের প্রেষ কয়েক মিলিমিটার পারার অনধিক হইলে, অর্থাৎ নলের ব্যাস গ্যাসের গড় মুক্তপথের (mean free path) সঙ্গে তুলনীয় হইলে এই ক্রিয়া প্রকট হয়।

ম্যাক্স্ওয়েলের (Maxwell) মতে ইহার জন্য শুদ্ধি করিতে হইলে নলের ব্যাসার্ধ (R) গ্যাসের গড় মুক্তপথ (λ) পরিমাণ বাড়াইয়া ধরিতে হইবে, অর্থাৎ 11-6.19 সমীকরণে R^4-এর বদলে $(R+\lambda)^4$ লইতে হইবে। সাধারণ প্রেষে $R \gg \lambda$ বলিয়া $(R+\lambda)^4 = R^4(1+4\lambda/R)$ লেখা চলে।

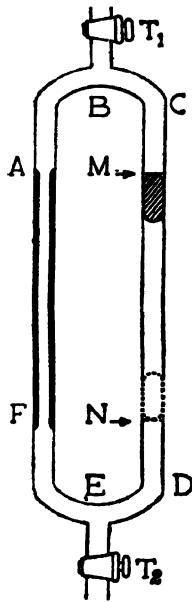
গতিশক্তির জন্য শুদ্ধি গ্যাসেও প্রযোজ্য। এই দুই শুদ্ধি প্রয়োগ করিলে পাওয়া যায়

$$\eta = \frac{\pi R^4}{16 l P_1 V_1}\left(P_1^2 - P_2^2\right)\left(1 + \frac{4\lambda}{R}\right) - \frac{P_1V_1}{8\pi l}\left(m + \ln\frac{P_1}{P_2}\right) \qquad (11\text{-}6.20)$$

এখানে m রাশিটি 11-6.8 সমীকরণের m-এর সহিত অভিন্ন।

ত্বরণের জন্য শুদ্ধি গ্যাসের ক্ষেত্রে কার্যতঃ উপেক্ষণীয়।

কৈশিক নলের সাহায্যে গ্যাসের সান্দ্রতা মাপনের নানা প্রকার উপায় উদ্ভাবিত হইয়াছে। শুদ্ধিগুলির অনিশ্চয়তার জন্য লব্ধ ফলে তরলের ন্যায় কিছু ত্রুটি থাকিয়া যায়। আমরা পরবর্তী দুইটি অনুচ্ছেদে দুইটি উপায় আলোচনা করিব।

11-6.9. র‍্যান্‌কিনের উপায়ে গ্যাসের সান্দ্রতা মাপন (Rankine's method)। র‍্যান্‌কিনের উপায়ে বিভিন্ন প্রেষে ও উষ্ণতায় গ্যাসের সান্দ্রতা মাপা যায় এবং পরীক্ষার জন্য খুব অল্প পরিমাণ গ্যাসের দরকার হয়। 11.10 চিত্রে যান্ত্রিক ব্যবস্থা বুঝান হইয়াছে। *AF* সরু কৈশিক নল। উহার দুই প্রান্ত প্রায় 2.3 মিলিমিটার ব্যাসের আর একটি নল *ABCDEF* দিয়া জোড়া। *B* ও *E*-তে সংলগ্ন T_1 ও T_2 স্টপককের সাহায্যে নলের ভিতরের বায়ু শোষণ করিয়া পরীক্ষাধীন গ্যাস ইচ্ছামত প্রেষে নলের ভিতরে ঢুকান যায়। সম্পূর্ণ নলটি থার্মোস্ট্যাটের ভিতরে রাখিয়া ইচ্ছামত উষ্ণতায় গ্যাসের সান্দ্রতা মাপা যায়।

11.10 চিত্র

মোটা নল *ABCDEF*-এর সোজা অংশে *M* ও *N* দুটি দাগ। দাগ দুটি এমনভাবে কাটা যে *ABM* অংশের আয়তন *FEN* অংশের আয়তনের সমান। নলের *CD* বাহুর ভিতরে একটুখানি পারা উহার দুই পাশের গ্যাসকে বিচ্ছিন্ন রাখে। নলের কাঠামো ঠিক খাড়া রাখিলে পারার চাপে পারার নিচের গ্যাস কৈশিক নল *FA*-র ভিতর দিয়া প্রবাহিত হইয়া পারার উপরের অংশে আসে। পারা বিন্দুর মাথা *M* অতিক্রম করা হইতে উহার নিচ *N* দাগে পৌঁছিতে যে সময় লাগে তাহার সাহায্যে সান্দ্রতা জানা যায়।

ধরা যাক $ABCDEF$ নলের আয়তন V'_3, ABM (বা FEN) অংশের আয়তন V_4, পারা ফোঁটার আয়তন V_M এবং $V'_3 - V_M = V_3$। যন্ত্র অনুভূমিক থাকিলে নলের ভিতর প্রেষ সর্বত্র সমান হইবে। এই প্রেষ p এবং একক চাপে গ্যাসের ঘনত্ব ρ হইলে, নলের ভিতরে গ্যাসের মোট ভর $p\rho V_3$ (কৈশিক নলের আয়তন V_3-র তুলনায় উপেক্ষা করা যায়।) পরীক্ষাকালে এই ভর স্থির থাকে।

মাপনের আরম্ভে ABM অংশে চাপ p_1 ও পারার নিচের অংশে চাপ P_1 ধরা যাক। পারার ওজন ω ও CD নলের প্রস্থচ্ছেদ α হইলে পারার জন্য নিচের অংশের উপর চাপ ω/α। অতএব

$$P_1 = p_1 + \omega/\alpha$$

গ্যাসের ভর স্থির বলিয়া

$$p\,\rho\,V_3 = p_1\rho V_4 + \rho(V_3 - V_4)\,(p_1 + \omega/\alpha)$$

$$\text{বা}\quad p_1 = p - \frac{\omega}{\alpha} + \frac{\omega}{\alpha}\cdot\frac{V_4}{V_3}$$

$$\text{এবং}\quad P_1 = p + \frac{\omega}{\alpha}\cdot\frac{V_4}{V_3}$$

পারার নিচের প্রান্ত N দাগে পৌঁছিলে পারার উপরে গ্যাসের প্রেষ p_2 ও নিচে P_2 হইলে

$$p_2 = p - \frac{\omega}{\alpha} + \frac{\omega}{\alpha}\cdot\frac{V_3 - V_4}{V_3} = p - \frac{\omega}{\alpha}\cdot\frac{V_4}{V_3}\,.$$

$$\text{এবং}\quad P_2 = p + \frac{\omega}{\alpha}\cdot\frac{V_3 - V_4}{V_3}$$

অতএব যে পরিমাণ গ্যাস কৈশিক নল দিয়া প্রবাহিত হইয়াছে তাহার ভর

$$P_1\rho(V_3 - V_4) - P_2\rho V_4 = \rho\,(V_3 - V_4)\left(p + \frac{\omega}{\alpha}\cdot\frac{V_4}{V_3}\right)$$

$$-\rho V_4\left(p + \frac{\omega}{\alpha}\cdot\frac{V_3 - V_4}{V_3}\right) = p\,\rho(V_3 - 2V_4)$$

এই প্রবাহে t সময় অতিক্রান্ত হইয়া থাকিলে প্রতি সেকেণ্ডে গড়ে

$$p\,\rho\,(V_3 - 2V_4)/t$$

গ্রাম গ্যাস প্রবাহিত হইয়াছে। পরীক্ষার আরম্ভে প্রতি সেকেণ্ডে V_1 আয়তন গ্যাস নলে ঢুকিলে 10-6.19 সমীকরণ অনুসারে উহার ভর

$$P_1V_1\rho=\frac{\pi R_4\rho}{16\eta l}\left(P_1{}^2-p_1{}^2\right)=\frac{\pi R^4\rho}{16\eta l}(P_1+p_1)(P_1-p_1)$$

$$=\frac{\pi R^4\rho}{16\eta l}\left(2p+\frac{2\omega}{\alpha}\cdot\frac{V_4}{V_8}-\frac{\omega}{\alpha}\right)\cdot\frac{\omega}{\alpha}$$

পরীক্ষার শেষে নলে যে হারে গ্যাস প্রবেশ করে তাহার ভর

$$=\frac{\pi R^4\rho}{16\eta l}\left(P_2{}^2-p_2{}^2\right)=\frac{\pi R^4\rho}{16\eta l}\left(2p+\frac{\omega}{\alpha}-\frac{2\omega}{\alpha}\cdot\frac{V_4}{V_8}\right)\cdot\frac{\omega}{\alpha}$$

প্রবাহের আরম্ভ হইতে শেষ পর্যন্ত প্রবাহের হার ক্রমশ কমিতে থাকে। হ্রাসের হার সুষম ধরিলে উপরের দুই হারের গড় মান $=\frac{\pi R^4\rho}{16\eta l}\cdot\frac{\omega}{\alpha}\cdot 2p$

এই গড় মানকে পূর্বলব্ধ গড় মানের সমান ধরিয়া পাই

$$\frac{p\rho(V_8-2V_4)}{t}=\frac{\pi R^4\rho}{16\eta l}\cdot\frac{\omega}{\alpha}\cdot 2p$$

$$\text{বা}\quad\frac{V_8-2V_4}{t}=\frac{\pi R^4}{16\eta l}\cdot\frac{\omega}{\alpha}\qquad(11\text{-}6.21)$$

$l, R, V_8, V_4, \alpha, \omega$ যন্ত্রের গঠন সংক্রান্ত স্থির রাশি। সুতরাং t মাপিয়া η জানা যায়। η ও l সমানুপাতিক। বিভিন্ন গ্যাসের সান্দ্রতা ইহাতে সহজেই তুলনা করা যায়।

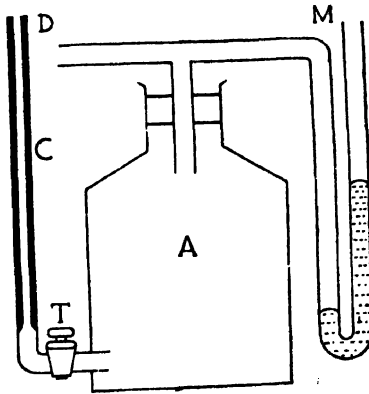
পরীক্ষায় একটি বিশেষ শুদ্ধির দরকার। পারাবিন্দু নলের গা বাহিয়া পড়িতে ঘর্ষণ জাতীয় কিছু বাধা পায়। ইহাতে পারাবিন্দুর জন্য অতিরিক্ত চাপ ω/α না হইয়া উহা অপেক্ষা কিছু কম হয়। তরলের প্রান্ত কোন কঠিনের গা বাহিয়া আগাইবার বা পিছাইবার সময় স্পর্শকোণের মান বিভিন্ন হয় (10-4.2 অনুচ্ছেদ)। আলোচ্য পারাবিন্দুতে এইরূপ ক্রিয়া দেখা যায়। স্পর্শকোণ পরিবর্তনই বাধার কারণ হইলে পারাবিন্দুকে দুভাগ করিলে বাধা দ্বিগুণ হইবে, তিন ভাগ করিলে বাধা তিন গুণ হইবে। বাধা ω/α-র f ভগ্নাংশ হইলে, একই আয়তন গ্যাস কৈশিক নলে প্রবাহিত করাইতে অভগ্ন পারাবিন্দুর যদি t_1 সময় লাগে, উহাকে দুই ভাগ করিয়া হইলে t_2 সময় এবং তিন ভাগ করিয়া লইলে যদি t_3 সময় লাগে, তাহা হইলে

$$(1-f)\,t_1=(1-2f)\,t_2=(1-3f)\,t_3$$

হইবে। ইহা হইতে f-এর মান পাওয়া যায়।

$$f=\frac{t_2-t_1}{2t_2-t_1}=\frac{t_3-t_1}{3t_3-t_1}$$

পরীক্ষায় উপরের সমীকরণ সত্য বলিয়া মনে হয়। এইভাবে f বাহির করিয়া 11-6.21 সমীকরণে ω/α-র বদলে $(\omega/\alpha)(1-f)$ লইতে হইবে।

11-6.10. স্থির আয়তনে চাপ বদলাইতে দিয়া গ্যাসের সান্দ্রতা মাপন। গ্যাসের সান্দ্রতা মাপনের আর একটি উপায়ে বদ্ধ পাত্রে গ্যাস রাখিয়া কৈশিক নলের ভিতর দিয়া উহা বায়ু মণ্ডলে বাহির হইতে দেওয়া হয়, এবং পরীক্ষার আরম্ভে ও নির্দিষ্ট সময় পরে বদ্ধ পাত্রে গ্যাসের প্রেষ দেখিয়া সান্দ্রতা মাপা হয়। ইহাতে গ্যাসের প্রেষ বায়ুমণ্ডলের প্রেষ হইতে বেশী রাখিতে হয়। বায়ুশূন্য পাত্রে গ্যাস বাহির হইতে দিয়া (এবং পাম্পের সাহায্যে উহাকে সর্বদা বায়ুশূন্য রাখিয়া) গ্যাসের সান্দ্রতা নিম্ন চাপেও এভাবে বাহির করা যায়। গ্যাসের উষ্ণতা স্থির রাখার ব্যবস্থা করা দরকার।

11.11 চিত্র

11.11 চিত্রে একটি সম্ভাব্য যান্ত্রিক ব্যবস্থার আভাস দেওয়া হইয়াছে। A পাত্রে গ্যাস p_1 চাপে থাকে। প্রেষ মান M হইতে p_1 জানা যায়। গ্যাসের উষ্ণতা স্থির হইলে T স্টপকক খুলিয়া CD কৈশিক নল দিয়া কিছুক্ষণ ধরিয়া গ্যাস বাহির হইতে দেওয়া হয়। পরে T বন্ধ করিয়া M হইতে গ্যাসের চাপ p_2 দেখা হয়।

ধরা যাক A পাত্রের আয়তন V_0। পরীক্ষাকালে কোন সময়ে গ্যাসের চাপ p ও ঐ সময়ে কৈশিক নলে গ্যাস প্রবেশের হার V_1 ধরা যায়। স্বল্প সময় dt পরে গ্যাসের চাপ $p+dp$ হইলে লেখা যায়

$$pV_0=(p+dp)(V_0+V_1dt)$$

$$\text{বা}\quad -V_0dp=pV_1dt \quad \text{বা}\quad pV_1=-V_0\frac{dp}{dt}$$

বায়ুমণ্ডলের চাপ p_o হইলে, 11-6.19 সমীকরণ অনুসারে

$$pV_1=\frac{\pi R^4}{16\,\eta l}(p^2-p_o{}^2)=k\,(p^2-p_0{}^2)\left[k=\frac{\pi R^4}{16\,\eta l}\right]$$

$$\text{অতএব}\quad -V_0\frac{dp}{dt}=k\,(p^2-p_o{}^2)$$

$$\text{বা}\quad \frac{k}{V_0}dt=-\frac{dp}{p^2-p_0{}^2}$$

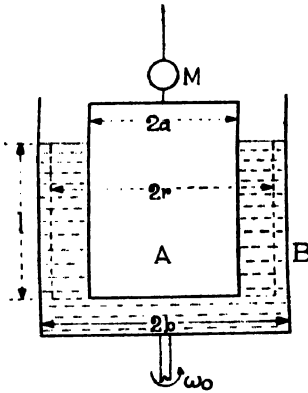
পরীক্ষার আরম্ভে চাপ p_1 এবং t সময় পরে চাপ p_2 হইলে এই দুই সীমার মধ্যে সমাকলন করিয়া পাই

$$\frac{k}{V_o}t=-\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p^2-p_0{}^2}=\frac{1}{2p_0}\int_{p_1}^{p_2}\left[\frac{1}{p+p_o}-\frac{1}{p-p_o}\right]dp$$

$$\text{বা}\quad \frac{\pi R^4}{16\,\eta l\,V_0}t=\frac{1}{2p_0}\left|\ \ln\frac{p+p_o}{p-p_o}\right|_{p_1}^{p_2}$$

$$=\frac{1}{2p_o}\ \ln\frac{p_2+p_o}{p_2-p_o}\cdot\frac{p_1-p_o}{p_1+p_o}$$

11-7. ঘুরন্ত বেলনের সাহায্যে সান্দ্রতা নির্ণয় (Rotating cylinder method of determining viscosity)। সান্দ্রতা মাপনের যতগুলি উপায় উদ্ভাবিত হইয়াছে তাহাদের মধ্যে ঘুরন্ত বেলনের সাহায্যে সান্দ্রতা মাপনই সূক্ষ্মতম এবং ইহার পাল্লাও বেশী। সান্দ্রতা বেশী হইলে কৈশিক নলে প্রবাহ মাপিয়া গুণাংক বাহির করা খুব অসুবিধার হয়। গুণাংকের নিরপেক্ষ মাপনে যতটা ত্রুটি থাকে, আপেক্ষিক মাপনে ত্রুটি তাহার চেয়ে কম হয়। বহু তরলের গুণাংক মাপন যথাসম্ভব ত্রুটি কম রাখিয়া নিষ্পন্ন হইয়াছে। খাড়া কৈশিক ভিস্কোমিটারে (11-6.6 অনুচ্ছেদ) এইরুপ কোন তরলের সহিত তুলনা করিয়া কৈশিক নলের সাহায্যে মোটামুটি 10^{-4} হইতে 10^2 পয়্‌জ্ পর্যন্ত সান্দ্রতা গুণাংক মাপা হয়।

সান্দ্রতা আরও বেশী হইলে গুণাংক মাপনে অন্যরকম ব্যবস্থা দরকার। ইহাদের একটিতে জানা মাপের দুইটি সমাক্ষ বেলন লইয়া উহাদের মধ্যবর্তী ফাঁকে তরল রাখিয়া একটি বেলনকে নির্দিষ্ট বেগে ঘুরান হয়। ইহাতে সান্দ্রতার জন্য অন্য বেলনের উপর যে টর্ক প্রযুক্ত হয় তাহা মাপিয়া তরলের সান্দ্রতা গুণাংক বাহির করা যায়। গ্যাসের সান্দ্রতা (10^{-4}P) হইতে আরম্ভ করিয়া প্রায় 10^{3}P পর্যন্ত এইরূপ ব্যবস্থায় মাপা যায়। এ জাতীয় যন্ত্রকে 'আবর্তীয় ভিস্কোমিটার' (Rotational viscometer) বলে। ভিতরের বেলন বা বাহিরের বেলন যে কোনটিকে ঘুরান চলে। বাহিরের বেলন ঘুরিলে উহাকে কুয়েৎ (Couette) জাতীয়, এবং ভিতরের বেলন ঘুরিলে উহাকে সার্ল (Searle) জাতীয় ভিস্কোমিটার বলা হয়।

11.12 চিত্র

11-7.1. আবর্তীয় ভিস্কোমিটারের তত্ত্ব নিচে আলোচনা করা হইল। 11.12 চিত্রে A ও B দুটি সমাক্ষ বেলন। ভিতরের বেলন A উহার অক্ষ বরাবর তার দিয়া ঝুলান। A-র কাছে তারের নিচ প্রান্তে ছোট একখানা আয়না M লাগান। বাহিরের বেলন B-কে ω_0 কৌণিক বেগে ঘুরান হইতে থাকে। পরীক্ষাধীন তরল দুই বেলনের মধ্যবর্তী অংশে থাকে। তরলের সান্দ্রতার জন্য ভিতরের বেলনের উপর একটি টর্ক ক্রিয়া করে। এই টর্ক তারকে মোচড়ায়। M-এর সাহায্যে মোচড় θ মাপা হয়।

ধরা যাক, ভিতরের বেলন A-র ব্যাসার্ধ a এবং বাহিরের বেলন B-র ব্যাসার্ধ b। ভিতরের বেলনের তরলে নিমজ্জিত অংশের দৈর্ঘ্য l। তরলের

ভিতরে l দৈর্ঘ্যের r ব্যাসার্ধের একটি সমাক্ষ বেলন কল্পনা কর। বাহিরের বেলনের গায়ে লাগা তরল স্তরের কৌণিক বেগ ω_0। এই বেগ কমিতে কমিতে ভিতরের বেলনের গায়ে লাগা স্তরে আসিয়া শূন্য হইয়াছে। কল্পিত বেলনের গায়ে কৌণিক বেগ ω ধরিলে, ঐ স্থানে তরল স্তরের আপেক্ষিক বেগের নতিমাত্রা $rd\omega/dr$।

কল্পিত বেলনের বাহিরের তরল বেলনের গায়ে সান্দ্রতার জন্য স্পার্শক বল প্রয়োগ করে। ইহার মান $F=$ বেলনের বাঁকা পিঠের ক্ষেত্রফল $\times\,\eta\,\times$ বেগের নতিমাত্রা।

$$\therefore \quad F=2\pi rl\eta r d\omega/dr$$

বেলনের অক্ষে এই বলে যে টর্ক প্রযুক্ত হয় তাহার মান

$$M=Fr=2\pi l\eta r^3 d\omega/dr \qquad (11\text{-}7.1)$$

কল্পিত বেলনের গতির অবস্থা যখন অপরিবর্তিত থাকে, তখন উহার উপর ক্রিয়াশীল এই টর্কের সমান ও বিপরীত অন্য টর্ক নিশ্চয়ই ক্রিয়া করিবে। মোচড়ান তার নিজের পূর্বতন অবস্থানে ফিরিয়া আসিতে চায় ও ভিতরের বেলনকেও সঙ্গে আনিতে চায়। ইহাতেই কল্পিত তরল বেলনে পূর্বোক্ত টর্কের সমান ও বিপরীত টর্ক পড়ে। বাহিরের বেলন সুষম বেগে ঘুরিতে থাকাকালের স্থায়ী অবস্থায় তারের মোচড় θ, এবং তারকে এক রেডিয়ান মোচড় দিতে টর্ক c-র দরকার হইলে

$$M=c\theta \qquad (11\text{-}7.2)$$

11-7.1 ও 11-7.2 হইতে পাই

$$c\theta=2\pi l\eta r^3 d\omega/dr \text{ বা } 2\pi l\eta d\omega=c\theta dr/r^3$$

যখন $r=a$ তখন $\omega=0$, এবং যখন $r=b$ তখন $\omega=\omega_0$। অতএব এই দুই সীমার মধ্যে শেষ সমীকরণ সমাকলন করিয়া পাই

$$2\pi l\eta\int_0^{\omega_0} d\omega=c\theta\int_a^b\frac{dr}{r^3}$$

$$\text{বা } 2\pi l\eta\omega_0=\frac{c\theta}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

$$\text{বা } \eta=\frac{c\theta}{4\pi l\omega_0}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{b^2}\right) \qquad (11\text{-}7.3)$$

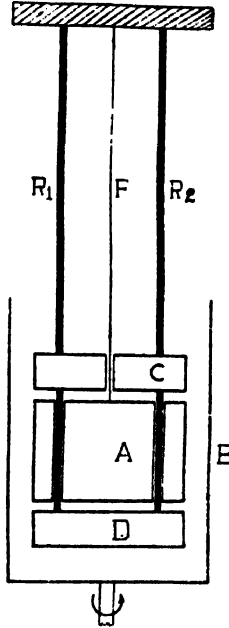
উপরের আলোচনায় ভিতরের বেলনের তলায় যে টর্ক পড়ে তাহা ধরা হয় নাই। ইহা উপেক্ষা করিলে ফলে কিছু ত্রুটি হয়। কিন্তু ইহা সহজেই

অপনীত করা যায়। দুই বেলনের মধ্যে খাড়া দূরত্ব স্থির থাকিলে বেলনের তলায় ক্রিয়াশীল টর্ক M'-এর মান স্থির থাকে। ω_0 স্থির রাখিয়া ভিতরের বেলনের ডুবান অংশের দৈর্ঘ্য একবার l_1 ও একবার l_2 করিলে

$$c\theta_1 = M_1 + M' \text{ এবং } c\theta_2 = M_2 + M'$$

$$\text{অতএব} \quad c(\theta_1 - \theta_2) = M_1 - M_2 = \frac{4\pi\eta\omega_0(l_1 - l_2)}{1/a^2 - 1/b^2}$$

(11-7.4)

বাহিরের বেলন স্থির রাখিয়া ভিতরের বেলন ω_0 বেগে ঘুরাইলে অনুরূপ আলোচনায় ঠিক এই ফলই পাওয়া যাইবে। এক্ষেত্রে নতিমাত্রা $-rd\omega/dr$, এবং যখন $r=a$ তখন $\omega=\omega_0$ ও যখন $r=b$ তখন $\omega=0$।

11.13 চিত্র

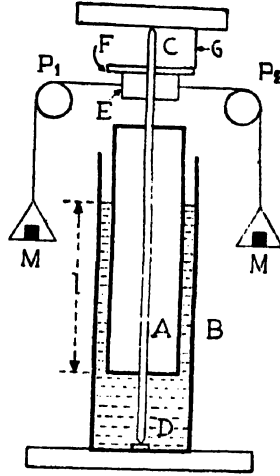
স্থির বেলনের ব্যাবর্তন দোলনের দোলনকাল দেখিয়া c বাহির করা যায়। অন্য রাশিগুলি সহজেই পরিমেয়। কাজেই এ ব্যবস্থায় η-র মান পাওয়া সহজ। 11-7.4 সমীকরণ প্রয়োগ করিয়া তরলে সঠিকভাবে η মাপা এই উপায়ে সম্ভব।

11-7.4 সমীকরণ প্রতিষ্ঠায় তরলের গতি শান্ত ও সুস্থির ধরা হইয়াছে। পরীক্ষায় দেখা যায় আবর্তনের বেগ একটা সীমা ছাড়াইলে তরলে ঘূর্ণির সৃষ্টি হয়। প্রযুক্ত বেগ ইহার কম রাখিতে হইবে। ω_0 কম থাকিলে M/ω_0 রাশিটির মান স্থির থাকে। এই অবস্থায়ই তরলের গতি শান্ত ও সুস্থির। ω_0 বাড়াইয়া চলিলে M/ω_0 রেখা ω_0-র একটা সীমা ছাড়াইবার পর বাঁকিতে থাকে। ω_0 বেশী বাড়াইলে M প্রায় $\omega_0{}^2$-এর আনুপাতিক হয়। ω_0-র যে সীমার মধ্যে M/ω_0 স্থির থাকে সেই সীমার মধ্যে পরীক্ষা করিতে হইবে।

প্রান্তীয় শুদ্ধির জন্য রক্ষী বেলন ব্যবহার। 11.12 চিত্রের ব্যবস্থায় ভিতরের বেলনের তলায় ক্রিয়াশীল টর্ক অপনীত করার একটি উপায় আগেই আলোচনা করা হইয়াছে। কেবল তরলের ক্ষেত্রেই ইহা প্রযোজ্য। ভিতরের বেলন তরলে সম্পূর্ণ ডুবিয়া থাকিলে বা গ্যাসের সান্দ্রতা মাপিতে গেলে উপরের প্রান্তের জন্যও শুদ্ধি দরকার হয়। পূর্বোক্ত ব্যবস্থায় ইহা করা যায় না।

ভিতরের বেলনের উপরে ও নীচে উহার সমান ব্যাসের দুখানা মোটা চাকতি বেলনের প্রান্ত হইতে অল্প দূরে রাখিয়া উভয় প্রান্তের শুদ্ধি অপনীত করা যায়। এই মোটা চাকতি দুখানাকে রক্ষী বেলন (Guard cylinder) বলে। 11.13 চিত্রে ইহার যান্ত্রিক ব্যবস্থা বুঝান হইয়াছে। C, D চাকতি দুখানা রক্ষী বেলন। উহারা R_1, R_2 দণ্ডে আটকান। R_1, R_2 ভিতরের বেলন A-র মধ্যের ছেঁদা দিয়া যায়। ছেঁদা একটু বড়; A ঘুরিতে R-এর গায় আটকায় না।

11-7.2. সার্লের ভিস্কোমিটার। বেশী সান্দ্র তরলের সান্দ্রতা মাপনের জন্য সার্ল তাঁহার নামীয় ভিস্কোমিটার উদ্ভাবন করেন। ইহাতে ভিতরের বেলন ঘোরে। যান্ত্রিক ব্যবস্থা 11.14 চিত্রে বুঝান হইয়াছে। A বেলন CD অক্ষে ঘুরিতে পারে। অক্ষদণ্ডের সঙ্গের লাগান মোটা বেলনাকার অংশ E ঘেরিয়া একগাছা সূতা পেঁচান। সূতার দুইদিক দুটি পুলির (pulley; P_1, P_2) উপর দিয়া ঝুলান এবং উহাদের প্রান্তে একটি করিয়া পাত্র আবদ্ধ। দুই পাত্রে সমান ভার (M) রাখিয়া অক্ষদণ্ড ঘুরান যায়। ঘূর্ণন মাপার জন্য E-র উপরে কৌণিক স্কেল কাটা একখানা চাকতি (F) থাকে। যন্ত্রের কাঠামোর গায় লাগা পিন G-র পাশ দিয়া F ঘোরে। আর একটি পিনের সাহায্যে F-কে আটকাইয়া রাখা যায়। আটকান অবস্থায় F-এর বিশেষ একটি দাগ G-র সঙ্গে মিলিয়া থাকে।

A-কে ঘেরিয়া একটি সমাক্ষ বেলন B স্থির থাকে। দুই বেলনের মধ্যের অংশে পরীক্ষাধীন তরল ঢালা হয়। দুই M দ্বারা প্রযুক্ত টর্কের ক্রিয়ায় A-কে CD অক্ষে ঘুরিতে দিলে প্রথমে A-র কৌণিক বেগ বাড়িতে থাকে। তরলের

11.14 চিত্র

সান্দ্রতা A-র ঘূর্ণনে বাধা দেয়। A-র কৌণিক বেগ বাড়িতে থাকিলে সান্দ্রতার বাধাও বাড়ে। কোন বিশেষ বেগে বাধাজনিত টর্ক প্রযুক্ত টর্কের সমান হয়। তখন কৌণিক বেগ আর বাড়ে না, এবং A বেলন সুষম কৌণিক বেগে ঘুরিতে থাকে। এই সুষম বেগ ω_0-র পর্যায়কাল T F চাকতির ঘোরা দেখিয়া মাপা হয়।

A-র ব্যাসার্ধ a, B-র ব্যাসার্ধ b, A বেলনের তরলে ডোবা অংশের দৈর্ঘ্য l, এবং A-র সুষম কৌণিক বেগ ω_0 হইলে 11-7.3 সমীকরণ অনুসারে

$$\eta = \frac{N}{4\pi l \omega_0}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

এখানে N প্রযুক্ত টর্ক। A-র অক্ষ ঘুরাইবার সূতার প্রত্যেক প্রান্তে মোট ভর m এবং E বেলনের ব্যাস d হইলে $N = mgd$। তাছাড়া $\omega_0 = 2\pi/T$। অতএব

$$\eta = \frac{gd(b^2 - a^2)}{8\pi^2 a^2 b^2} \cdot \frac{mT}{l} \qquad (11\text{-}7.5)$$

এই সমীকরণ অনুসারে l-কে ভুজ ও mT-কে কোটি লইয়া গ্রাফ আঁকিলে উহা সরলরেখা হইবে এবং রেখা গ্রাফের মূল বিন্দু দিয়া যাইবে। কিন্তু 11-7.5 সমীকরণটি পাইতে আমরা A বেলনের নিচের তলে যে টর্ক ক্রিয়া করে তাহা ধরি নাই। এই টর্কের জন্য গ্রাফ মূলবিন্দু দিয়া যায় না। উহা ভুজকে মূলবিন্দুর বাঁ দিকে ছেদ করে। মূলবিন্দু হইতে এই ছেদবিন্দুর দূরত্ব k হইলে, গ্রাফের এই আচরণ হইতে বোঝা যায় সমীকরণে আমাদের l-এর বদলে $l+k$ নিতে হইবে। ইহার অর্থ l-কে k পরিমাণ বাড়াইলে টর্ক যাহা বাড়িত, প্রান্তীয় টর্কের মান তাহার সমান

নির্দিষ্ট যন্ত্রে একবার k-র মান বাহির করিয়া লইলে

$$\eta = \frac{gd(b^2 - a^2)}{8\pi^2 a^2 b^2} \cdot \frac{mT}{l+k} \qquad (11\text{-}7.6)$$

এই সমীকরণের সাহায্যে η পাওয়া যায়। এখানেও তরলের গতি শান্ত ও স্থিরিত হইতে হইবে, অর্থাৎ পরীক্ষাকালে $mT/(l+k)$ গ্রাফের সরল রৈখিক অংশে থাকিবে।

বাহিরের বেলনের বদলে সমাক্ষ শঙ্কু ব্যবহার করিয়া যন্ত্রের পাল্লা অনেক বাড়ান যায়। এভাবে 10^3 হইতে 10^8 পয়্জ্ পর্যন্ত সান্দ্রতা গুণাংক মাপা যায়। প্রান্তীয় শুদ্ধি এক্ষেত্রে সঠিকভাবে হিসাব করা সম্ভব, কিন্তু সব সমেত গণনা একটু জটিল।

11-7.3. বায়ুর সান্দ্রতা মাপনে আবর্তীয় ভিস্কোমিটার প্রয়োগ। ইলেকট্রনের আধানের পরিমাণ সূক্ষ্মভাবে জানিতে পারা পদার্থবিজ্ঞানের একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। মিলিকান (Millikan) প্রথম সাফল্যের সঙ্গে ইহা নির্ণয় করেন (1917)। তাঁহার পাওয়া মান $e = 4.774 \times 10^{-10}$ e.s.u.। 1928 খৃষ্টাব্দে ব্যাকলিন (Backlin) অন্য উপায়ে ও সূক্ষ্মতর মাপনে পান $e = 4.80 \times 10^{-10}$ e.s.u.। উভয়ের পরীক্ষাই খুব সূক্ষ্মভাবে অনুষ্ঠিত হয়, কিন্তু তাহা সত্ত্বেও ফল দুইটি একে অন্যের মাপনের ত্রুটির সীমার বাহিরে থাকে। ইহার কারণ খুঁজিতে মিলিকান অনুমান করেন তিনি বায়ুর সান্দ্রতার যে মান লইয়াছিলেন তাহাতে কিছু ভুল ছিল। এই সন্দেহের ফলে পৃথিবীর বহু বিজ্ঞানাগারে পদার্থবিজ্ঞানীরা বিভিন্ন উপায়ে বায়ুর সান্দ্রতার মান নির্ভুলভাবে মাপিতে চেষ্টা করেন। মাপনে মিলিকানের সন্দেহই সমর্থিত হয় (1936)।

বায়ুর সান্দ্রতা মাপনে উপরোক্ত উদ্দেশ্যে যে সকল উপায় অবলম্বিত হইয়াছিল তাহাদের মধ্যে আবর্তীয় ভিস্কোমিটারের প্রয়োগই শ্রেষ্ঠ বলিয়া

বিবেচিত হয়। ইহাতে মাপনের ত্রুটি সবচেয়ে কম করা যায়। ভিতরের বেলন স্থির রাখিয়া বা বাহিরের বেলন স্থির রাখিয়া উভয়ভাবেই সান্দ্রতা মাপা হয়। উভয় ক্ষেত্রেই প্রান্তীয় শুদ্ধির জন্য রক্ষীবেলন ব্যবহার করা হয়। ইহাদের মধ্যে বেয়ার্ডেনের (Bearden) যান্ত্রিক ব্যবস্থা গঠন ও ব্যবহারে সবচেয়ে সরল ও সুষ্ঠু।

বেয়ার্ডেনের যন্ত্রে ভিতরের বেলন ফাঁপা এবং উহার উভয় প্রান্ত বন্ধ। নিজ অক্ষে উহাকে বিদ্যুচ্চুম্বকীয় উপায়ে সুষম কৌণিক বেগে ঘুরান হয়। বাহিরের বেলন লম্বায় ভিতরের বেলনের চেয়ে অনেক খাট। ইহার দুই প্রান্তে সমাক্ষ দুটি রক্ষীবেলনের সাহায্যে প্রান্তীয় শুদ্ধি অপনীত করা হয়। বাহিরের বেলনের দৈর্ঘ্য (l) উহার নিজ দৈর্ঘ্য + রক্ষীবেলন হইতে উহার দূরত্বের অর্ধেক। সম্পূর্ণ যন্ত্রটি অন্য এক আধারে রাখা। আধার হইতে বায়ু নিষ্কাশন করিয়া পরীক্ষাধীন যে কোন গ্যাস বা বায়ু ইচ্ছাধীন চাপে ইহাতে ভরা যায়। মাপনে 11-7.3 সমীকরণ প্রযোজ্য।

11-8. পড়ন্ত বস্তুর সাহায্যে সান্দ্রতা মাপন (Falling-body viscometers)। বেশী সান্দ্র পদার্থের ভিতর দিয়া কোন বস্তু পড়িতে দিলে অল্পক্ষণেই উহার বেগ একটা সীমায় আসিয়া যায়। ইহাকে 'সীমান্ত বেগ' (Terminal velocity) বলে। সীমান্ত বেগ মাপিয়া সান্দ্রতা হিসাব করা যায়। এ উদ্দেশ্যে সাধারণতঃ গোলক ব্যবহার করা হয়; বেলনের ব্যবহারও প্রচলিত আছে। যথেষ্ট সতর্কতার সহিত পরীক্ষা করিলে ত্রুটি $0.5°/_{\circ}$-এর অনধিক থাকে। বেলনের সাহায্যে 10^4 P হইতে 10^{10} P সান্দ্রতা মাপা যায়।

11-8.1. পড়ন্ত বস্তুর উপর সান্দ্রতার প্রভাব। তরলে কোন ভারী বস্তু উপর হইতে ছাড়িয়া দিলে উহা অভীকর্ষীয় টানে পড়িতে থাকে। বেগ বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে তরলের সান্দ্রতার জন্য গতির বিপরীতে একটি বল সক্রিয় হইয়া ওঠে। আসঞ্জনের জন্য বস্তুতে সংলগ্ন তরল স্তর বস্তুটির সহিতই চলিতে থাকে। কিন্তু অদূরের তরল স্থির থাকায় বস্তুটির কাছাকাছি তরল স্তর-গুলির মধ্যে আপেক্ষিক বেগ আসিয়া যায়। পড়ন্ত বস্তুর বেগ যেমন বাড়ে তরল স্তরের আপেক্ষিক বেগের নতিমাত্রাও তেমন বাড়ে। শান্ত গতিতে সান্দ্রতাজনিত বল এই নতিমাত্রার সমানুপাতিক। কাজেই বস্তুটির বেগ যেমন বাড়ে, বাধাও তেমন বাড়ে। বাধা F এবং বস্তুটির ওজন mg হইলে, বস্তুর উপর মোট বল হয় $mg-F$। বেগ বৃদ্ধির সঙ্গে F বাড়িয়া mg-র সমান হইলে বস্তুটির বেগ আর বাড়ে না। তখন যে বেগে $F=mg$ হইয়াছিল সেই বেগ লইয়াই বস্তুটি পড়িতে থাকে। ইহাই বস্তুটির সীমান্ত বেগ।

গ্যাসের ভিতর দিয়াও কোনরূপ বস্তু পড়িতে অনুরূপ ক্রিয়া হয়। কিন্তু গ্যাসের সান্দ্রতা খুব কম বলিয়া অনেক দূর না পড়িলে বস্তু উহার সীমান্ত বেগ পায় না। বায়ুমণ্ডলের গভীরতা অনেক বলিয়া বায়ুতে উপরোক্ত ক্রিয়া দেখা সহজ। তবে ক্ষেত্র বিশেষে অল্প পরিমাণ গ্যাসেও ইহা দেখা সম্ভব।

11-8.2. সান্দ্র পদার্থের ভিতর দিয়া বস্তুর পতনে গণিতের প্রয়োগ। সান্দ্র পদার্থের ভিতর দিয়া পড়ন্ত বস্তুর গতির প্রকৃতি গণিতের সাহায্যে সহজেই আলোচনা করা যায়। বেগ কম থাকিলে গতির বাধা বেগের সমানুপাতিক ধরা যায়। পড়ন্ত বস্তুটি আবর্তিত হইতে না থাকিলে উহার গতির সমীকরণ হইবে

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-F=mg-a\frac{dx}{dt}$$

বা $$\frac{dv}{dt}=g-kv \qquad \left[k=\frac{a}{m}\right]$$

বা $$\frac{dv}{g-kv}=dt$$

ইহার সমাকলনে পাই

$$-\frac{1}{k}\ln(g-kv)=t+C_1$$

যখন $t=0$ তখন $v=0$। অতএব $C_1=-\frac{1}{k}\ln g$

$$\therefore \quad \frac{1}{k}\ln(g-kv)=-t+\frac{1}{k}\ln g$$

বা $\ln\frac{g-kv}{g}=-kt$ বা $\frac{g-kv}{g}=e^{-kt}$

অর্থাৎ $$v=\frac{g}{k}(1-e^{-kt}) \qquad (11\text{-}8.1)$$

kt যথেষ্ট বড় হইলে $e^{-kt} \ll 1$ হয়। তখন $v=u=g/k$। ইহাই পড়ন্ত বস্তুর বেগের চরম মান; ইহাকেই সীমান্ত বেগ বলে।

x-এর সহিত t-র সম্পর্ক পাইতে উপরের সমীকরণ হইতে লেখা যায়

$$dx = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})\,dt$$

বা $$x = \frac{g}{k}\left(t + \frac{1}{k}e^{-kt}\right) + C_2$$

$t = 0$ হইলে $x = 0$। অতএব $C_2 = -\frac{g}{k^2}$

$$\therefore \; x = \frac{g}{k^2}(kt + e^{-kt} - 1) \qquad (11\text{-}8.2)$$

11-8.3. সান্দ্র পদার্থে গোলকের সীমান্ত বেগ—স্টোক্‌স্ সূত্র (Terminal velocity of a sphere : Stokes' law)। প্রবহমান তরলে (বা গ্যাসে) কোন বস্তু স্থির রাখিলে বস্তুর পাশ দিয়া প্রবাহিত তরলের (বা গ্যাসের) গতি শান্ত বা অশান্ত হইতে পারে। বিকল্পে, তরল স্থির রাখিয়া কোন বস্তু উহার মধ্য দিয়া চলিতে দিলে বস্তুর পাশের তরলের প্রবাহ শান্ত বা অশান্ত হইতে পারে। এ দুই ক্ষেত্রে কোন প্রভেদ নাই, কারণ বস্তু ও তরলের আপেক্ষিক গতিই বিচার্য। দর্শক সাপেক্ষে কোন্‌টি সচল কোন্‌টি স্থির তাহাতে কিছু আসে যায় না।

কোন তরলের ভিতর দিয়া শান্ত প্রবাহে একটি গোলক পড়িতে থাকিলে সান্দ্রতার জন্য গোলকের বেগ ক্রমে সীমান্ত বেগ u-তে পৌঁছিবে। এই অবস্থায় গোলকের উপর গতিবিরোধী বল F_u গোলকের ব্যাসার্ধ r, তরলের সান্দ্রতা η, ঘনত্ব ρ ও সীমান্ত বেগ u-র উপর নির্ভর করে বলিয়া ধরিলে লেখা যায়

$$F_u = k r^x \eta^y u^z \rho^w$$

এখানে k একটি সংখ্যা মাত্র। এই সমীকরণে দুইদিকের মাত্রা সমান হইবে। অতএব

$$MLT^{-2} = L^x(ML^{-1}T^{-1})^y\,(LT^{-1})^z\,(ML^{-3})^w$$

M-এর মাত্রা হইতে পাই $\quad 1 = y + w$

L-এর মাত্রা হইতে পাই $\quad 1 = x - y + z - 3w$

T-এর মাত্রা হইতে পাই $\quad -2 = -y - z$

এই সমীকরণ তিনটি হইতে পাই $F_u = k(ru\rho/\eta)^w\, r\eta u$। $ru\rho/\eta$ মাত্রাবিহীন

রাশি, অর্থাৎ উহা একটি সংখ্যা। অতএব $(ru\rho/\eta)^w$-কে k-র সঙ্গে নিয়া $k(ru\rho/\eta)^w$-কে k' রূপে লিখিলে পাই

$$F_u = k'r\eta u.*$$

তরলের গতিবিজ্ঞানের (hydrodynamics) সাহায্যে স্টোক্‌স্ প্রমাণ করেন যে তরল সীমাহীন ও গতি শান্ত হইলে $k' = 6\pi$। (ইহার প্রমাণ আমাদের গণ্ডীর বাহিরে।) অতএব

$$F_u = 6\pi\eta r v \tag{11-8.3}$$

এই সমীকরণকে স্টোক্‌স্ সূত্র বলে।

গোলকের ঘনত্ব ρ এবং তরলের ঘনত্ব σ হইলে, গোলকের আপাত ওজন $\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \sigma)g$। সীমান্ত বেগে বিরোধী বল F_u ইহার সমান। অতএব

$$6\pi\eta r u = \tfrac{4}{3}\pi r^3(\rho - \sigma)g$$

$$\text{বা } u = \frac{2g}{9\eta} r^2(\rho - \sigma) \tag{11-8.4}$$

$$\text{এবং } \eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{g}{u} r^2(\rho - \sigma) \tag{11-8.5}$$

11-8.2 অনুচ্ছেদে দেখা গিয়াছে $u = g/k = mg/a$। a রাশিটি একক বেগে সান্দ্রতার বাধা। 11-8.4 সমীকরণের সহিত তুলনা করিয়া দেখা যায় গোলকের ক্ষেত্রে $a = 6\pi\eta r$। স্টোক্‌স্ সূত্র হইতে সোজাসুজিও ইহা বলা যায়।

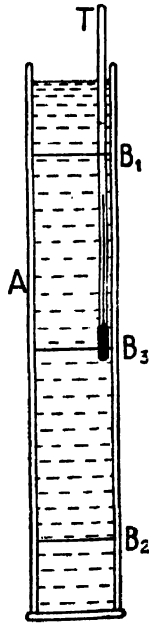
11-8.4. পড়ন্ত গোলকের সাহায্যে সান্দ্রতা মাপন। সান্দ্র পদার্থে পড়ন্ত গোলকের সীমান্ত বেগ মাপিয়া 11-8.5 সমীকরণের সাহায্যে সান্দ্রতা গুণাংক বাহির করা যায়। ঐ সমীকরণ প্রতিষ্ঠায় ধরা হইয়াছে তরল সীমাহীন। পরীক্ষার সময় তরল সাধারণতঃ বেলনাকার পাত্রে নেওয়া হয়। কাজেই তরল সীমাহীন নয়। পাত্রের দেওয়াল ও পাত্রের সসীম গভীরতার জন্য সমীকরণে শুদ্ধি দরকার হয়।

ফ্যাক্সেন (Faxén) দেখাইয়াছেন যে পাত্রের ব্যাস D ও গোলকের ব্যাস d হইলে শুদ্ধ সমীকরণ হইবে

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{g}{u} r^2(\rho - \sigma)\phi \; ; \tag{11-8.6}$$

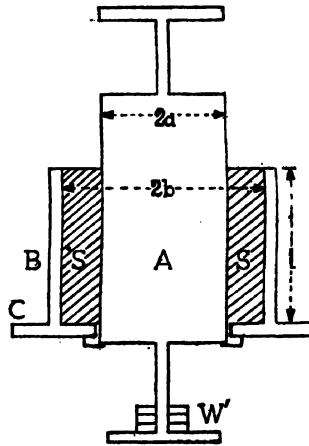
* k' সকল ক্ষেত্রে একই সংখ্যা নয়। মাত্রীয় বিশ্লেষণের π-সূত্র অনুসারে (1-6 বিভাগ) $F_u/ru\eta = \phi\,(ru\rho/\eta)$। ϕ বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন হইবে; কিন্তু ইহা সংখ্যামাত্র। এই সংখ্যাকেই k' বলা হইয়াছে।

এখানে $\phi = 1 - 2{\cdot}104\frac{d}{D} + 2{\cdot}09\left(\frac{d}{D}\right)^3 - 0{\cdot}95\left(\frac{d}{D}\right)^5$

গভীরতা h হইলে লেডেনবার্গের (Ladenburg) মতে উপরের সমীকরণের ডান দিক $(1-1{\cdot}6d/h)$ দিয়া গুণ করিতে হইবে ; ইহাই সসীম গভীরতার শুদ্ধি। অধিকাংশ পরীক্ষায় d/h 10^{-3} অপেক্ষা ছোট হয় বলিয়া গভীরতার শুদ্ধি উপেক্ষা করা যায়। পড়ন্ত বস্তুটির আকার যথার্থ গোলকের আকার হইতে সামান্য বিচ্যুত হইলেও ত্রুটি 10^{-3} হইতে অনেক বেশী হয়। তাছাড়া, গতি শান্ত থাকিতে হইবে, অর্থাৎ সীমান্ত বেগ বেশী হইলে চলিবে না। এই কারণে কম সান্দ্রতার পদার্থে খুব ছোট গোলক ব্যবহার করিতে হয় ; গোলকের ঘনত্বও কম হওয়া ভাল। উডের বা রোজের সংকর ধাতু (Wood's metal বা Rose's metal) গলাইয়া জলে ঢালিয়া দিলে খুব ছোট ছোট গোলক পাওয়া যায়। এই সংকর ধাতুগুলির গলনাংক 100°C-র কাছাকাছি এবং ইহাদের ঘনত্ব কম।

11.15 চিত্র

11.15 চিত্রে পড়ন্ত গোলকের সাহায্যে সান্দ্রতা মাপনের যান্ত্রিক ব্যবস্থা বুঝান হইয়াছে। A পাত্রে পরীক্ষণীয় তরল নেওয়া হয়। জল, তেল

ইত্যাদির ক্ষেত্রে উহা 70 cm উঁচু, এবং ব্যাসে প্রায় 10 cm। A-র গায় উপর ও নিচ হইতে 10 cm দূরে B_1, B_2 দুইটি দাগ কাটা আছে। তৃতীয় দাগ B_3 ঐ দুই দাগের ঠিক মাঝখানে। প্রায় এক মিলিমিটার ব্যাসের একটি গোলক তরলে ভিজাইয়া তরল স্তম্ভের উপরে মাঝখানে উহাকে আস্তে ছাড়িয়া দেওয়া হয়, এবং B_1B_3 ও B_3B_2 দূরত্ব অতিক্রম করিতে উহা একই সময় নেয় কিনা দেখা হয়। সময় একই হইলে বোঝা যায় B_1-এ পৌঁছিতে উহা সীমান্ত বেগ পাইয়াছে। না হইলে আরও ছোট গোলক লইয়া পরীক্ষা করিতে হয়। এ বিষয়ে নিশ্চিত হইয়া বিভিন্ন ব্যাসের গোলক লইয়া দেখিতে হয় কোন্‌টি কতক্ষণে B_1B_2 দূরত্ব অতিক্রম করে। ইহা হইতে ঐ গোলকের সীমান্ত বেগ পাওয়া যায়। সময় t এবং B_1B_2 দূরত্ব l হইলে $u=l/t$। 11-8.6 সমীকরণ হইতে তখন পাই

$$\eta=\frac{2g}{9l}(\rho-\sigma)r^2t\,\phi \qquad (11\text{-}8.7)$$

11.16 চিত্র

নির্দিষ্ট গোলক ও তরলে, নির্দিষ্ট পাত্রে স্থির উষ্ণতায় $r^2t\phi$ রাশিটির মান স্থির থাকিবে। একদিকে $r^2\phi$ ও অন্যদিকে $1/t$ লইয়া গ্রাফ আঁকিলে উহা যদি সরলরেখা হয় তাহা হইলে বোঝা যাইবে 11-8.6 সমীকরণের শর্তগুলি পালিত হইয়াছে। গ্রাফের উপরস্থ কোন বিন্দুর $r^2\phi$ ও t-র মান লইয়া ও অন্য রাশিগুলি মাপিয়া η হিসাব করা যায়।

তরলে, বিশেষ করিয়া তেলে, উষ্ণতার অল্প পরিবর্তনেই সান্দ্রতার

উল্লেখযোগ্য পরিবর্তন হয়। এজন্য পরীক্ষার সময় উষ্ণতা যাহাতে 0·1°C-এর বেশী না বদলায় সে বিষয়ে ব্যবস্থা করিতে হইবে।

11-8-5. পড়ন্ত বেলনের সাহায্যে সান্দ্রতা নির্ণয়। সান্দ্রতা খুব বেশী হইলে (10^4P – 10^{10}P) এই উপায় প্রয়োগ করা যায়। 11.16 চিত্রে ইহার যান্ত্রিক ব্যবস্থা দেখান হইয়াছে। A ও B সমাক্ষ খাড়া বেলন। C ভূমিতে B আটকান থাকে। A-কে ক্লিপের সাহায্যে C-র সঙ্গে দরকার মত আটকাইয়া রাখা যায়। A-র নিচে ইচ্ছামত ভার W' চাপাইবার ব্যবস্থা আছে। A ও B-র মাঝখানে পরীক্ষাধীন পদার্থ (S) থাকে। A-কে C হইতে মুক্ত করিলে A ও উহার সঙ্গে যুক্ত W' ভারের ক্রিয়ায় A নামিতে থাকে এবং গতিতে সান্দ্রতাজনিত বাধা পায়। পরীক্ষণীয় পদার্থ খুব সান্দ্র বলিয়া অল্প একটু নামিতেই A সীমান্ত বেগে পৌঁছায়। ইহা মাপিয়া সান্দ্রতা পাওয়া যায়।

পরীক্ষার তত্ত্ব নিম্নরূপ। A ও B-র ব্যাসার্ধ যথাক্রমে a ও b এবং পরীক্ষাধীন পদার্থের বেলনাকার স্তম্ভের উচ্চতা l ধরা যাক। A-কে ঘেরিয়া উহার সমাক্ষ r ব্যাসার্ধের ($a<r<b$) অংশের উপর খাড়া বলগুলি দেখা যাক। A এবং W'-এর মোট ওজন $W=Mg$ নিচমুখী। ইহা ছাড়া পরীক্ষাধীন পদার্থের বেলনাকার খোলক অংশের ভারও নিচের দিকে ক্রিয়া করে। এই ভার $\pi(r^2-a^2)l\rho g=mg$-কে C বহন করে। সান্দ্র পদার্থে বেলনাকার বিভিন্ন স্তরের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ আছে। কল্পিত বেলনের পৃষ্ঠে আপেক্ষিক বেগের নতিমাত্রা $-dv/dr$ ধরা যাক। তাহা হইলে, কল্পিত বেলনের বাঁকা পিঠে সান্দ্রতাজনিত গতিবিরোধী ঊর্ধ্বমুখী বল $2\pi rl\eta dv/dr$। A বেলন বিনা ত্বরণে নামিতেছে বলিয়া এই বল Mg-র সমান অর্থাৎ

$$-2\pi rl\eta dv/dr=Mg$$

বা $$-2\pi l\eta dv=Mg\,\frac{dr}{r}$$

$r=a$ হইলে $v=u=$ সীমান্ত বেগ। $r=b$ হইলে $v=0$; অতএব এই দুই সীমার মধ্যে উপরের সমীকরণ সমাকলন করিয়া পাই

$$-\int_{u}^{0} 2\pi l\eta dv=Mg\int_{a}^{b}\frac{dr}{r}$$

বা $$2\pi l\eta u=Mg\ln(b/a) \qquad (11\text{-}8\text{-}8)$$

ইহা হইতে η পাওয়া যায়।

কার্যকালে W'-এর মান এমন নেওয়া হয় যাহাতে সীমান্ত বেগ প্রায় 1 cm/min হয় !

11-9. সান্দ্রতার উপর উষ্ণতা ও চাপের ক্রিয়া। তরলে ও গ্যাসে সান্দ্রতার উপর উষ্ণতার বা চাপের ক্রিয়া একরকম নয়। নিচে উহাদের আলাদা আলাদা আলোচনা করা হইল।

(১) তরলে উষ্ণতার ক্রিয়া। তরলে সান্দ্রতার উপর উষ্ণতার ক্রিয়া খুব প্রকট ! 25°C-তে জলের সান্দ্রতা 0·89 cP (centipoise) ; 40°C-তে উহা 0·65। রেড়ির তেলের উষ্ণতা 10°C হইতে 20°C-তে উঠিলে সান্দ্রতা 24 P হইতে 10 P-তে নামে। কাজেই তরলে উষ্ণতা না বলিয়া সান্দ্রতা উল্লেখ করা প্রায় অর্থহীন।

তরলে সান্দ্রতা ও উষ্ণতার সম্পর্ক জটিল। উষ্ণতার যে সীমার মধ্যে কোন পদার্থ তরল অবস্থায় থাকে সেই সীমার মধ্যে উষ্ণতার সহিত η-র সম্পর্ক সুষ্ঠু একটি কোন সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় না। উষ্ণতার অল্প সীমার মধ্যে

$$\eta_t = \frac{\eta_0}{1+at+bt^2}, \log \eta = a + \frac{b}{T},$$

$$\eta_t \quad \frac{A}{(1+Bt)C}$$

প্রভৃতি প্রায়োগিক (empirical) সমীকরণ প্রস্তাবিত হইয়াছে। নির্দিষ্ট তরলে a, b, A, B, C স্থির মান ; η_0 ও η_t 0°C ও t°C-তে উহার সান্দ্রতা গুণাংক। কিন্তু ইহার কোনটিই উষ্ণতার পুরা পাল্লায় খাটে না। এখানে বলা যায় দুই রাশির মধ্যে সম্পর্ক যত বেশী সংখ্যক স্থির রাশির সাহায্যে প্রকাশিত হইবে সম্পর্কও তত ব্যাপক পাল্লায় খাটিবে। উপরের প্রথম দুইটি সম্পর্কে দুইটি স্থির রাশি ; তৃতীয়টিতে তিনটি স্থির রাশি। এজন্য পরেরটি প্রয়োগের পাল্লা ব্যাপকতর হইবে। দ্বিতীয় সমীকরণটি অনেক ক্ষেত্রে ভালভাবে খাটিতে দেখা যায়। স্থির রাশির সংখ্যা যত বেশী হয়, সম্পর্ক প্রয়োগে তত অসুবিধা হইবে।

অ্যাণ্ড্রেড (Andrade) তরলের সান্দ্রতার একটি তত্ত্ব উদ্ভাবন করেন। এই তত্ত্ব অনুসারে সান্দ্রতা ও উষ্ণতার সম্পর্ক হইবে।

$$\frac{\eta}{\rho^{\frac{1}{3}}} = A \exp c\rho/T$$

এখানে ρ = তরলের ঘনত্ব, A ও c নির্দিষ্ট তরলে স্থির রাশি এবং T°K

উহার উষ্ণতা। জল ও কতকগুলি কোহল ছাড়া অনেক তরলে এ সম্পর্ক খাটে। ইহার সহিত উপরের দ্বিতীয় সম্পর্কের মিল আছে।

(২) **তরলে চাপের ক্রিয়া।** এ সম্পর্কও জটিল। সাধারণতঃ চাপ বৃদ্ধিতে সান্দ্রতা দ্রুত বাড়ে। কিন্তু যে তরলের সান্দ্রতা কম তাহার ক্ষেত্রে এ বৃদ্ধিও কম। 20°C-তে ইথারে চাপ 500 atmos বাড়াইলে η মাত্র 60% বাড়ে। জলের আচরণ অন্যরূপ। জলের ক্ষেত্রে 0°C-র কাছাকাছি উষ্ণতায় চাপ বাড়াইতে থাকিলে সান্দ্রতা প্রথমে কমিয়া তাহার পর বাড়িতে থাকে। কিন্তু ঘরের উষ্ণতায় চাপের সঙ্গে সান্দ্রতা প্রথম হইতেই বাড়ে।

যে সকল তরলের সান্দ্রতা বেশী, চাপ বাড়াইলে তাহাদের সান্দ্রতা দ্রুত বাড়ে।

(৩) **গ্যাসে উষ্ণতার ক্রিয়া।** উষ্ণতা বাড়িলে গ্যাসের সান্দ্রতা বাড়ে। এ আচরণ তরলের বিপরীত। গ্যাসের গতীয়-তত্ত্বের (Kinetic theory of gases) সরল প্রয়োগে দেখা যায় η নিরপেক্ষ উষ্ণতা T-র বর্গমূলের আনুপাতিক হইবে। কিন্তু ইহা বিশেষ খাটে না। গ্যাস অণুর কার্যকর ব্যাস উষ্ণতার উপর বিশেষ একভাবে [$\sigma^2=\sigma_\infty^2(1+k/T)$] নির্ভর করে ইহা ধরিয়া লইয়া সাদারল্যাণ্ড (Sutherland) গ্যাসের গতীয়-তত্ত্বের সাহায্যে নিচের সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠা করেন ঃ

$$\frac{\eta_t}{\eta_0}=\frac{273+C}{T+C}\left[\frac{T}{273}\right]^{\frac{3}{2}}$$

এখানে η_0 ও η_t যথাক্রমে 0°C ও t°C-তে গ্যাসের সান্দ্রতা গুণাঙ্ক, T নিরপেক্ষ উষ্ণতা $=273+t$ এবং C রাশিটি নির্দিষ্ট গ্যাসে স্থির রাশি। C-কে সাদারল্যাণ্ডের স্থিরাংক (Sutherland's constant) বলে। সাধারণ উষ্ণতায় পরীক্ষার সঙ্গে সাদারল্যাণ্ড সমীকরণের ভাল মিল পাওয়া যায়, কিন্তু খুব কম ও বেশী উষ্ণতায় ব্যতিক্রম বাড়ে।

(৪) **গ্যাসে চাপের ক্রিয়া।** গ্যাসের গতীয়তত্ত্ব (Kinetic theory of gases) হইতে দেখা যায় সান্দ্রতা চাপের উপর নির্ভর করে না। চাপের অনেকখানি পাল্লার মধ্যে ইহা খাটিতে দেখা যায়। গ্যাসের গড় মুক্তপথ উহার আধারের মাপের চেয়ে বড় হইলে সান্দ্রতা চাপের সমানুপাতিক হয় এবং চাপ কমিলে সান্দ্রতা কমে। বেশী চাপে গ্যাস অণুগুলির মধ্যে আকর্ষণ অনুভাব্য হইলে সান্দ্রতা বাড়ে। এই দুই সীমার মধ্যে সান্দ্রতা কার্যতঃ চাপ নিরপেক্ষ। সান্দ্রতা কমিবার বা বাড়িবার চাপের সীমা গ্যাসের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে।

উষ্ণতার সহিত গ্যাস ও তরলে সান্দ্রতা পরিবর্তনের বৈপরীত্য দেখিয়া বোঝা যায় গ্যাসে ও তরলে সান্দ্রতার কারণ এক নয়। কণার গতীয় তত্ত্ব হইতে গ্যাসের সান্দ্রতার ব্যাখ্যা পাওয়া যায়। গ্যাস অণুগুলির সর্বমুখী গতির জন্য দ্রুততর স্তর হইতে অণু বেশী ভরবেগ বহন করিয়া মন্থর স্তরের অণুর সহিত ধাক্কা খাইয়া মন্থর স্তরের ভরবেগ বাড়ায়। মন্থর স্তরের অণু দ্রুততর স্তরে কম ভরবেগ লইয়া ঐ স্তরের অংশীভূত হওয়ায়, দ্রুততর স্তরের ভরবেগ কমে। ইহার ফলেই দুই স্তরের আপেক্ষিক বেগ কমে।

তরলে এরূপ ক্রিয়া হইলে উষ্ণতার সহিত সান্দ্রতা পরিবর্তন গ্যাসের মতই হইত। কিন্তু তরলের আচরণ গ্যাসের বিপরীত বলিয়া দুই স্তরের মধ্যে ভরবেগ আদান-প্রদানের প্রক্রিয়া নিশ্চয়ই অন্যরূপ। বিভিন্ন প্রক্রিয়া ধরিয়া তরলে সান্দ্রতা ও উষ্ণতার সম্পর্ক পাইবার একাধিক চেষ্টা হইয়াছে। ইহাদের মধ্যে অ্যাণ্ড্রেডের চেষ্টা উল্লেখযোগ্য। তাঁহার সম্পর্কের কথা আগেই বলা হইয়াছে। তরল অবস্থার তত্ত্ব (Theory of the liquid state) দৃঢ়ভিত্তির উপর স্থাপনের চেষ্টা এ পর্যন্ত বিশেষ ফলপ্রসূ হয় নাই। তরলে সান্দ্রতার নানাবিধ ব্যাখ্যা হইয়া থাকিলেও উহার কোনটিই বিভিন্ন তরলে উষ্ণতা ও চাপের সহিত সান্দ্রতা পরিবর্তনের ব্যাখ্যা এক সঙ্গে দিতে পারে না। এই সকল কারণে এবং জটিলতা বেশী বলিয়া তরলে সান্দ্রতার কোন ব্যাখ্যা আমরা আলোচনা করিব না।

প্রশ্ন

1. শান্ত ও বিক্ষুব্ধ প্রবাহ কাহাকে বলে বুঝাইয়া বল। রেনল্ডস সংখ্যা কি? উহার সাহায্যে প্রবাহ শান্ত কি বিক্ষুব্ধ কিভাবে ঠিক করা যায়?

3 mm ব্যাসের নল দিয়া জল 50 cm/s বেগে বহিতেছে। জলের $\eta = 1$ centipoise হইলে প্রবাহের রেনল্ডস সংখ্যা কত এবং প্রকৃতি শান্ত কি বিক্ষুব্ধ? [উত্তর : 1500 ; শান্ত]

2. স্তরিত প্রবাহ কি প্রকার? স্তরিত প্রবাহে বিভিন্ন স্তরে আপেক্ষিক বেগ থাকিলে, কোন স্তরের উপর সান্দ্রতাজনিত বল কিভাবে ক্রিয়া করে বুঝাও। বেগের নতিমাত্রা ও সান্দ্রতার গুণাংক কাহাকে বলে? Poise-এর সংজ্ঞা দাও। উহাকে কি কারণে 1 $g/cm^{-1}s^{-1}$ বলা যায়?

নিউটনীয় ও অনিউটনীয় তরলে প্রভেদ কি প্রকার? শেষোক্ত তরলের উদাহরণ দাও।

3. সরু নলে তরলের প্রবাহ মাপিয়া কি করিয়া তরলের সান্দ্রতা জানা যায় তত্ত্ব বুঝাইয়া তাহার পরীক্ষা বর্ণনা কর।

4. পোয়াসোইর সমীকরণ প্রতিষ্ঠা কর এবং কি কি শর্ত পালিত হইলে ইহা খাটিবে বল।

এই সমীকরণ প্রয়োগ করিয়া সান্দ্রতা পাইতে কি কি শুদ্ধির দরকার? গতি-শক্তিজনিত শুদ্ধির মান নির্ণয় কর।

5. খাড়া কৈশিক নলে তরলের প্রবাহ মাপিয়া কিভাবে তরলের সান্দ্রতা বাহির করা যায় তত্ত্বসমেত বুঝাইয়া বল।

প্রবাহের সহিত তরলের লেভ্‌ল্ যদি পড়িতে দেওয়া হয় তাহা হইলে সান্দ্রতার সমীকরণ কি হইবে?

6. অসোয়াল্ডের ভিস্কোমিটার বর্ণনা কর। উহার সাহায্যে তরলের সান্দ্রতা কিভাবে তুলনা করা যায় তত্ত্বসমেত বুঝাইয়া বল।

শুদ্ধগতীয় সান্দ্রতা কাহাকে বলে? উহার মাত্রা কি? উহার সিজিএস এককের নাম কি? কোন্ অবস্থায় উহা তরলের পতনকালের সমানুপাতিক হয় বুঝাইয়া বল।

7. পোয়াসোই সমীকরণের সঙ্গে ওহ্‌ম্ সূত্রের কি মিল আছে দেখাও। শ্রেণী-সজ্জায় দুইটি কৈশিক নল নিয়া গতিশক্তিজনিত শুদ্ধি কিভাবে অপনীত করা যায়? ইহার উপরে নির্ভর করিয়া তরলের সান্দ্রতা সুষ্ঠুভাবে মাপিবার কোন সম্ভাব্য উপায় বর্ণনা কর।

8. কৈশিক নলের সাহায্যে গ্যাসের সান্দ্রতা মাপনের কোন উপায় তত্ত্বসমেত বর্ণনা কর এবং ইহার সুবিধা অসুবিধা কি বুঝাইয়া বল।

9. র‍্যান্‌কিনের উপায়ে গ্যাসের সান্দ্রতা কিভাবে মাপা যায় তত্ত্বসমেত বল। ইহাতে অনিশ্চয়তা কোথা হইতে আসিতে পারে এবং উহা কিভাবে দূর করা যায়?

10. স্থির আয়তনে চাপ বদলাইতে দিয়া কৈশিক নলের সাহায্যে গ্যাসের সান্দ্রতা মাপনে সান্দ্রতার সহিত চাপের কি সম্পর্ক হইবে বাহির কর।

এইভাবে সান্দ্রতা মাপনের একটি সম্ভাব্য ব্যবস্থা বর্ণনা কর ও উহাতে কি কি কারণে মাপনের ত্রুটি ঘটিতে পারে আলোচনা কর।

11. ঘূরন্ত বেলনের সাহায্যে কিভাবে তরল ও গ্যাসের সান্দ্রতা মাপা যায় তত্ত্বসমেত বুঝাইয়া বল। মাপনে ত্রুটি ঘটিবার সম্ভাবনা কি কি এবং সেগুলি কিভাবে কমান বা দূর করা যায় পরিষ্কার করিয়া বল।

সান্দ্রতা মাপনের বিভিন্ন উপায়ের মধ্যে ইহাকে শ্রেষ্ঠ মনে করা হয় কেন?

12. সান্দ্র পদার্থের ভিতর দিয়া পড়ন্ত বস্তুর গতি গণিতের সাহায্যে আলোচনা কর। এরূপ বস্তুর 'সীমান্ত বেগ' বলিতে কি বুঝায়। গোলকের সীমান্ত বেগের সহিত সান্দ্রতার সম্পর্ক মাত্রীয় সমীকরণের সাহায্যে বাহির কর।

স্টোক্‌স্ সূত্র কি? উহা কি অবস্থায় খাটে?

13. পড়ন্ত গোলকের সীমান্ত বেগ মাপিয়া কিভাবে সান্দ্রতা বাহির করা যায় তত্ত্বসমেত বুঝাইয়া বল। ইহাতে কি কি কারণে শুদ্ধির দরকার? উহাদের কোন্‌টির জন্য ফলে সবচেয়ে বেশী ত্রুটি ঘটিতে পারে?

14. তরল ও গ্যাসের সান্দ্রতা মাপনের প্রধান উপায়গুলির নাম কর, ও খুব সংক্ষেপে কোন্‌টিতে কি করিতে হয় বল। প্রত্যেকটির প্রধান প্রধান ত্রুটিগুলি উল্লেখ কর এবং কিভাবে উহা কমান বা দূর করা যায় বল।

সান্দ্রতার কি রকম পাল্লায় কোন্ উপায় ব্যবহার করা যায় বল।

15. জলের সান্দ্রতা মাপিতে কি কি বিভিন্ন উপায় প্রয়োগ করা যায়? মাপনে কোন্‌টিতে কি কি ত্রুটি ঘটে আলোচনা কর। কোন্ উপায়টিতে ত্রুটি সবচেয়ে কম হয় বলিয়া তুমি মনে কর, এবং কেন কর বুঝাইয়া বল।

16. 10^{-4}, 10^{-2}, 10^{2}, 10^{4} পয়্‌জ্ সান্দ্রতা মাপিতে কোন্ ক্ষেত্রে তুমি কি, বা কি কি, উপায় অবলম্বন করিতে পার? যেখানে একাধিক উপায় প্রয়োগ করা যায়, সেখানে কোন্ উপায়ে ত্রুটি সবচেয়ে কম হয়, বা কম করা যায়, কারণসমেত উল্লেখ কর।

17. তরল ও গ্যাসের সান্দ্রতার উপর উষ্ণতা ও চাপের ক্রিয়া বর্ণনা কর। ইহা হইতে সান্দ্রতার কারণ সম্বন্ধে কি অনুমান করা যায়?

18. (*i*) কৈশিক নলে তরলের সান্দ্রতা মাপিতে নিচের রাশিগুলি পাওয়া গিয়াছে। উহা হইতে সান্দ্রতা গুণাংক বাহির কর।

প্রতি মিনিটে নির্গত তরলের আয়তন $= 15 \text{ cm}^3$; প্রেষবৈষম্য $= 30$ cm তরলের চাপ; তরলের ঘনত্ব $= 2\cdot3 \text{ g/cm}^3$; কৈশিক নলের দৈর্ঘ্য $= 25$ cm; কৈশিক নলের ব্যাস $= 1\cdot0$ mm। [উত্তর: 0·42 poise]

(*ii*) উপরের প্রশ্নে গতিশক্তিজনিত শুদ্ধি কত হইবে বাহির কর।

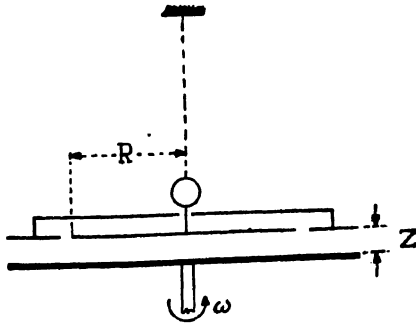
(*iii*) গ্লিসারিনের মধ্য দিয়া 2 mm ব্যাসার্ধের বল নিচে পড়িতে উহার সীমান্ত বেগ কত হইবে? বলের আপেক্ষিক গুরুত্ব 8·0; গ্লিসারিনের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1·3 এবং সান্দ্রতা 8·3 পয়্‌জ্। [উত্তর: 7 cm/s]

(*iv*) 1 mm ব্যাসের বায়ুর বুদ্বুদ জলের মধ্য দিয়া কি সীমান্ত বেগে উঠিবে? ($\eta = 0.01$ পয়্‌জ্‌। জলের ঘনত্বের তুলনায়, বায়ুর ঘনত্ব উপেক্ষা কর।) [উত্তর : 54·5 cm/s]

(*v*) 0·01 ইঞ্চি ব্যাসের বৃষ্টির ফোঁটা কত তাড়াতাড়ি পড়িতে পারে? বায়ুর সান্দ্রতা $1 \cdot 8 \times 10^{-4}$ পয়্‌জ্‌। [উত্তর : 1·95 m/s]

(*vi*) 100 cm^2 বর্গক্ষেত্রের একখানা সমতল পাত 2 mm পুরু রেড়ির তেলের উপর রাখা আছে। তেলের সান্দ্রতা 15·5 পয়্‌জ্‌। পাতখানা 3 cm/s বেগে অনুভূমিক তলে টানিয়া লইতে কত বল লাগিবে? [উত্তর : 0·23 নিউটন]

19. একটি মোটা নল হইতে জল 20 cm লম্বা ও 1 mm ব্যাসের একটি অনুভূমিক কৈশিক নল দিয়া বাহির হইয়া যাইতেছে। 10 মিনিটে জলের লেভ্‌ল্‌ কৈশিক নলের 10 cm উপর হইতে 5 cm উপরে নামিয়া আসে। জলের সান্দ্রতা 0·01 পয়্‌জ্‌ হইলে মোটা নলের প্রস্থচ্ছেদ কত? [উত্তর : 10·4 cm^2]

20. দুখানা সমাক্ষ অনুভূমিক চাকতি তরলে নিমজ্জিত। উপরের চাকতি অক্ষ বরাবর সরু তারে ঝুলান। নিচের চাকতি নিজ অক্ষে স্থির কৌণিক বেগে ঘোরে। রক্ষী বলয় ও রক্ষী বেলন ব্যবহার করিয়া উপরের চাকতির উপরের পিঠে সান্দ্রতার বল ক্রিয়া করিতে দেওয়া হয় নাই। উপরের চাকতির উপর সান্দ্রতাজনিত কি টর্ক ক্রিয়া করিবে? ইহা মাপিয়া কি করিয়া তরলের সান্দ্রতা জানা যাইতে পারে তাহার একটি সম্ভাব্য ব্যবস্থা বর্ণনা কর।

11.17 চিত্র

[সংকেত : 11.17 চিত্র দেখ। এই ব্যবস্থাকে 'ঘুরন্ত চাকতি ভিস্কোমিটার' **(Rotating disc viscometer)** বলে।

দুই চাকতির দূরত্ব z এবং নিচের চাকতির কৌণিক বেগ ω ধরিলে, উপরের চাকতির r ও $r+dr$ ব্যাসার্ধ দিয়া নির্ণীত বলয়ের সর্বত্র আপেক্ষিক বেগের নতিমাত্রা $\omega r/z$। ঐ বলয়ের উপর সান্দ্রতাজনিত বল $2\pi r dr . \eta \omega r/z$। চাকতির অক্ষে ইহার টর্ক লইয়া $r=0$ হইতে $r=R$ (চাকতির ব্যাসার্ধ) সীমার মধ্যে সমাকলন করিলে মোট টর্ক $\pi \omega \eta R^4/2z$ পাওয়া যাইবে। ঝুলন তারের মোচড় θ হইলে এই টর্ক $= c\theta$।]

21. 20 cm লম্বা 0.081 cm ব্যাসার্ধের নল দিয়া 20 cm জলের চাপে 12 মিনিটে 864 cm^3 জল নির্গত হইল। জলের সান্দ্রতা বাহির কর এবং প্রবাহ শান্ত কি না বিচার কর। [উত্তর : 0·0138 ; শান্ত]

22. A প্রস্থচ্ছেদের দুটি মোটা নল উহাদের নিচের দিকে l দৈর্ঘ্যের ও r ব্যাসার্ধের একটি অনুভূমিক কৈশিক নল দিয়া জোড়া। একটি মোটা নলে তরলের লেভ্‌ল্ কৈশিক নলের অক্ষের $3h$ উপরে ও অন্য নলে h উপরে। তরলের ঘনত্ব ρ ও সান্দ্রতা গুণাংক η হইলে দেখাও যে দুই নলে তরলের লেভ্‌লের বৈষম্য h হইতে $(4Al\eta/\pi r^4\rho g)\log 2$ সময় লাগিবে।

[সংকেত : এক নলে লেভ্‌ল্ dh নামিলে দুই নলের লেভ্‌লের বৈষম্য $dH=2dh$ কমে। dt সময়ে লেভ্‌ল্ dh নামিলে $V=-Adh/dt$। যে কোন সময়ে দুই নলে লেভ্‌ল্ বৈষম্য H হইলে $-Adh/dt=\pi r^4 H\rho g/8\eta l$ বা $dt=-\dfrac{8\eta lA}{2\pi r^4\rho g}\cdot\dfrac{dH}{H}$। $H=2h$ হইতে $H=h$ সীমার মধ্যে ইহার সমাকলন করিলে নির্ণেয় t পাওয়া যাইবে।]

23. 10 cm লম্বা 0·2 cm ব্যাসের একটি নলের প্রান্তে 4 cm ব্যাসার্ধের একটি বুদ্‌বুদ গড়া হইল। নলের অন্য মুখ খোলা থাকিলে বুদ্‌বুদের ব্যাসার্ধ 2 cm হইতে কত সময় লাগিবে। বুদ্‌বুদের পৃষ্ঠটান 30 dyn/cm ও বায়ুর সান্দ্রতা $1{\cdot}85\times10^{-4}$ পয়্‌জ্।

[সংকেত : বায়ুমণ্ডলের চাপ P_0 হইলে বুদ্‌বুদের ভিতরে চাপ $P_0+4\gamma/r$। এত অল্প প্রেষবৈষম্যে বায়ুর সংনম্যতা উপেক্ষা করা যায়। তখন 11-6.5 সমীকরণ প্রযোজ্য। dt সময়ে বুদ্‌বুদের ব্যাসার্ধ r হইতে $r+dr$ হইলে $V=-4\pi r^2 dr/dt$। প্রেষবৈষম্য $P=4\gamma/r$। $r=4$ হইতে $r=2$ সীমার মধ্যে সমীকরণ সমাকলিত করিলে নির্ণেয় সময় পাওয়া যাইবে। উত্তর : 4 min. 56 sec.]

24. শ্রেণীসজ্জায় জোড়া দুইটি কৈশিক নলের ভিতর দিয়া তরল শান্ত প্রবাহে যাইতেছে। প্রথম নল 1 m লম্বা ও উহার ব্যাসার্ধ 1 mm। দ্বিতীয় নল ব্যাসার্ধে 0·6 mm ও লম্বায় 60 cm। জোড়া নলের দু মাথায় প্রেষবৈষম্য 20 cm জলের চাপের সমান। দ্বিতীয় নলের মাথায় প্রেষবৈষম্য কত ? [সংকেত : 11-6.7 অনুচ্ছেদ দেখ। উত্তর : 16.4 cm জল]

25. অত্যন্ত সান্দ্র কোন তরলকে উচ্চচাপ P-তে r ব্যাসার্ধের কৈশিক নলে ঢুকান হইতেছে। প্রমাণ কর যে নলে তরলের দৈর্ঘ্য l_2-l_1 বাড়িতে যে সময় লাগিবে তাহার মান $t=4\eta\,(l_2{}^2-l_1{}^2)\;/Pr^2$। [সংকেত : dt সময়ে দৈর্ঘ্য dl বাড়িলে $V=\pi r^2 dl/dt$]

দ্বাদশ পরিচ্ছেদ

প্রবাহীর বলবিজ্ঞান
(Fluid Mechanics)

12-1. সূচনা। যে সকল পদার্থ কৃন্তন বল প্রতিরোধ করিতে পারে না তাহাদের 'প্রবাহী' (Fluids), সঠিক বলিতে গেলে 'আদর্শ প্রবাহী' (Ideal fluids), বলে। স্থায়ী কৃন্তন বল থাকিলে কঠিন পদার্থে প্রতিরোধের জন্য আকারের নির্দিষ্ট পরিমাণ বিকার ঘটার পর সাম্য আসে। কণাগুলির সরণ এখানে সীমিত। প্রবাহীতে স্থায়ী কৃন্তন থাকিলে, উহার প্রতিরোধ ক্ষমতা নাই বলিয়া কণাগুলি বলের ক্রিয়ায় সরিতেই থাকে ; সরণ সীমিত হয় না। বাস্তব তরল ও গ্যাস আদর্শ না হইলেও উহাদের প্রবাহী বলিয়া ধরা যায়। তরল ও গ্যাসে বলের ক্রিয়ায় গতি সুরু হইলে সান্দ্রতার জন্য উহাদের বিভিন্ন স্তরের মধ্যে আপেক্ষিক বেগের নতিমাত্রার আনুপাতিক কৃন্তন বল ক্রিয়া করে। সরলতার জন্য তরল ও গ্যাসের গতি আলোচনায় সান্দ্রতার ক্রিয়া উপেক্ষা করিয়া উহাদের আদর্শ প্রবাহী বলিয়া ধরা হইবে। অতএব যে সকল পদার্থে সান্দ্রতা উপেক্ষণীয় তাহাতেই লব্ধ ফলগুলি প্রযোজ্য হইবে।

প্রবাহী সংক্রান্ত বলবিজ্ঞানকে fluid mechanics বা hydromechanics বলে। ইহার দুই অংশ—(১) hydrostatics ও (২) hydrodynamics। আলোচ্য প্রবাহী সংনম্য বা অসংনম্য হইতে পারে। সংনম্য প্রবাহীর (কার্যতঃ গ্যাসের) গতিবিজ্ঞানকে সাধারণতঃ aerodynamics বলা হয়। অসংনম্য প্রবাহীর (কার্যতঃ তরলের) বলবিজ্ঞানের প্রযুক্তি সংক্রান্ত (mechanical) অংশকে hydraulics বলে।

আমরা এই পরিচ্ছেদে প্রবাহীর বলবিজ্ঞান সংক্রান্ত একেবারে গোড়ার কয়েকটি কথা বলিব। এই প্রসঙ্গে 'প্রবাহীর কণা' বলিতে কি বুঝায় তাহা জানিয়া রাখা ভাল। তা ছাড়া, কোন 'বিন্দু'তে কোন ভৌতরাশির মান বলিতে কি প্রকার বিন্দু বুঝায়, এবং উহার সহিত গণিতের 'বিন্দু'-র কি প্রভেদ তাহাও জানা দরকার। নিচে এগুলি বলা হইল।

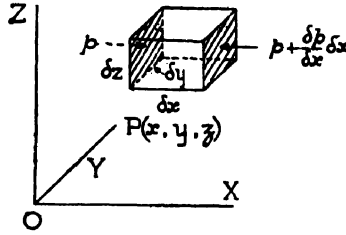
12-1.1. প্রবাহীর 'কণা' (Particle of a fluid)। তরল বা গ্যাসকে (অর্থাৎ প্রবাহী পদার্থকে) আমরা গণনার সুবিধার জন্য গঠনে অবিচ্ছিন্ন

(continuous) ধরিলেও আসলে উহারা অণুতে তৈয়ারী, এবং অণুগুলি সচল। তা ছাড়া পাশাপাশি অণুগুলির মধ্যে কম বেশী ফাঁক থাকে, এবং এই ফাঁক সব জায়গায় এবং সব সময়ে সমান নয়। এ ক্ষেত্রে প্রবাহীর 'কণা' বলিতে খুব অল্প আয়তনে আবদ্ধ সামান্য পরিমাণ প্রবাহী পদার্থ বুঝায়। এই আয়তন এমন ছোট হইতে হইবে যে উহার সর্বত্র সরণ, বেগ, ত্বরণ, ঘনত্ব, চাপ প্রভৃতির মান একই হয়। তাপীয় এলোমেলো গতির জন্য এই আয়তন হইতে অণু সব সময়ই বাহির হইয়া যাইতেছে এবং নূতন অণু উহাতে ঢুকিতেছে। কিন্তু আমরা ধরি এই আয়তনে অণুর গড় সংখ্যার পরিবর্তন হয় না।

12-1-2. ভৌতবিন্দু ও গণিতের বিন্দুর প্রভেদ (Difference between a physical point and a mathematical point)। গণিতের বিন্দু আয়তনহীন, অর্থাৎ উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, বেধ কিছুই নাই। বিন্দুর এই কল্পন ভৌতরাশিতে প্রযোজ্য নয়। তরলের ভিতরে কোন বিন্দুতে চাপ বলিতে আমরা ঐ বিন্দু ঘেরিয়া স্বল্পাংশ তল δA কল্পনা করি এবং ঐ তলে যে বল δF ক্রিয়া করে তাহার সহিত এই তলের অনুপাতের, অর্থাৎ $\delta F/\delta A$-এর কথা ভাবি। δA এর পরিসর এমন হওয়া দরকার যেন চাপ উহার সর্বত্র সমান ধরা যায়। $\delta F/\delta A$-এর এই সুষম মানকে δA-এর উপরস্থ যে কোন বিন্দুতে তরলের চাপ ধরা হয়।

কোন বিন্দুতে ঘনত্ব বলিতে অনুরূপে সেই বিন্দু ঘেরিয়া স্বল্পাংশ আয়তন δV নিয়া এই আয়তনে যে ভর δm আছে তাহাদের অনুপাত $\delta m/\delta V$-কে ঐ বিন্দুতে ঘনত্ব ধরা হয়। δV আয়তনে এমন হওয়া চাই যেন উহার সর্বত্র $\delta m/\delta V$-র মান একই থাকে। দেখা যায় ভৌতবিন্দু হয় স্বল্পাংশ আয়তন, বা স্বল্পাংশ তল, বা স্বল্পাংশ রেখা (যেমন তরল পৃষ্ঠে কোন বিন্দুতে পৃষ্ঠটান)।

12-2. প্রবাহীর স্থিতিবিজ্ঞান (Hydrostatics)। বাহ্যবলের ক্রিয়ায় কোন প্রবাহী সাম্যে থাকিলে উহার ভিতরে যে কোন স্বল্পাংশ তলে বল কেবল তলের অভিলম্বে ক্রিয়া করিবে। তলের স্পার্শক কোন উপাংশ বল (অর্থাৎ কৃন্তন বল) থাকিতে পারিবে না, কারণ ইহা থাকিলে প্রবাহীর সংজ্ঞা অনুসারে এই উপাংশ বলের ক্রিয়ায় তলস্থ কণার সরণ ঘটিতে থাকিবে, এবং সাম্য আসিবে না। তরলের ভিতর যে কোন স্থানে কোন বিন্দু ঘেরিয়া স্বল্পাংশ সমতল δA কল্পনা করিলে উহার অভিলম্বে তরলের এক অংশ যদি অন্য অংশের উপর δF বল প্রয়োগ করে, তাহা হইলে $\delta F/\delta A$ অনুপাতের সীমান্ত মান dF/dA-কে ঐ বিন্দুতে প্রেষ বা চাপ p) বলে। প্রেষ আয়তন সংকোচন

ঘটাইতে চায়। $\delta\mathbf{A}$ তলকে ভেক্টর বলিয়া ধরিলে লেখা যায় $\delta\mathbf{F}=p\delta\mathbf{A}$। মনে রাখা দরকার p একটি স্কেলার রাশি।

12.1 চিত্র

12-2.1. প্রবাহীর সাম্যের শর্ত। প্রবাহীর সাম্যের শর্ত সহজেই প্রতিষ্ঠা করা যায়। প্রবাহীর ভিতরে কোন P বিন্দুতে δx, δy, δz বাহুবিশিষ্ট একটি আয়তাকার ষট্ফলক (rectangular parallelepiped) কল্পনা করা যাক (12.1 চিত্র)। P-র স্থানাংক x, y, z। যে বাহ্যবলের ক্রিয়ায় প্রবাহী সাম্যে আছে প্রতি একক আয়তনে তাহার মান $\mathbf{f}$ দিয়া নির্দেশ করা যাক। প্রবাহীর দেহে সর্বত্র ক্রিয়া করে বলিয়া এরূপ বলকে 'দেহবল' (Body force) বলা হয়। $\mathbf{f}$-এর মান স্থানাংকের উপর নির্ভর করে। P বিন্দুতে $\mathbf{f}$-এর উপাংশ f_x, f_y, f_z।

প্রেষ p-ও স্থানাংকের উপর নির্ভর করে। P বিন্দুস্থ $\delta y\delta z$ তলের অভিলম্বে প্রেষের জন্য ষট্ফলকের উপর x অক্ষের সমান্তরাল বল $p\delta y\delta z$। ইহার বিপরীত তলে ষট্ফলকের উপর বল $(p+\frac{\partial p}{\partial x}\delta x)\,\delta y\delta z$; ইহা x অক্ষের বিপরীতমুখী। অতএব প্রেষের জন্য x অক্ষের সমান্তরালে ষট্ফলকের উপর ক্রিয়াশীল বল $-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z$।

বাহ্যবলের ক্রিয়ায় সাম্য থাকিতে হইলে

$$f_x\,\delta x\,\delta y\,\delta z-\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z=0$$

অর্থাৎ
$$f_x-\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

হইবে। অন্য দুটি অক্ষেও অনুরূপ সম্পর্ক পাওয়া যাইবে। অতএব সাম্যের শর্ত হইল

$$f_x - \frac{\partial p}{\partial x} = 0,\ f_y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0,\ f_z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

ভেক্টর গণিতের সংকেতে ইহা খুব সংক্ষেপে লেখা যায়। তিনটি সমীকরণকে যথাক্রমে ঐকিক ভেক্টর **i**, **j**, **k** দিয়া গুণ করিয়া সমীকরণ তিনটি যোগ করিলে পাই

$$\mathbf{i} f_x + \mathbf{j} f_y + \mathbf{k} f_z - \left(\mathbf{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0$$

$$\text{বা} \quad \mathbf{f} - \nabla p = 0 \qquad (12\text{-}2.1)$$

3-12 অনুচ্ছেদে আমরা দেখিয়াছি বল কোন স্কেলার রাশির গ্রেডিয়েণ্ট হইলে ঐ বলের কার্ল = 0 (2-9.5 অনুচ্ছেদের প্রথম প্রশ্নটিও দেখ)। অতএব এক্ষেত্রে

$$\text{curl } \mathbf{f} = 0 \qquad (12\text{-}2.2)$$

হইবে। দেহবলের ক্রিয়ায় সাম্য থাকিতে হইলে দেহবল এই শর্ত পূরণ করিবে। ইহা সংরক্ষী বলের শর্ত। দেখা যাইতেছে যে, curl $\mathbf{f} = 0$, অর্থাৎ দেহবল সংরক্ষী, হইলেই ঐ বলের ক্রিয়ায় সাম্য সম্ভব। প্রবাহী কেবল অভিকর্ষের ক্রিয়াধীন থাকিলে অভিকর্ষজনিত দেহবল $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$ (ρ = প্রবাহীর ঘনত্ব)। z অক্ষ উর্ধ্বদিকে পজিটিভ এবং x ও y অক্ষ অনুভূমিক ধরিলে $f_x = f_y = 0$ এবং $f_z = -\rho g$ হইবে। অভিকর্ষজনিত বল সংরক্ষী বলিয়া ইহার ক্রিয়ায় প্রবাহী সাম্যে থাকিতে পারিবে।

12-2.1 সমীকরণ সাম্যের শর্ত। দেহবল **f**-এর শর্ত 12-2.2 সমীকরণ। 12-2.1 সমীকরণ হইতে সাম্যে অবস্থিত তরলের সকল ধর্মগুলিই পাওয়া যায়। উদাহরণ স্বরূপ প্যাস্কালের চাপ সঞ্চালন সূত্র (law of transmission of fluid pressure) নেওয়া যাইতে পারে। প্রবাহীর ভিতরে কাছাকাছি দুই বিন্দুতে প্রেষবৈষম্য dp হইলে, p স্থানাংকের অপেক্ষক বলিয়া

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{dy} dy + \frac{\partial p}{dz} dz = \nabla p . d\mathbf{r} = \mathbf{f}\, d\mathbf{r}$$

$$\text{বা} \quad p_2 - p_1 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{f} \,.\, d\mathbf{r}.$$

ইহার অর্থ দেহবল স্থির থাকিলে প্রবাহীর দুই বিন্দুর মধ্যে প্রেষবৈষম্য স্থির থাকিবে, অর্থাৎ এক বিন্দুতে চাপ বাড়াইলে অন্য বিন্দুতেও চাপ সমান বাড়িবে। ইহাই প্যাস্কালের সূত্র। আর্কিমিডিসের উর্ধ্বচাপের সূত্রও 12-2.1 সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়।

12-2.2. অভিকর্ষের ক্রিয়ায় প্রবাহীর চাপ। একটু আগেই আমরা দেখিয়াছি প্রবাহী কেবল অভিকর্ষের ক্রিয়াধীন থাকিলে যে কোন স্থানে দেহবলের অনুভূমিক উপাংশ শূন্য হইবে। $f_x = f_y = 0$ বলিয়া $\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$ হইবে, অর্থাৎ চাপ যে কোন অনুভূমিক তলের সকল বিন্দুতে সমান থাকিবে। উর্ধ্বদিকে

$$f_z = \frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

ঘনত্ব ρ চাপ নিরপেক্ষ হইলে ইহার সমাধান

$$p = -\rho g z + p_o.$$

p_o হইল $z=0$ বিন্দুতে চাপ। তরলে ρ কার্যতঃ চাপ নিরপেক্ষ বলিয়া এ সমীকরণ তরলে প্রযোজ্য। গ্যাসে ρ চাপ p-র উপর নির্ভর করে, এবং গ্যাস আদর্শ হইলে $\rho = Mp/RT$। অতএব

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT}p$$

$$\text{বা} \quad \ln p = -\frac{Mgz}{RT} + \ln p_0 \quad \text{বা} \quad p = p_o \exp\left(-\frac{Mg}{RT}z\right) \tag{12-2.3}$$

ইহাকে বায়ুমণ্ডলের চাপের সূত্র (Law of atmospheres) বলে।

12-2.3 চাপশক্তি (Pressure energy)। 12-2.1 সমীকরণ হইতে দেখা যায় চাপজনিত দেহবল প্রতি একক আয়তনে $-\nabla p$। 3-13 অনুচ্ছেদে আমরা দেখিয়াছি বল কোন স্কেলার রাশির নিগেটিভ গ্রেডিয়েণ্ট হইলে ঐ স্কেলার রাশিকে স্থিতিশক্তি মনে করা যায়। এই সাদৃশ্যে চাপ p-কে এক প্রকার স্থিতিশক্তির ঘনত্ব বলিয়া ধরা যায়। কোন প্রবাহীর dA পরিমিত পৃষ্ঠ নিজের অভিলম্বে h দূরত্ব সারিয়া প্রবাহীর আয়তন $hdA = dV$ পরিমাণ বাড়াইলে, চাপ p দ্বারা কৃত কার্য $p.hdA = pdV$ হইবে। pdV প্রবাহীর স্থিতিশক্তি পরিবর্তন। প্রবাহীর আয়তন V ও চাপ সর্বত্র p হইলে উহার pV পরিমাণ চাপশক্তি আছে বলা যায়।

12-3. প্রবাহক্ষেত্র (Field of flow)। প্রবাহীর গতি আলোচনার আগে উহার গতির বর্ণনা কিভাবে দেওয়া যাইতে পারে অর্থাৎ উহার শুদ্ধগতি-

বিজ্ঞান বা (kinematics) আলোচনা করা দরকার। যে স্থান জুড়িয়া প্রবাহীর গতি আছে তাহাকে 'প্রবাহক্ষেত্র' বলা হয়। প্রবাহক্ষেত্রে সচল প্রবাহী কণা যে রেখা বর্ণনা করে তাহাকে 'প্রবাহরেখা' (Line of flow) বলে। কণার তাৎক্ষণিক বেগ এই রেখার স্পর্শক অভিমুখে। তাৎক্ষণিক বেগ v সাধারণতঃ স্থানাংকের উপর নির্ভর করে। প্রবাহক্ষেত্র প্রবাহবেগের ভেক্টর ক্ষেত্র। ভেক্টর ক্ষেত্রের সঙ্গে আমাদের অন্যত্রও পরিচয় ঘটে। স্থির বৈদ্যুত, চৌম্বক এবং মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র তীব্রতা ভেক্টরের ক্ষেত্র। স্থির অবস্থায় (in the steady state) এইগুলিতে তীব্রতাভেক্টর সময়ের উপর নির্ভর করে না ; করে কেবল স্থানাংকের উপর। কিন্তু প্রবাহক্ষেত্রে বেগ স্থানাংক ছাড়া সময়ের উপরও নির্ভর করিতে পারে, এবং সাধারণতঃ করে। প্রবাহক্ষেত্রে বেগ সময়ের উপর নির্ভর না করিলে উহাকে 'অপরিবর্তী বা নিয়ত' প্রবাহ (Steady flow) বলা হয়। অন্যথায় প্রবাহ 'পরিবর্তী বা অনিয়ত' (nonsteady)। কোন নির্দিষ্ট মুহূর্তে কোন প্রবাহরেখার বিভিন্ন বিন্দুতে বিভিন্ন কণা থাকে। অপরিবর্তী প্রবাহে একই প্রবাহরেখার উপরস্থ প্রত্যেক কণা ঐ একই রেখা ধরিয়া চলে।

তাপ বা বিদ্যুৎপ্রবাহের সহিত তরল বা গ্যাসের প্রবাহের প্রচুর মিল আছে। সবগুলির গণিতই প্রায় এক প্রকারের, এবং একটি ভাল করিয়া জানিলে অন্যগুলি বোঝা সহজ হয়।

প্রবাহক্ষেত্রের বর্ণনায় কয়েকটি রাশি গুরুত্বপূর্ণ। কণার বেগের কথা আগেই বলা হইয়াছে। আর একটি রাশি প্রবাহীর ঘনত্ব। বেগ v এবং ঘনত্ব ρ উভয়েই সাধারণত: স্থানাংক (x, y, z) এবং কাল (t)-র উপর নির্ভর করে। ইহা ছাড়া কোন তল অতিক্রম করিয়া প্রতি সেকেণ্ডে কতটা পদার্থ প্রবাহিত হয় তাহাও একটি প্রয়োজনীয় রাশি। ইহাকে 'ফ্লাক্‌স্‌' (Flux) বলে। প্রবাহক্ষেত্রে কোথাও স্বল্পাংশ তল dA লইলে, ঐ স্থানে কণার বেগ v এবং তলের লম্বের সহিত v-র কোণ α হইলে, এই তল অতিক্রম করিয়া প্রতি সেকেণ্ডে $\rho v dA \cos \alpha$ ভরের পদার্থ প্রবাহিত হইবে। ইহাকেই ঐ তলে প্রবাহীর ফ্লাক্‌স্‌ বলে। ভেক্টর গণিতের ভাষায় ইহাকে $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ রূপে লেখা যায়। ρv রাশিটিকে 'ফ্লাক্‌স্‌ ঘনত্ব' (Flux density) বলে। তাপ পরিবহণের ক্ষেত্রে অনুরূপ রাশি আছে, যদিও সেখানে ρ বা v বলিয়া কিছু নাই। ফ্লাক্‌স্‌ ঘনত্বও প্রবাহের ব্যাপারে একটি গুরুত্বপূর্ণ রাশি।

ধারারেখা ও ধারারেখী নল (Streamline and Stream tube)। প্রবাহক্ষেত্রে যে রেখার কোন বিন্দুস্থ স্পর্শক ঐ বিন্দুতে প্রবাহকণার বেগের অভিমুখ নির্দেশ করে তাহাকে **স্ট্রীমলাইন (Streamline)** বলে। আমরা

ইহাকে 'ধারারেখা' বলিতে পারি।* কোন স্থানে স্বল্পাংশ ধারারেখা dl এর উপাংশ dx, dy, dz এবং ঐ তিন অক্ষে বেগ V-র উপাংশ u, v, w হইলে ধারারেখার সংজ্ঞা অনুসারে পাই

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w} \qquad (12\text{-}3.1)$$

প্রবাহীর ভিতরে স্বল্পাংশ তল লইয়া উহার সীমারেখার প্রত্যেক বিন্দু দিয়া ধারারেখা কল্পনা করিলে এই রেখাগুলি যে নলের সৃষ্টি করে তাহাকে **'ধারারেখী নল' (Stream tube)** বলে। ধারারেখী নলের ভিতর হইতে পদার্থ বাহিরে যাইতে পারে না কারণ নলের বাহিরের দিকে কণাগুলির বেগের কোন উপাংশ নাই। বাস্তব নলের ভিতর দিয়া জলের গতি যে রকম ধারারেখী নলের ভিতর দিয়া প্রবাহীর গতিও সেই রকম।

প্রবাহ অপরিবর্তী হইলে প্রত্যেক কণার প্রবাহী রেখাই (line of flow) একটি ধারারেখা (streamline)। এক্ষেত্রে ধারারেখী নলের দুই প্রান্ত দিয়া একই ভর প্রবাহিত হয়। ধারারেখা ও ধারারেখী নলের সঙ্গে বৈদ্যুত বা চৌম্বক বলরেখা ও বলনলিকা (tube of force)-এর প্রচুর মিল আছে।

পরিবর্তী প্রবাহে কোন কণার প্রবাহরেখা কোন ধারারেখাকে স্পর্শ করিলে সেই মুহূর্তে কণার অবস্থান ও বেগ জানা যায়।

অপরিবর্তী প্রবাহে প্রবাহক্ষেত্রে ধারারেখাগুলি যে নকশা (pattern) সৃষ্টি করে সময়ের সঙ্গে তাহার পরিবর্তন হয় না। ইহা স্থির বৈদ্যুত বা চৌম্বক-ক্ষেত্রে বলরেখার নকশার অনুরূপ। পরিবর্তী প্রবাহে নকশা সময়ের সঙ্গে বদলায়।

তরল বা বায়ুর ভিতর দিয়া কোন বস্তুর দ্রুত চলিতে হইলে উহার এমন আকার থাকা দরকার যাহাতে ধারারেখাগুলি সর্বদা উহার গা ঘেঁষিয়া থাকে। বস্তুর বহিস্তল (surface)-কে এরূপ আকার দেওয়াকে 'স্ট্রীমলাইন করা' (streamlining) বলে। প্রকৃতি মাছের আকার স্ট্রীমলাইন করিয়া দিয়াছেন। আমরা এরোপ্লেনকে স্ট্রীমলাইন করি।

* প্রবাহরেখা ও ধারারেখার (flow line এবং streamline-এর) প্রভেদ স্পষ্ট করা না থাকিলে বা স্পষ্টভাবে বুঝিয়া না নিলে পাঠকের ভুল ধারণা থাকিয়া যাইতে পারে। প্রথম স্তরের আলোচনায় প্রবাহীর গতি সাধারণতঃ অপরিবর্তী ধরা হয়। এক্ষেত্রে উভয় রেখা একই। পরিবর্তী প্রবাহে প্রবাহরেখা ও ধারারেখা এক নয়। কি প্রকার গতি আলোচিত হইতেছে তাহা বলিয়া না নেওয়ায় ভুল ধারণার সৃষ্টি হয়।

প্রবাহীর গতি আলোচনা দুই ভাবে করা যাইতে পারে—

(১) প্রবাহরেখা ধরিয়া কোন প্রবাহী কণার গতি অনুসরণ করা। ইহাতে যে গতীয় সমীকরণ পাওয়া যায় তাহা লাগ্রাঁজের (Lagrange) সমীকরণ বলিয়া খ্যাত।

(২) ক্ষেত্রের সর্বত্র প্রবাহীর ঘনত্ব ও বেগ নির্দেশ করা। অধিকাংশ ক্ষেত্রে এই ভিত্তির আলোচনায় সুবিধা হয়। এই ভিত্তিতে পাওয়া গতীয় সমীকরণকে অয়লারের (Euler) সমীকরণ বলে।

প্রথম ক্ষেত্রে কণা বিশেষকে অনুসরণ করা হয়। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট কোন বিন্দুতে কি ঘটিতেছে তাহা দেখা হয়। ইহা দেখিতে স্বল্প সময়ের জন্য ঐ বিন্দু অতিক্রমকারী কণার গতি দেখা দরকার হয়।

12-3.1. প্রবাহক্ষেত্রে কোন রাশির কাল অবকল গুণাংক (Time derivative in a field of flow)। আলোচ্য রাশিটি চাপ, বেগ বা যাহাই হোক, উহাকে সাধারণভাবে Q বলা যাক। Q সাধারণতঃ স্থানাংক (x, y, z) ও কাল (t -র অপেক্ষক। নির্দিষ্ট কোন বিন্দুতে সময়ের সহিত Q-র পরিবর্তনের হার ইহার আংশিক অবকলন গুণাংক $\partial Q/\partial t$। $\dot{Q} = \partial Q/\partial t$ বুঝাইবে। $\partial p/\partial t$, $\partial \mathbf{v}/\partial t$, $\partial \rho/\partial t$ ইত্যাদি নির্দিষ্ট কোন বিন্দুতে ঐ ঐ রাশির সময়ের সহিত পরিবর্তনের হার বুঝাইবে। ইহাদের মান সাধারণতঃ বিভিন্ন বিন্দুতে ও বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন হইবে অর্থাৎ এই রাশিগুলিও সাধারণতঃ x, y, z ও t-র অপেক্ষক।

প্রবাহক্ষেত্রে দর্শক কোন সচল কণার সঙ্গে সঙ্গে চলিতে থাকিলে দেখিবেন কণার গতির জন্য Q রাশি বিভিন্ন স্থানে ও কালে বিভিন্ন হইবে। এক্ষেত্রে x, y, z ও t সব কয়টিই বদলায় বলিয়া সময়ের সহিত Q-র পরিবর্তন উহার পূর্ণ অবকলন গুণাংক dQ/dt। এক্ষেত্রে

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial t} + v_x \frac{\partial Q}{dx} + v_y \frac{\partial Q}{\partial y} + v_z \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial t} + (\mathbf{v}.\mathrm{grad})\, Q \qquad (12\text{-}3.2)$$

সমীকরণটি গাণিতিক সংকারকরূপে লিখিলে দেখা যায়

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}.\ \nabla) \qquad (12\text{-}3.3)$$

এই সম্পর্ক অনুসারে. x, y, z বিন্দুতে t সময়ে কোন কণার উপর চাপ $p\ (x, y, z, t)$ ও $x+dx, y+dy, z+dz$ বিন্দুতে $t+dt$ সময়ে ঐ কণার উপর চাপ $p+dp$ হইলে, চাপ বৈষম্য হইবে

$$dp=\frac{\partial p}{\partial t}dt+\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz \qquad (12\text{-}3.4)$$

dt সময়ে কণাটি যে দূরত্ব অতিক্রম করিয়াছে $dx,\ dy,\ dz$ তাহার উপাংশ।

এই মুখবন্ধের পর পরবর্তী দুটি অনুচ্ছেদে আমরা প্রবাহীর শুদ্ধগতি বিজ্ঞানের দুইটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় সূত্র আলোচনা করিব। একটিকে 'অবিচ্ছিন্নতার সূত্র' (Equation of continuity) ও অন্যটিকে 'বার্নুলির সূত্র' (Bernoulli's theorem) বলে। উভয়েই সংরক্ষণ সূত্র। প্রথমটি ভরের সংরক্ষণের উপর প্রতিষ্ঠিত ; দ্বিতীয়টি শক্তির।

12-4. অবিচ্ছিন্নতা সূত্র (Equation of continuity)। বহমান প্রবাহীর ভিতর কোন নির্দিষ্ট স্থানে নির্দিষ্ট একটি আয়তন লইলে নির্দিষ্ট সময়ে প্রবাহের ফলে উহার সীমাতল অতিক্রম করিয়া কিছু পদার্থ বাহির হইতে ভিতরে আসিবে ও কিছু ভিতর হইতে বাহিরে যাইবে। যাহা আসে ও যাহা যায় উহারা সমান না হইলে ঐ আয়তনে পদার্থের ঘনত্বের পরিবর্তন হইবে, এবং সময়ের সহিত ঘনত্বের পরিবর্তনের হার পদার্থের আগম ও নির্গম হারের প্রভেদের সহিত সম্পর্কিত হইবে। প্রবাহে কোথাও পদার্থের সৃষ্টি বা বিলয় হয় না—ভর সংরক্ষিত রাশি। এই তথ্যের সাহায্যে দেখা যায় উপরোক্ত হার দুটি সমান হইবে। ইহাই প্রবাহীর গতি সংক্রান্ত অবিচ্ছিন্নতা সূত্র।

আলোচ্য আয়তনে মোট পদার্থ $\iiint \rho dV$। এই আয়তনের সীমাতলের যে কোন স্বল্পাংশ তল dA অতিক্রম করিয়া তলের বাহির্মুখী লম্ব অভিমুখে ভরের নির্গমের হার = ঐ তলে ফ্লাক্স্ $=\rho \mathbf{v}.d\mathbf{A}$। সম্পূর্ণ সীমাতল ($A$) ভেদ করিয়া ভর নির্গমের হার

$$\iint_A \rho \mathbf{v}.d\mathbf{A}.$$

এই সমাকলন সম্পূর্ণ বদ্ধতল A-র উপর নিতে হইবে। ভর নির্গত হইলে

ঘনত্ব-কমে। অতএব আলোচ্য স্থির আয়তন হইতে ভর বাহির হইয়া যাইবার জন্য ঘনত্ব হ্রাসের হার $= -\partial\rho/\partial t$ লিখিলে পাই

$$-\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = \iint_A \rho\mathbf{v}.d\mathbf{A}$$

ভেক্টরের ডাইভারজেন্‌স্‌ সূত্র (2-11 অনুচ্ছেদ) অনুসারে বদ্ধতল ভেদ করিয়া কোন ভেক্টরের মোট বহির্মুখী ফ্লাক্‌স্‌ ঐ তলে ঘেরা আয়তনে ঐ ভেক্টরের ডাইভারজেন্‌সের নিশ্চিত সমাকল। অতএব

$$\iint_A \rho\mathbf{v}.d\mathbf{A} = \iiint_V \mathrm{div}\ \rho\mathbf{v}.dV$$

অর্থাৎ $$-\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = \iiint_V \mathrm{div}\ \rho\mathbf{v}.dV$$

V যথেচ্ছ হইতে পারে বলিয়া সমীকরণের দুই পাশের সমাকল্য দুটি সমান হইবে, অর্থাৎ

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathrm{div}\ \rho\mathbf{v}$$

বা $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \rho\mathbf{v} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\rho\mathbf{v} = 0 \qquad (12\text{-}4.1)$$

ইহাই অবিচ্ছিন্নতা সূত্র।

অসংনম্য প্রবাহীতে ρ স্থির রাশি। অতএব $\partial\rho/\partial t = 0$ এবং

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0 \qquad (12\text{-}4.2)$$

তরলের ক্ষেত্রে অবিচ্ছিন্নতা সূত্র কার্যতঃ এই রূপ নেয়।

বিকল্প প্রমাণ। ডাইভারজেন্‌স্‌ সূত্রের সাহায্য না নিয়া অবিচ্ছিন্নতা সূত্র সোজাসুজিও প্রমাণ করা যায়। মনে কর আলোচ্য আয়তন δx, δy, δz বাহুবিশিষ্ট আয়ত ষট্‌ফলক (12.1 চিত্র)। P বিন্দুতে বেগের উপাংশ v_x, v_y, v_z। ষট্‌ফলকের বাঁ দিকের $\delta y\delta z$ তল ভেদ করিয়া প্রতি সেকেণ্ডে যে পরিমাণ ভর ভিতরে ঢোকে তাহার মান $\rho v_x \delta y \delta z$। উহার বিপরীত তল দিয়া যাহা বাহির হয় তাহার মান $\{\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\delta x\}\delta y\delta z$। অতএব x অক্ষের সমান্তরালে মোট ভর নির্গমের হার

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\, \delta x \delta y \delta z$$

অন্য দুই অক্ষে অনুরূপ রাশি হইল $\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)\,\delta x\delta y\,\delta z$ ও $\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\,\delta x\,\delta y\,\delta z$। অতএব ষট্‌ফলক হইতে ভর নির্গমের মোট হার এই তিনটি রাশির যোগফল। ভেক্টর সংকেতে এই যোগফল $\nabla.\rho\mathbf{v}\ \ \delta x\delta y\delta z$।

প্রবাহী অবিচ্ছিন্ন, এবং প্রবাহে পদার্থের সৃষ্টি বা লয় হয় না বলিয়া এই রাশি ঘনহ্রাস জনিত ভর পরিবর্তনের সমান হইবে, অর্থাৎ

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\delta x\,\delta y\,\delta z=\nabla.\rho\mathbf{v}\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

বা $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla.\rho\mathbf{v}=0.$$

প্রবাহী অসংনম্য (incompressible) হইলে $\partial\rho/\partial t=0$ হইবে। এ ক্ষেত্রে

$$\text{div}\ \rho\mathbf{v}=0 \qquad (12\text{-}4.3)$$

তরলকে অসংনম্য ধরা যায়। যে সকল গতিতে চাপের পরিবর্তন সামান্য সে সকল গতিতে বায়ুতেও এই সমীকরণ প্রয়োগ করা যায়।

12·4.1. অঘূর্ণ প্রবাহ (**Irrotational flow**) **ও বেগ বিভব (Velocity potential)**। 3-12 অনুচ্ছেদে আমরা দেখিয়াছি ভেক্টর বলক্ষেত্রে কোন বদ্ধরেখা লইয়া ঐ রেখায় বদ্ধ সমাকল $\oint_R \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ নিলে উহার মান যদি শূন্য হয়, তাহা হইলে বলকে সংরক্ষী বলা হয়। সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে $\text{curl}\ \mathbf{F}=0$ হয়; এই সম্পর্ককেও সংরক্ষী বলের সংজ্ঞা ধরা যায়। আরও দেখা গিয়াছে বল সংরক্ষী হইলে উহাকে কোন স্কেলার রাশির গ্রেডিয়েণ্ট বলিয়া মনে করা যায় (3-12.5 সমীকরণ)।

অনুরূপে, কোন প্রবাহক্ষেত্রে (ইহা $\mathbf{v}$ ভেক্টরের ক্ষেত্র) কোন বদ্ধরেখায় বদ্ধ বেগসমাকল $\oint_R \mathbf{v}.d\mathbf{r}=0$ বা $\text{curl}\ \mathbf{v}=0$ হইলে, $\mathbf{v}$-কে কোন স্কেলার রাশি ϕ-এর গ্রেডিয়েণ্ট বলিয়া ধরা যায়। তখন লেখা যায় (3-13.2 সমীকরণ তুলনা কর)

$$v_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x};\ v_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y},\ \ v_z=-\frac{\partial\phi}{\partial z}\ \text{এবং}\ \mathbf{v}=-\text{grad}\ \phi \qquad (12\text{-}4.4)$$

ϕ রাশিটিকে 'বেগবিভব' (velocity potential) বলে। $F = -\text{grad}\ V$ সম্পর্কটিতে দেখা গিয়াছিল V স্থিতিশক্তি (3-13 অনুচ্ছেদ)। কিন্তু ϕ রাশিটি আমাদের পূর্ব পরিচিত কোন রাশি নয় ; উহার মাত্রা বেগ×দৈর্ঘ্য অর্থাৎ L^2T^{-1}।

$$\oint_R \mathbf{v}.d\mathbf{r} = 0, \text{ অর্থাৎ } \text{curl } \mathbf{v} = 0 \qquad (12\text{-}4.5)$$

হইলে সে প্রবাহকে 'অঘূর্ণ প্রবাহ' (Irrotational flow) বলা হয়। বদ্ধ পথের সকল বিন্দুতে বেগ সমান হইলে গতি অবশ্যই অঘূর্ণ হইবে। কিন্তু বেগ সর্বত্র সমান না হইয়াও গতি অঘূর্ণ হইতে পারে। বৈদ্যুত ক্ষেত্রে তীব্রতা (E) সর্বত্র সমান নয় ; কিন্তু $\oint_R \mathbf{E}.\,d\mathbf{r} = 0$। প্রবাহক্ষেত্রে বেগ সম্বন্ধেও এরূপ হইতে পারে।

প্রবাহে ঘূর্ণি (eddy) থাকিলে ঘূর্ণিতে curl $\mathbf{v} = 0$ হয় না। curl v-কে vorticity (ঘূর্ণিতা) বলে।

প্রবাহীর ক্ষুদ্র এক অংশের গতি অনুসরণ করিলে দেখা যায় গতিতে উহার বেগের কার্ল বদলায় না। কাজেই উহা যদি কার্লবিহীন অবস্থান হইতে গতি সুরু করে তবে গতি অঘূর্ণ হইবে। নলে সান্দ্র পদার্থ প্রবাহিত হইতে থাকিলে নলের দেওয়ালের কাছে সান্দ্রতার জন্য বিভিন্ন স্তরের v বিভিন্ন হওয়ায় এই স্তরগুলি লইয়া বদ্ধপথে $\oint_R \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$-এর মান বাহির করিলে দেখা যাইবে উহা শূন্য নয়। সুতরাং এ প্রকার গতি অঘূর্ণ নয়। গতিতে বেগের কার্ল থাকায় ঘূর্ণি সৃষ্টি সম্ভব। বেগ বেশী হইলে ঘূর্ণি দেওয়াল হইতে বিচ্ছিন্ন হইয়া স্রোতের সঙ্গে ভাসিয়া যাইতে পারে।

প্রবাহ অঘূর্ণ হইলে $\mathbf{v} = -\text{grad}\,\phi$ লেখা যাইবে। প্রবাহী অসংনম্য হইলে ρ-র মান স্থির। অতএব অসংনম্য প্রবাহীর অঘূর্ণ প্রবাহে

$$\rho \text{ div grad } \phi = 0$$

$$\text{বা } \nabla^2\phi = 0 \qquad (12\text{-}4.6)$$

হইবে। বেগবিভব ϕ এই সমীকরণ মানিয়া চলে ; ইহা লাপ্লাসীয় সমীকরণ। পদার্থবিদ্যার অন্যান্য ক্ষেত্রেও এই সমীকরণ পাওয়া যায়।

উদাহরণ স্বরূপ শূন্য স্থানে স্থির বৈদ্যুত বিভবের (electrostatic potential) কথা উল্লেখ করা যায়। অতএব তরলের অঘূর্ণ প্রবাহের অনেক প্রশ্নের মীমাংসা স্থির বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের অনুরূপ প্রশ্নের সমাধান হইতে পাওয়া যায়। বৈদ্যুত ক্ষেত্রের মত প্রবাহেও সমবিভব তল হয় এবং প্রবাহরেখাগুলি উহার অভিলম্বে থাকে। প্রবাহরেখার সহিত বৈদ্যুত বলরেখার প্রচুর মিল আছে।

12-5. বার্নুলির সূত্র (Bernoulli's theorem)। আদর্শ প্রবাহীর অপরিবর্তী (steady) প্রবাহে উহার উপর ক্রিয়াশীল দেহবল কেবল অভিকর্ষ-জনিত হইলে, যে কোন ধারারেখার (streamline-এর) প্রত্যেক বিন্দুতে

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gh$$

রাশিটির মান একই হয়। এখানে v = বেগ, p = চাপ, ρ = ঘনত্ব, g = অভিকর্ষীয় তীব্রতা ও h = কোন নির্দিষ্ট তল হইতে গৃহীত বিন্দুর উচ্চতা। বিভিন্ন প্রবাহ রেখায় রাশিটির মান বিভিন্ন হইতে পারে ; কিন্তু গতি অঘূর্ণ হইলে সকল প্রবাহ রেখায় রাশিটির মান একই হয়। উপরে বর্ণিত অবস্থায় ধারা রেখায়

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gh = \text{স্থিরমান} \qquad (12\text{-}5.1)$$

এই সম্পর্কটিই বার্নুলির সূত্র।

প্রবাহী অসংনম্য হইলে (অর্থাৎ কার্যতঃ তরলে) ρ-র মান সর্বত্রই স্থির। এক্ষেত্রে উপরোক্ত সমীকরণ হইয়া দাঁড়ায়

$$\tfrac{1}{2}v^2 + p/\rho + gh = \text{স্থিরমান} \qquad (12\text{-}5.2)$$

প্রবাহী সংনম্য হইলে (অর্থাৎ কার্যতঃ গ্যাসে) ρ p-র উপর নির্ভর করে। গ্যাসকে আদর্শ ধরিলে সমোষ্ণ অবস্থায় $p = RT\rho = k\rho$, এবং রুদ্ধতাপ (adiabatic) অবস্থায় $p = k'\rho^\gamma$।

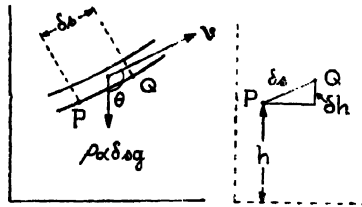
$$\text{সমোষ্ণ অবস্থায়} \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p \log \rho}{\rho} + \text{স্থিররাশি}$$

$$\text{এবং রুদ্ধতাপে} \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho} + \text{স্থিররাশি।}$$

অতএব গ্যাসে বার্নুলি সূত্রের রূপ হইবে

$$\text{সমোষ্ণ অবস্থায়}\quad \tfrac{1}{2} v^2 + \frac{p \log p}{\rho} + gh = \text{স্থিরমান} \qquad (12\text{-}5.3)$$

$$\text{ও রুদ্ধতাপে}\quad \tfrac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho} + gh = \text{স্থিরমান} \qquad (12\text{-}5.4)$$

বার্নুলি সূত্রের প্রমাণ। বার্নুলি সূত্র প্রমাণ করিতে খুব সরু একটি ধারাবাহী নলের (stream tube-এর) δs দৈর্ঘ্যের ক্ষুদ্র এক অংশ PQ নেওয়া

12.2 চিত্র

যাক (12.2 চিত্র)। প্রবাহীর গতি P হইতে Q-র দিকে। PQ-র প্রস্থচ্ছেদ α, P-তে বেগ v, চাপ p এবং স্বৈচ্ছিক কোন অনুভূমিক তল হইতে P-র উচ্চতা h। Q-তে ঐ ঐ রাশিগুলির মান যথাক্রমে $v+\delta v$, $p+\delta p$ ও $h+\delta h$। ρ প্রবাহীর ঘনত্ব হইলে PQ অংশের উপর গতি অভিমুখে অভিকর্ষজনিত বল

$$\rho\, \alpha\, \delta s\, g \cos\theta = -g\rho\, \alpha\, \delta s.\ \delta h/\delta s = -g\rho\alpha\, \delta h.$$

অতএব গতি অভিমুখে প্রবাহনলের আলোচ্য অংশের উপর মোট বল

$$p\,\alpha - (p+\delta p)\,\alpha - g\rho\alpha\delta h.$$

ইহা PQ-র ভর ও ত্বরণের গুণফলের সমান। অতএব

$$\rho\, \alpha\, \delta s\, \frac{dv}{dt} = -\alpha\, \delta p - g\, \rho\, \alpha\, \delta h$$

$$\text{বা}\quad \delta s\, \frac{dv}{dt} + \frac{dp}{\rho} + g\, \delta h = 0.$$

12-3.1 সমীকরণে $Q = v$ বসাইলে আমরা পাই

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\delta v}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla\, \mathbf{v}$$

প্রবাহ শান্ত বলিয়া $\delta v/\delta t=0$। তাছাড়া, $\mathbf{v}$ সর্বদাই প্রবাহ নলের অভিমুখে এবং উহার মান কেবল s-এর অপেক্ষক। এখানে s বলিতে প্রবাহ নলের উপর কোন স্বেচ্ছিক বিন্দু হইতে PQ-এর মধ্যবিন্দুর দূরত্ব বুঝিতে হইবে। ∇v ভেক্টরটিও প্রবাহ নলের অভিমুখে। অতএব

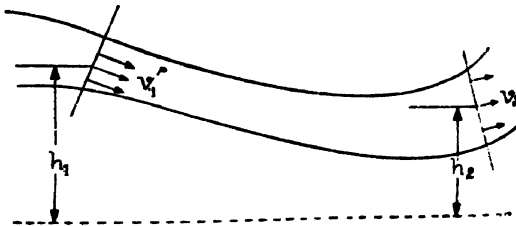
$$\frac{dv}{dt}.\delta s=v\frac{dv}{ds}.\delta s=v\,\delta v$$

$$\therefore\quad v\delta v+\frac{\delta p}{\rho}+g\,\delta\,h=0. \qquad (12\text{-}5.5)$$

δs-কে ক্ষুদ্রাদপি ক্ষুদ্র করিয়া $\delta s\to 0$ সীমায় যাইতে দিয়া এই সমীকরণের সমাকলনে পাই

$$\tfrac{1}{2}v^2+\int\frac{dp}{\rho}+gh=\text{স্থির রাশি।}$$

P আলোচ্য প্রবাহরেখার উপরস্থ যে কোন বিন্দু হইতে পারে।

শক্তি সংরক্ষণ ও বার্নুলি সূত্র। শক্তি সংরক্ষণ সূত্রের সাহায্যেও বার্নুলি সূত্রে আসা যায়। 12.3 চিত্রে একটি ধারারেখী নলের এক অংশ দেখান হইয়াছে। নল খুব সরু মনে করিতে হইবে—এত সরু যে উহার কোন ছেদের যে কোন বিন্দুতে প্রবাহীর বেগ একই ধরা চলে। এইরূপ দুই ছেদে বেগ যথাক্রমে v_1 ও v_2 ধরা যাক। আরও ধরা যাক সুবিধা মত নির্দিষ্ট কোন অনুভূমিক তল হইতে প্রথম ছেদ h_1 উচ্চতায় ও দ্বিতীয় ছেদ h_2 উচ্চতায় আছে। দুই ছেদে চাপ যথাক্রমে p_1 ও p_2।

12.3 চিত্র

নলে তরল কোথাও জমিয়া থাকে না ; প্রথম ছেদে t অবসরে m ভরের পদার্থ ঢুকিয়া থাকিলে দ্বিতীয় ছেদে ঐ অবসরে m ভর বাহির হইয়া যাইবে (অবিচ্ছিন্নতা সূত্র)। গতি ও স্থিতিশক্তিহীন কোন কাল্পিত অবস্থা হইতে এই ভর তরলকে নলের প্রথম ছেদে বর্তমান অবস্থায় আনিতে যে কার্য করিতে হয় তাহা তিন প্রকার, যথা—

(১) যে তল হইতে উচ্চতা ধরা হইয়াছে উহাকে যদি অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তিহীন তল মনে করা যায়, তাহা হইলে এই তল হইতে প্রথম ছেদের অবস্থানে m ভরকে তুলিতে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে কার্য হইয়াছে mgh_1।

(২) m ভরকে v_1 বেগ দিতে কার্য হইয়াছে $\frac{1}{2}mv_1^2$।

(৩) m ভরের পদার্থকে চাপশূন্য অবস্থা হইতে p_1 চাপে আনিতে কিছু কার্য হইয়াছে। p চাপে পদার্থের ঘনত্ব ρ হইলে ঐ চাপে m ভরের আয়তন m/ρ। এই অবস্থায় চাপ dp বাড়াইলে কার্য হইবে $dp.m/\rho$। চাপ শূন্য হইতে p_1 পর্যন্ত আনিতে মোট কার্য হইবে $m\int_0^{p_1} dp/\rho$।

প্রবাহীকে আদর্শ ধরায় উহার অভ্যন্তরীণ ঘর্ষণ (সান্দ্রতা) উপেক্ষা করা হইয়াছে। নলের পদার্থ কোন কার্যও করে না বা নলের বাহিরের পদার্থের সহিত উহার কোন শক্তি বিনিময়ও হয় না কারণ নলের পাশের দেওয়াল ভেদ করিয়া এক অংশ অন্য অংশের উপর কোন বল প্রয়োগ করে না। অতএব t অবসরে নলের প্রথম ছেদ অতিক্রম করিয়া যে পরিমাণ শক্তি প্রবেশ করিয়াছে, দ্বিতীয় ছেদ দিয়া একই অবসরে সমপরিমাণ শক্তি বাহির হইয়া যাইবে। এই কারণে

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + m\int_0^{p_1}\frac{dp}{\rho} = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + m\int_0^{p_2}\frac{dp}{\rho}$$

হইবে। নলকে খুব সরু ধরিয়া উহাকে কার্যতঃ উহার কেন্দ্রীয় শান্ত প্রবাহরেখা দ্বারা নির্দেশ করা যায়। উপরের সম্পর্ক হইতে দেখা যায় এরূপ রেখার যে কোন বিন্দুতে

$$gh + \frac{1}{2}v^2 + \int\frac{dp}{\rho} = \text{স্থিররাশি}$$

হইবে। ইহাই বার্নুলি সূত্র।

তরলের ρ দিয়া 12-5.2 সমীকরণের উভয় দিক গুণ করিলে পাই

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + g\rho h = \text{স্থিরমান} \qquad (12\text{-}5.6)$$

ইহার $\frac{1}{2}\rho v^2$ রাশিটি একক আয়তন তরলের গতিশক্তি ও $g\rho h$ উহার অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি। অতএব p রাশিটিও একক আয়তন তরলের কোন প্রকার স্থিতিশক্তি বুঝাইবে। এজন্য এবং 12-2.3 অনুচ্ছেদে উল্লিখিত কারণে চাপ p কে এক প্রকার স্থিতিশক্তির ঘনত্ব বলা যায়; ইহাকে চাপ-

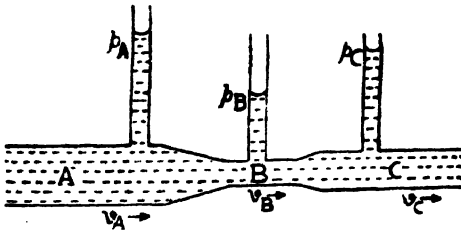
শক্তি (pressure energy) বলে। p-কে স্থিতীয় চাপ (static pressure) ও $\frac{1}{2}\rho v^2$-কে গতীয় চাপ (dynamic pressure) ও বলা হয়। তরলের ক্ষেত্রে 12-5.2 সমীকরণের উভয় দিক g দিয়া ভাগ করিলে পাই

$$\frac{1}{2}\frac{v^2}{g}+\frac{p}{g\rho}+h = \text{স্থিরমান} \qquad (12\text{-}5.7)$$

এ সমীকরণের বাঁদিকের প্রত্যেকটি পদ উচ্চতা বুঝায়। ইঞ্জিনীয়াররা h-কে elevation head বা gravity head (অভিকর্ষীয় শির), $v^2/2g$-কে velocity head বা dynamic head (গতীয় শির) এবং $p/g\rho$-কে pressure head বা static head (স্থিতীয় শির) বলেন। তিনটির যোগফলকে বলা হয় total head (মোট শির)।

তরলের চাপ যদি ঐ তরলেরই h' গভীরতার চাপের সমান হয়, তবে $p=h'\rho g$। Pressure head-এর মান তখন h'। ইহাকে elevation head-এর সঙ্গে যোগ করিয়া $h+h'=H$ হইলে, একই ধারা রেখার দুইটি বিভিন্ন বিন্দুতে বার্নুলি সূত্র অনুসারে পাইব

$$H_1+\frac{v_1^2}{2g}=H_2+\frac{v_2^2}{2g} \qquad (12\text{-}5{\cdot}8)$$

এই সমীকরণ হইতে বলা যায় H বেশী হইলে v কম এবং H কম হইলে v বেশী হইবে। ভাষায় বলা যায় অভিকর্ষীয় ও স্থিতীয় চাপ কম হইলে বেগ বেশী এবং ঐ চাপ বেশী হইলে বেগ কম হয়। সাধারণ ভাষায় বার্নুলি সূত্র প্রকাশ করিতে অনেক সময় বলা হয় 'প্রবাহের বেগ যেখানে বেশী সেখানে চাপ কম, ও যেখানে বেগ কম সেখানে চাপ বেশী।' এ উক্তি গ্যাসেও প্রযোজ্য।

12-4 চিত্র

12-6. বার্নুলি সূত্রের উদাহরণ। কতকগুলি ঘটনা বার্নুলি সূত্রের সাহায্যে সহজে বোঝা যায়। নিচে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

বেগ বেশী হইলে চাপ কম এবং বেগ কম হইলে চাপ বেশী, ইহাই উদাহরণগুলি বুঝিবার মূলতত্ত্ব।

তরলের প্রবাহে বেগ ও চাপের সম্বন্ধ বুঝিতে 12·4 চিত্রের সাহায্যে নেওয়া যায়। এখানে অসমান ছেদের অনুভূমিক অক্ষবিশিষ্ট নলে তরল প্রবাহিত হইতেছে। নলের ছেদ গোল। *A*-তে ছেদ বড়, *B*-তে ছোট এবং *C*-তে মাঝারি। তিন ছেদে তরলের বেগ যথাক্রমে v_A, v_B ও v_C। ছেদে চাপ মাপিবার জন্য নলের সঙ্গে ছোট ছোট নল উপরের দিকে জুড়িয়া দেওয়া আছে। যে ছেদে তরলের যেমন চাপ সেখানে সেই অনুসারে তরল ছোট নলে উঠিবে। একটি শান্ত প্রবাহরেখা নলের অক্ষ বরাবর থাকিবে। ইহা যে অনুভূমিক তলে সেই তল হইতে সরু নলে তরলের উপর পর্যন্ত যে খাড়া দূরত্ব তাহাই pressure head h'। সম্পূর্ণ প্রবাহরেখা একই অনুভূমিক তলে থাকায় রেখার বিভিন্ন বিন্দুতে h-এর মান একই; এই তলকেই অভিকর্ষীয় শির মাপার স্বৈচ্ছিক তল ধরিয়া $h=0$ নেওয়া যায়।

A, *B*, *C*-তে চাপ যথাক্রমে p_A, p_B ও p_C ধরা যাক। বার্নুলি সূত্র অনুসারে

$$\frac{v_A^2}{2g}+p_A=\frac{v_B^2}{2g}+p_B=\frac{v_C^2}{2g}+p_C$$

নলে তরল কোথাও জমিয়া থাকে না বলিয়া তরলের প্রবাহ হার সকল ছেদেই সমান। *A*, *B*, *C*-তে ছেদ যথাক্রমে a_A, a_B ও a_C হইলে

$$a_A\, v_A=a_B\, v_B=a_C\, v_C \text{ ।}$$

$a_A > a_C > a_B$ বলিয়া $v_A < v_C$ হইবে। অতএব আগের সমীকরণ অনুসারে

$$p_A > p_C > p_B$$

হইবে। *A*-তে সরু নলে তরল সবচেয়ে বেশী উপরে উঠিবে; *C*-তে তার চেয়ে কম এবং *B*-তে আরও কম। চিত্রে ইহা দেখান হইয়াছে।

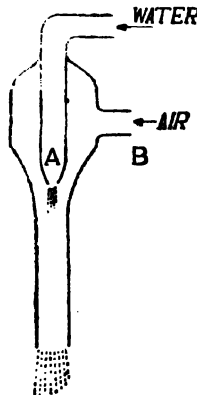
(১) ঝড়ে কখন কখন ঘরের চাল উপরে উঠিয়া যায়। ঘরের উপর দিয়া প্রবাহিত বায়ুর বেগ প্রবল থাকায় উহার চাপ কম থাকে। ঘরের ভিতরের বায়ু স্থির বলিয়া সেখানে চাপ বেশী। এই চাপ বৈষম্যে চাল বাঁধন ছিঁড়িয়া উপরে উঠিতে পারে।

(২) ঘূর্ণিঝড়ে বায়ু গোল হইয়া ঘোরে। বাহিরের দিকে উহার বেগ কম, ভিতরের দিকে বেশী। কাজেই ঘূর্ণিঝড়ের কেন্দ্রে বায়ুর চাপ

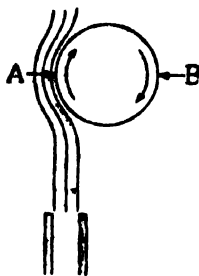
স্থিরবায়ুর চাপের চেয়ে কম। ছোট ঘূর্ণিতে এই কারণে কাগজ, পাতা, ইত্যাদি শুষিয়া উপরে উঠায়। বড় ঘূর্ণিঝড়ে গাছপালা উপড়াইয়া ফেলিতে পারে। বাড়ীঘরও বাহিরের দিকে ভাঙিয়া পড়িতে পারে, কারণ ভিতরে বায়ুর চাপ বেশী, বাহিরে কম। খুব বড় ঘূর্ণিঝড়ের কেন্দ্রে বায়ুর চাপ বায়ুমণ্ডলের চাপের চেয়ে 1—1.5 lb/in^2 কম হইতে দেখা গিয়াছে।

(৩) সহরে বোমাবর্ষণের পর দেখা গিয়াছে জানালার কাচের ভাঙা টুকরাগুলি রাস্তায় ছড়াইয়া আছে, বাড়ীর ভিতর নয়। বিস্ফোরণে বায়ু-প্রবাহ রাস্তা দিয়া তীব্রবেগে ছুটিয়া গিয়াছে। বেগ বেশী থাকায় চাপ সেখানে কম হইয়াছে। ঘরের ভিতরের বেশী চাপে কাচ ভাঙিয়া বাহিরের দিকে পড়িয়াছে।

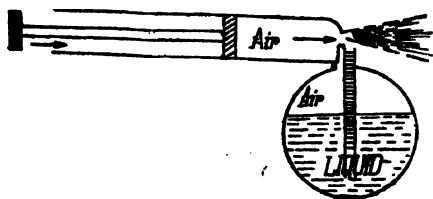
(৪) দ্রুতগামী রেলগাড়ীর কাছে দাঁড়াইয়া থাকা উচিত নয়। গাড়ী যে প্রবল বায়ুপ্রবাহ সৃষ্টি করে তাহাতে চাপ কম হয়। স্থির বায়ুর বেশী চাপ দর্শককে গাড়ীর দিকে ঠেলিয়া ফেলিতে পারে।

(৫) বুনসেন বার্নারে নলের মাঝখানে সরু মুখ হইতে গ্যাস বেগে বাহির হয়। কাজেই মুখের কাছে চাপ কম হয়। বাহিরের বায়ুর চাপ বায়ুকে গ্যাস-মুখের কাছে ঠেলিয়া দহনের অক্সিজেন জোগায়।

12.5 চিত্র

(৬) জলধারার পাম্পও (water-jet pump) এইভাবে ক্রিয়া করে। ইহার সাহায্যে বদ্ধ পাত্রে গ্যাসের চাপ কমাইয়া কয়েক সেন্টিমিটার পারার, কার্যতঃ জলের বাষ্পচাপের কাছাকাছি, নামান যায়। 12.5 চিত্রে ইহার

ব্যবস্থা দেখান হইয়াছে। জলের কলের মুখ হইতে জল A নলের সরু মুখ দিয়া বেগে বাহির হয়। জলধারার বেগ বেশী থাকায় উহার ভিতরে চাপ কম হয়। ফলে বাহিরের বায়ু B পথে ভিতরে প্রবেশ করে। এই বায়ুর যে অংশ জলধারার ভিতরে গিয়া পড়ে তাহা ধাক্কায় নিচের পথে বাহির

12.6 চিত্র

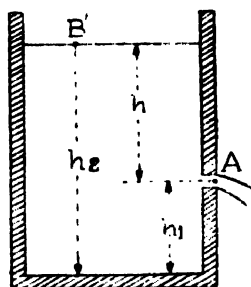
হইয়া যায়। কোন বন্ধ গ্যাস পাত্রের সঙ্গে B-র যোগ থাকিলে পাত্র হইতে এইভাবে অণু কমিতে থাকিবে। জলের বাষ্পও ব্যাপনে (diffusion) পাত্রের ভিতরে ঢুকিবে। এই কারণে বন্ধ পাত্রের ভিতরের চাপ জলীয় বাষ্পের চাপের নিচে আনা যায় না। পাত্রে চাপ কার্যতঃ আরও কিছু বেশী থাকে।

(৭) একই কারণে ঊর্ধ্বমুখী জলধারার গায়ে পিংপং বল লাগিয়া থাকে (12.6 চিত্র)। ধারার বেগের জন্য ধারার ভিতরে চাপ কম। বায়ুমণ্ডলের চাপ ধারার গায়ে বলকে চাপিয়া রাখে। ধারার গতির জন্য বল ঘুরিতে

12.7 চিত্র

থাকে। অবস্থার সামান্য তারতম্যে বল কখন একটু উপরে ওঠে, কখন একটু নামে।

(৮) স্প্রে করিবার যন্ত্রে (12.7 চিত্র) একটি পাত্রে স্প্রে করিবার তরল থাকে। তরলের উপরে কিছু বায়ু থাকে এবং একটি সরু নল তরলের প্রায় নিচ পর্যন্ত ডুবান থাকে। স্প্রের সংনমিত বায়ুর ধারা এই নলের মুখের উপর দিয়া প্রবাহিত হওয়ায় নলের মুখে তরলের উপর চাপ কমে, এবং পাত্রের বায়ু নল দিয়া তরল উপরে ঠেলিয়া দেয়। বায়ুর ধারায় মিশিয়া তরল সূক্ষ্ম কণার আকারে ছড়ায়।

12-7. বার্নুলি সূত্রের তিনটি প্রয়োগ। নিচে বার্নুলি সূত্রের তিনটি প্রয়োগ আমরা আলোচনা করিব। প্রথমটি তাত্ত্বিক ও পরের দুইটি ব্যবহারিক।

12-7.1. টরিচেল্লির সূত্র (Torricelli's theorem)। তরলের পাত্রে কোথাও ছোট একটি ছেঁদা করিলে, ছেঁদা দিয়া তরল কি বেগে বাহির হইবে তাহা টরিচেল্লির সূত্রের সাহায্যে পাওয়া যায়। বার্নুলি সূত্র হইতে সহজেই টরিচেল্লির সূত্রে আসা যায়।

12.8 চিত্র

12.8 চিত্রে পাত্রের তরল ছোট একটি ছেঁদা দিয়া বাহির হইতেছে। ছেঁদার উপরে তরলের উচ্চতা h এবং নিচে h_1। তরলের মোট গভীরতা $h+h_1=h_2$। ছেঁদার বাহিরের মুখে A বিন্দু ও তরলের পিঠে B বিন্দু নেওয়া গেল। উভয় বিন্দুতেই বায়ুমণ্ডলের চাপ P ক্রিয়া করে। যে প্রবাহ নল তরলের পিঠে আরম্ভ হইয়া ছেঁদার মুখে শেষ হইয়াছে এমন একটি সরু নলের কথা ধরা যাক। ছেঁদা ছোট হইলে পাত্রে তরলের পিঠ খুব আস্তে আস্তে নামিবে। কাজেই তরলের পিঠে বেগ শূন্য ধরা যায়। তরলের নিচের তল হইতে উচ্চতা মাপিলে, এবং A অবস্থানের রাশিগুলি 1 সংখ্যা দিয়া ও B

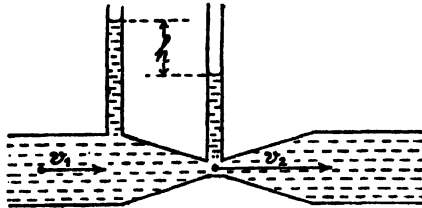
অবস্থানের রাশিগুলি 2 সংখ্যা দিয়া বুঝাইলে, আলোচ্য সরু প্রবাহনলে (বা প্রবাহরেখায়) বার্নুলি সূত্র প্রয়োগ করিয়া পাই

$$h_1+\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}=h_2+0+\frac{p}{\rho g}$$

বা $\quad v_1^2=2g(h_2-h_1)=2gh \qquad (12\text{-}7.1)$

ইহাই টরিচেল্লির সূত্র। সূত্র হইতে দেখা যায় নির্গত তরলের বেগ বিনা বাধায় h উচ্চতা হইতে পড়ন্ত বস্তুর বেগের সমান। অতএব ছেঁদার মুখ ঘুরাইয়া উপরের দিকে করিয়া দিলে নির্গত তরল পাত্রের তরলের সমান উচ্চতায় উঠিতে পারা উচিত। সান্দ্রতার জন্য নির্গত তরল এতটা উঠিতে পারে না, তরলের বেগ $\sqrt{2gh}$ অপেক্ষা কিছু কম হয়। মনে রাখিতে হইবে বার্নুলি সূত্র পাইতে আমরা তরলের সান্দ্রতা উপেক্ষা করিয়াছি।

ছিদ্রের ছেদ S হইলে প্রতি সেকেণ্ডে $Sv=S\sqrt{2gh}$ আয়তনের তরল পাত্র হইতে বাহির হইয়া যাইবে।

প্রবাহরেখাগুলি তরলের পিঠে আরম্ভ হইয়া ছিদ্রের দিকে যায়। ছিদ্রের কাছে উহাদের কিছুটা অভিসারিতা (convergence) থাকে বলিয়া প্রবাহ নলের ছেদ ছিদ্রের একটু বাহিরে আসিয়া সবচেয়ে কম হয়। এই স্থানকে

12.9 চিত্র

vena contracta বলে। প্রতি সেকেণ্ডে নির্গত তলের আয়তন পাইতে S (অর্থাৎ ছিদ্রের প্রস্থচ্ছেদ) না ধরিয়া vena contracta-র প্রস্থচ্ছেদ নেওয়া উচিত। কম বেধের দেওয়ালে গোল ছেঁদা থাকিলে vena contracta-র ছেদ ছেঁদার ছেদের প্রায় 65% হয়।

12-7.2. ভেণ্টুরি মিটার (Venturi meter)। তরলবাহী নলে প্রতি সেকেণ্ডে কতখানি তরল প্রবাহিত হইতেছে তাহা মাপিতে ভেণ্টুরি মিটার ব্যবহার করা হয়। ইহার ক্রিয়া বার্নুলি সূত্রের উপর নির্ভর করে।

12.9 চিত্রের সাহায্যে এই মিটারের ক্রিয়া বোঝা যায়। ইহার দুই পাশে সমান মোটা নল এবং মাঝের অংশ ক্রমশঃ সরু। নলে প্রবাহিত তরলকে ইহার মধ্য দিয়া চালনা করা হয়। গঠনের গুণে মিটারে তরল শান্ত প্রবাহে চলে। উহাকে অনুভূমিক রাখা হয়। নলের মোটা অংশে তরলের বেগ v_1 ও চাপ p_1, এবং সরু অংশে বেগ v_2 ও চাপ p_2 হইলে বার্নুলি সূত্র অনুসারে

$$p_1+\tfrac{1}{2}\rho v_1{}^2=p_2+\tfrac{1}{2}\rho v_2{}^2 \qquad (12\text{-}7.2)$$

হইবে। নল অনুভূমিক থাকায় elevation head $h_1=h_2$ হয় বলিয়া সমীকরণে উহা বাদ যায়।

$v_2>v_1$ হওয়াতে $p_2<p_1$ হইবে, অর্থাৎ সরু অংশে তরলের চাপ কম। মিটারের মোটা ও সরু অংশে উপরের দিকে অন্য নল জোড়া থাকিলে এই দুই নলে তরলের উচ্চতার প্রভেদ h হইতে p_1-p_2 পাওয়া যাইবে কারণ $p_1-p_2=h\rho g$। ρ তরলের ঘনত্ব।

মোটা অংশে ছেদ S_1 ও সরু অংশে ছেদ S_2 হইলে, $S_1v_1=S_2v_2$ বা $v_2=v_1S_1/S_2$। 12-7.2 সমীকরণে v_2-র এই মান বসাইয়া পাই

$$p_1-p_2=\tfrac{1}{2}\rho\{(v_1S_1/S_2)^2-v_1{}^2\}=\tfrac{1}{2}\rho v_1{}^2\{(S_1/S_2)^2-1\}$$

$$\therefore \quad v_1=\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho\{(S_1/S_2)^2-1\}}}=\sqrt{\frac{2gh}{(S_1/S_2)^2-1}} \qquad (12\text{-}7.3)$$

অতএব প্রতি সেকেণ্ডে প্রবাহিত তরলের আয়তন

$$S_1v_1=S_1\left\{\frac{2gh}{(S_1/S_2)^2-1}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (12\text{-}7.4)$$

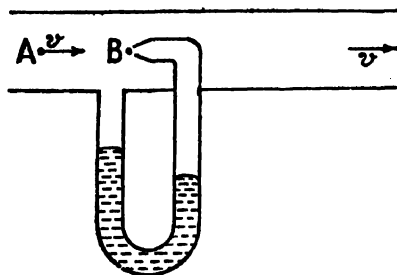
যন্ত্রের গঠন হইতে S_1 ও S_2 জানা থাকে।

12-7.3. পিটো নল (Pitot tube)। পিটো নল সাধারণতঃ একমুখ খোলা একটি নল; উহার অন্য মুখ কোন প্রেষমানের সঙ্গে যুক্ত থাকে। তরল বা গ্যাসপ্রবাহের মাপজোখে ইহা অতি প্রয়োজনীয় একটি যন্ত্র। ইহার সাহায্যে প্রবাহের যে কোন স্থানে স্থিতীয় চাপ (static pressure ; 12-5.6 সমীকরণের p) এবং গতীয় চাপ (dynamic pressure ; ঐ সমীকরণের $\frac{1}{2}\rho v^2$)-এর যোগফল পাওয়া যায়। এই যোগফলকে 'বদ্ধ চাপ' (stagnation pressure) বলে।

নলের খোলামুখ প্রবাহের গতির বিপরীত দিকে ফিরান থাকে। প্রেষমান যে চাপ নির্দেশ করে তাহার মান

$$P = p + \tfrac{1}{2}\rho v^2. \qquad (12\text{-}7.5)$$

নলে প্রবেশ করিয়া প্রবাহ থামিয়া যায় বলিয়া নলের ভিতরে চাপ p অপেক্ষা বেশী হয়। নদীতে গভীরতার সহিত জলস্রোতের বেগ কিভাবে বদলায় তাহা মাপিতে পিটো 1732 সালে প্রথম এই নল ব্যবহার করেন।

মোটা নলে গ্যাস বা তরলের বেগ কি করিয়া পিটো নলে মাপা যায় তাহা 12.10 এবং 12.11 চিত্রে বুঝান হইয়াছে। 12.10 চিত্রে পিটো নলের খোলা মুখ B এবং উহা একটি খোলা মুখ প্রেষমানের সঙ্গে যুক্ত। প্রেষমানের খোলা মুখ প্রবাহের সমান্তরালে প্রবাহ নলে আটকান। B মুখ প্রবাহের অভিলম্বে। B-র সমান উচ্চতায় A প্রবাহের কোন একটি বিন্দু।

12.10 চিত্র

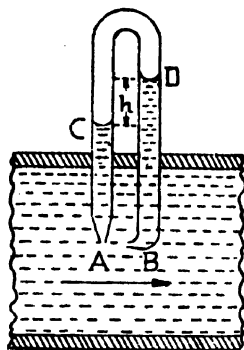
B ও A প্রবাহরেখা দিয়া যোগ করিলে বার্নুলি সূত্র অনুসারে A বিন্দুতে মোট শির (total head) $= h_1 + v_1^2/2g + p_1/\rho g$, এবং B বিন্দুতে উহা $= h_2 + v_2^2/2g + p_2/\rho g$। উভয় বিন্দু একই উচ্চতায় থাকায় $h_1 = h_2$। $v_1 = v =$ প্রবাহের বেগ। $v_2 = 0$। প্রেষমানের বাঁ নল p_1 চাপ পায়; ডান নল পায় p_2। প্রেষমান এই দুই চাপের তফাৎ নির্দেশ করে। এইভাবে বার্নুলি সূত্র হইতে পাই

$$v^2/2g + p_1/g\rho = p_2/g\rho$$

$$\text{বা}\ \ p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v^2 \qquad (12\text{-}7.6)$$

12.11 চিত্রে AC নল p_1 চাপ নির্দেশ করে; পিটো নল BD দেয় $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v^2$। A মুখ প্রবাহের সমান্তরালে, এবং B মুখে একই

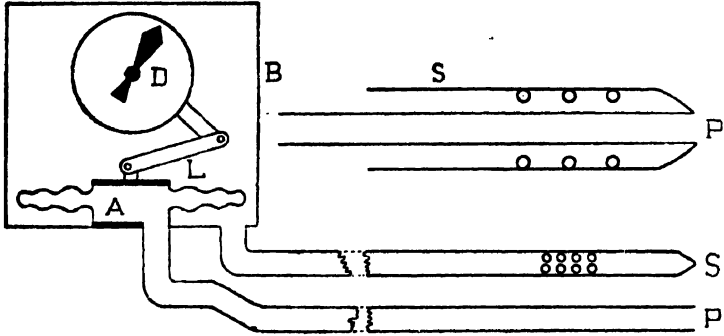
উচ্চতায় প্রবাহের অভিলম্বে। $p_2 - p_1 = h\rho g$। h দুই নলে তরলের উচ্চতায় প্রভেদ। $v^2 = 2gh$ হয়।

পিটো নলের বাহিরের ব্যাস ও প্রবাহের বেগ এমন হওয়া উচিত যে উহাদের লইয়া গঠিত রেনল্ডস সংখ্যা যেন 500-এর বেশী হয়। নহিলে পিটো নলে বার্নুলি সূত্র প্রয়োগ ঠিক হইবে না।

12.11 চিত্র

বায়ুসাপেক্ষ বেগমান (Air speed indicator)। পিটো নলের সাহায্যে এরোপ্লেনে বায়ুর বেগ মাপা যায়। ইহাকে বায়ুসাপেক্ষ বেগমান (Air speed indicator), সংক্ষেপে ASI, বলা হয়। 12.12 চিত্রে যন্ত্রের ব্যবস্থা বুঝান হইয়াছে। *P* একটি পিটো নলের খোলা মুখ। উহার অন্য মুখ পাতলা দেওয়ালের কুঠরি *A*-তে লাগান। মোটা দেওয়ালের বন্ধ কুঠরি *B*-র মধ্যে *A* রাখা থাকে। *B*-তে যুক্ত আর একটি নল *S* পিটো নলকে সমাক্ষভাবে ঘেরিয়া থাকে। ইহার মুখ বন্ধ, কিন্তু পাশের দেওয়ালে কয়েকটি ছেঁদা আছে। *S*-নলকে Pitot static head বলে। *A*-র উপরের পিঠে লাগান লিভার (*L*) ইত্যাদির সাহায্যে একটি কাঁটা স্কেল *D*-র উপর ঘুরিতে পারে।

A-র পাতলা দেওয়াল ঢেউ খেলান। *A*-র ভিতরে ও বাহিরে চাপের প্রভেদ হইলে উহার উপরের পিঠ ওঠে বা নামে। *D*-র উপরে কাঁটা ঘুরিয়া চাপের এই প্রভেদের মান নির্দেশ করে। *A*-কে differential aneroid manometer বা তরলহীন প্রভেদক প্রেষমান বলে।

এরোপ্লেনের ডানার নীচে নল দুটি থাকে। static head-টি সাধারণতঃ পিটো নলকে ঘেরিয়া সমাক্ষে থাকে। *B* থাকে চালকের কাছে। প্লেন

চলিতে থাকিলে S-এর ছেঁদাগুলি দিয়া বাহিরের বায়ুর স্থির চাপ (p_1) B-র ভিতর দিয়া A-র বাহিরের অংশে সংক্রমিত হয়। P মারফত A-র ভিতরের দিকে যে চাপ হয় তাহা এই স্থির চাপ ও গতিজনিত চাপ

12.12 চিত্র

(dynamic pressure) $\frac{1}{2}\rho v^2$-এর যোগফল (12-7.5 সমীকরণ)। কাজেই D কেবল $\frac{1}{2}\rho v^2$ চাপ নির্দেশ করে। বায়ু ঘনত্ব ρ জানা থাকিলে D-র পাঠ হইতে v (অর্থাৎ প্লেন সাপেক্ষে বায়ুর বেগ বা বায়ু সাপেক্ষে প্লেনের বেগ) পাওয়া যায়।

12-8. আদর্শ প্রবাহীর গতীয় সমীকরণ (Equation of motion of an ideal fluid)। এ পর্যন্ত আমরা আলোচনা কার্যতঃ শুদ্ধ গতি-বিজ্ঞানেই আবদ্ধ রাখিয়াছি; প্রবাহীর উপর ক্রিয়াশীল বল বিবেচনায় লইতে হয় নাই। এ অনুচ্ছেদে ক্রিয়াশীল বলের সহিত ত্বরণের সম্পর্ক দেখা হইবে; ইহাই গতীয় সমীকরণ।

ধরা যাক চাপ p ছাড়া প্রবাহীর উপর প্রতি একক আয়তনে $\mathbf{f}$ বাহ্যবল ক্রিয়া করে। চাপের জন্য প্রতি একক আয়তনে প্রবাহীর উপর যে বল ক্রিয়া করে 12-2 অনুচ্ছেদে আমরা দেখিয়াছি তাহার মান $-\nabla p$। অতএব প্রবাহীর ভিতরে স্বল্পাংশ আয়তন δV ধরিলে উহার উপর বল হইবে $(\mathbf{f}-\nabla p)\delta V$। প্রতি একক ভরের উপর বল হইবে $(\mathbf{f}-\nabla p)\delta V/\rho\delta V=(1/\rho)(\mathbf{f}-\nabla p)$। ইহা δV-র মধ্যস্থিত প্রবাহীর ত্বরণের সমান।

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v} \qquad \text{(12-3.2 সমীকরণ দেখ)}$$

δV আয়তনকে অতি ক্ষুদ্র করিয়া কণা হিসাবে দেখিলে গতীয় সমীকরণ হইবে

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}=\frac{1}{\rho}(\mathbf{f}-\nabla p) \quad (12\text{-}8.1)$$

$\mathbf{v}.\nabla$-রূপী গাণিতিক সংকারকের অর্থ $v_x.\frac{\partial}{\partial x}+v_y.\frac{\partial}{\partial y}+v_z.\frac{\partial}{\partial z}$; ইহা স্কেলার সংস্কারক। ভেক্টর $\mathbf{v}$-র উপর ক্রিয়া করিয়া ইহা একটি ভেক্টর দিবে। এই ভেক্টরের x উপাংশ $v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}$। অন্য দুটি উপাংশ অনুরূপ। বলের x উপাংশ $(1/\rho)(f_x-\partial p/\partial x)$। উপাংশে লিখিলে x-অক্ষে 12-8.1 সমীকরণের রূপ হইবে

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\left(f_x-\frac{\partial p}{\partial x}\right) \quad (12\ 8.2)$$

y ও z অক্ষে অনুরূপ দুইটি সমীকরণ হইবে।

মনে রাখিতে হইবে $\mathbf{f}$ বাহ্য দেহবলের ঘনত্ব, অর্থাৎ প্রতি একক আয়তনে প্রযুক্ত বাহ্যবল। প্রবাহীর উপর দেহবল অভিকর্ষজনিত হইলে $\mathbf{f}=\rho\mathbf{g}$। অভীকর্ষীয় ক্ষেত্রে Φ একক ভরের স্থিতিশক্তি হইলে, $\mathbf{g}=-\nabla\Phi$ এবং $\mathbf{f}=-\rho\nabla\Phi$।

শান্ত প্রবাহ। শান্ত প্রবাহে যে কোন বিন্দুতে $\mathbf{v}$-র মান স্থির থাকে: অতএব $\partial\mathbf{v}/\partial t=0$ হয়। তখন গতীয় সমীকরণ হইবে

$$(\mathbf{v}.\ \nabla)\ \mathbf{v}=(1/\rho)\ (\mathbf{f}-\nabla p) \quad (12\text{-}8.3)$$

দেহবল অভিকর্ষের ক্রিয়াজনিত হইয়া থাকিলে $\mathbf{f}=-\rho\nabla\Phi$ বলিয়া গতীয় সমীকরণ হয়

$$(\mathbf{v}.\nabla)\ \mathbf{v}=-(\nabla\Phi+\frac{1}{\rho}\nabla p) \quad (12\text{-}8.4)$$

12-8.1 বার্নুলি সূত্র। 12-8.4 সমীকরণ হইতে বার্নুলি সূত্রে যাওয়া যায়। প্রবাহীর ভিতরে কোন শান্ত প্রবাহরেখার স্বল্পাংশ দৈর্ঘ্য $d\mathbf{s}=\mathbf{i}dx+\mathbf{j}dy+\mathbf{k}dz$ লেখা যাক। 12-8.4 সমীকরণের উভয় দিককে $d\mathbf{s}$ দিয়া স্কেলার গুণন করিলে পাই

$$(\mathbf{v}.\nabla)\ \mathbf{v}.d\mathbf{s}+(\nabla.\Phi d\mathbf{s}+\frac{1}{\rho}\nabla p.d\mathbf{s})=0 \quad (12\text{-}8.5)$$

গ্রেডিয়েন্টের ধর্ম অনুসারে $\nabla\Phi.d\mathbf{s}=d\Phi$ এবং $\nabla p.d\mathbf{s}=dp$ (2-9.4 সমীকরণ)। তাছাড়া

$$(\mathbf{v}.\nabla)\,\mathbf{v}.d\mathbf{s}=\{(\mathbf{v}.\nabla)v_x\}\,dx+\{(\mathbf{v}.\nabla)v_y\}\,dy+\{(\mathbf{v}.\nabla)v_z\}\,dz \quad \text{(A)}$$

ইহার ডানদিকের প্রথম পদটির মান

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}dx+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}dx+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}dx. \quad \text{(B)}$$

$dx=v_x dt,\ dy=v_y dt$ এবং $dz=v_z dt$ বলিয়া লেখা যায়

$$v_y dx=v_y v_x dt=v_x dy \text{ এবং } v_z dx=v_z v_x dt=v_x dz.$$

অতএব (B) পদটির মান হয়

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}dx+v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}dy+v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}dz=v_x dv_x$$

অনুরূপে $(A$-)র ডানদিকের দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ যথাক্রমে হইয়া দাঁড়ায় $v_y dv_y$ ও $v_z dv_z$। অতএব 12-8.5 সমীকরণের রূপ হয়

$$(v_x\,dv_x+v_y\,dv_y+v_z\,dv_z)+d\Phi+(1/\rho)dp=0$$

আলোচ্য প্রবাহরেখায় ইহার সমাকলনে পাই

$$\tfrac{1}{2}v^2+\Phi+\int\frac{dp}{\rho}=\text{স্থির রাশি}$$

Φ একক ভরের অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি। যে তলে ইহার মান শূন্য ধরা হইবে সেই তল সাপেক্ষে আলোচ্য বিন্দুর উচ্চতা h হইলে $\Phi=gh$। এইভাবে 12-5.1 সমীকরণ পাওয়া যায়।

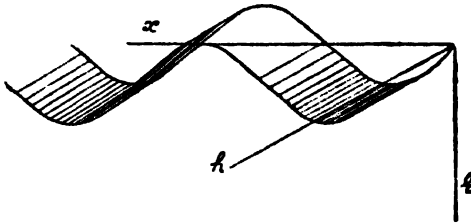
অঘূর্ণ প্রবাহে বার্নুলি সূত্র। এ পর্যন্ত আমরা শান্ত প্রবাহে বার্নুলি সূত্রের আলোচনা করিয়াছি। ঐ ক্ষেত্রে প্রবাহ অঘূর্ণ হইতে পারে, নাও হইতে পারে। প্রবাহ অঘূর্ণ হইলে আমরা $\mathbf{v}=-\nabla\phi$ লিখিতে পারি (ϕ = বেগবিভব)। $\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})=0$ এবং $(\nabla v^2)/2-(\mathbf{v}.\nabla)\,\mathbf{v}=0$ বলিয়া 12-8.1 সমীকরণ হইতে আমরা পাই

$$\nabla\dot{\phi}+\tfrac{1}{2}\,\nabla v^2+\nabla\Phi+\frac{1}{\rho}\,\nabla p=0$$

এখানে আমরা f অভিকর্ষ ক্রিয়াজনিত ধরিয়াছি। অতএব $f=-\rho\,\nabla\Phi$। যে কোন স্বল্পাংশ দৈর্ঘ্য $d\mathbf{s}$ দিয়া স্কেলার গুণন করিয়া ও যে কোন রেখার উপর কোন নির্দিষ্ট সময়ে সমাকলন করিলে পাই, (ρ = স্থির রাশি),

$$\dot{\phi}+\tfrac{1}{2}\,v^2+\Phi+\frac{p}{\rho}=\text{স্থির রাশি} \quad (12\text{-}8.6)$$

ইহাই অঘূর্ণ প্রবাহে বার্নুলি সূত্র। প্রবাহ শান্ত হইলে $\dot{\phi}=0$ হইবে (ϕ = বেগ বিভব)। 12-8.6 সমীকরণে স্থির সংখ্যাটি তরলের সর্বত্র একই হইবে কিন্তু সময়ের সহিত উহার পরিবর্তন হইতে পারে।

12·9. তরলপৃষ্ঠে পৃষ্ঠতরঙ্গের বেগ। মনে করা যাক কোন পাত্রস্থ তরলে 12.13 চিত্রের অনুরূপ পৃষ্ঠতরঙ্গ (surface waves) প্রবাহিত হইতেছে। x অক্ষ প্রবাহের দিকে ও z অক্ষ তরল পৃষ্ঠের অভিলম্বে উপরের দিকে নেওয়া হইয়াছে। y অক্ষে তরল পৃষ্ঠের কোন বক্রতা নাই। পাত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ উভয়ই তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ-র তুলনায় অনেক বড় ধরা হইয়াছে।

12.13 চিত্র

ফলে কিনারা হইতে তরঙ্গের প্রতিফলন উপেক্ষা করা যাইতে পারে। তরলের স্বাভাবিক তল অনুভূমিক এবং উহার উচ্চতা $z=0$ ধরা যাক। তরঙ্গ প্রবাহের ফলে তরলের পৃষ্ঠে ও ভিতরে প্রতিটি কণা সরল দোল গতিতে আন্দোলিত হইবে। উহাদের গতি z ও x উভয় দিকেই থাকিবে। আমরা যেরূপ তরঙ্গের আলোচনা করিতেছি তাহাতে y দিকে কোন গতি থাকিবে না। এরূপ ক্ষেত্রে বেগবিভব ϕ-কে আমরা লিখিতে পারি

$$\phi = A(z)\sin(\omega t - kx) \tag{12-8.7}$$

এখানে ω = তরঙ্গের কৌণিক কম্পাংক, $k=2\pi/\lambda$। $A(z)$ একটি অজানা অপেক্ষক। $\nabla^2\phi=0$ (12-4.6 সমীকরণ) হইতে পাই,

$$d^2A/dz^2 = k^2A(z), \text{ অর্থাৎ } A(z) = \alpha \exp kz + \beta \exp(-kz)\text{।}$$

পাত্রে তরলের গভীরতা $z=-h$ হইলে, ঐখানে $v_z = -\partial\phi/\partial z = 0$ হইবে কারণ পাত্রের সবচেয়ে নিচের তরল স্তরে গতি নাই। অতএব $\alpha\exp(-kh)+\beta\exp kh=0$। ইহা হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$A(z) = A_0 \cosh k(z+h)$$

$$\text{এবং}\quad \phi = A_0\cosh k(z+h)\sin(\omega t - kx) \tag{12-8.8}$$

$v_x = -\partial\phi/\partial x$ এবং $v_z = -\partial\phi/\partial z$ এবং $v=\sqrt{v_x^2+v_z^2}$ বলিয়া উপরের সমীকরণের সাহায্যে পাই

$$v \propto kA_0 = 2\pi A_0/\lambda$$

আমরা ধরিব A_0 রাশিটি λ-র তুলনায় অত্যন্ত কম। এই কারণে $(A_0/\lambda)^2$ মানের সংখ্যা উপেক্ষা করা যাইবে। ইহাতে বার্নুলির 12.8-6 সূত্রের v^2 রাশিটি উপেক্ষণীয় হয়। $v^2 \propto (A_0/\lambda)^2 \simeq 0$ ও $\Phi - gz$ বলিয়া 12-8.6 সমীকরণে মানগুলি বসাইলে পাই

$$\omega A_0 \cosh k(z+h) \cos(\omega t - kx) + gz + p/\rho = \text{স্থির রাশি} \tag{12-8.9}$$

তরলের পৃষ্ঠের কোন বিন্দুতে যদি বক্রতা $1/R$ হয় তবে পৃষ্ঠটানের জন্য ঐ স্থানে চাপ হইবে $p = p_0 - \gamma/R$ (γ = তরলের পৃষ্ঠটান ও p_0 = বায়ুর চাপ)। যদি তরলের স্বাভাবিক তল হইতে তরল পৃষ্ঠের উচ্চতা কোন স্থানে ζ হয় ($\zeta < h$) তবে তরল পৃষ্ঠে 12-8.9 সমীকরণ প্রয়োগ করিলে পাই

$$\omega A_0 \cosh kh \cos(\omega t - kx) + g\zeta - \frac{\gamma}{\rho}\frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2} = \text{স্থির রাশি।}$$

x ও t-র সহিত ζ তরঙ্গের আকারে পরিবর্তিত হইবে। অতএব স্থির রাশিটি এক্ষেত্রে কেবল t-র উপর নির্ভর করিতে পারে না। সুতরাং উহা সময় নিরপেক্ষ হইবে। উপরের সমীকরণ সময় সাপেক্ষে অবকলন করিলে পাই, ($\dot{\zeta} = v_z$),

$$-\omega^2 A_0 \cosh kh \sin(\omega t - kx) + gv_z - \frac{\gamma}{\rho}\frac{\delta^2 v_z}{\delta x^2} = 0$$

$v_z = -\delta\phi/\delta z$ বলিয়া 12-8.8 সমীকরণ ব্যবহার করিয়া পাওয়া যায়

$$\omega^2 = k^3\gamma/\rho + gk$$

এবং তরঙ্গের বেগ c হইলে

$$c^2 = \omega^2/k^2 = \frac{k\gamma}{\rho} + \frac{g}{k} = \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} + \frac{\lambda g}{2\pi} \tag{12-8.10}$$

10.7 অনুচ্ছেদে এই সমীকরণ ব্যবহার করিয়া পৃষ্ঠটান মাপার পদ্ধতি বর্ণনা করা হইয়াছে।

12-8.10 সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করিতে তরঙ্গকণার গতিশক্তি ($\propto v^2$) আমরা উপেক্ষা করিয়াছি। ইহার জন্য তরঙ্গের বিস্তার (amplitude) $A_0 k/\omega$ খুব কম হওয়া দরকার। $A_0 k (= 2\pi A_0/\lambda)$ উপেক্ষণীয় ধরা হইয়াছে। তাহাতেই প্রয়োজনীয় শর্ত পালিত হইয়াছে। তা ছাড়া, তরঙ্গের বিস্তার (ζ_{max}) তরলের গভীরতার তুলনায় অনেক ছোট হইতে হইবে ($\zeta_{max} < h$)।

প্রশ্ন

1. আদর্শ প্রবাহী কাহাকে বলে? দেহবলের অধীন আদর্শ প্রবাহীর সাম্যের শর্ত বাহির কর। এরূপ দেহবল কি শর্ত পূর্ণ করে?

সাম্যের শর্ত হইতে (ক) প্যাস্কালের চাপ সঞ্চালন সূত্র বা আর্কিমিডিসের সূত্র এবং (খ) বায়ুমণ্ডলের চাপের সূত্র বাহির কর।

2. প্রবাহীর প্রবাহক্ষেত্র বলিতে কি বুঝায়? প্রবাহক্ষেত্র বর্ণনায় কি কি রাশি গুরুত্বপূর্ণ? প্রবাহরেখা কাহাকে বলে? কি অবস্থায় প্রবাহ শান্ত বলা হয়? 'প্রবাহরেখা' ও 'ধারারেখায়' কোন প্রভেদ থাকিলে বুঝাইয়া বল।

প্রবাহক্ষেত্রে পরিবর্তনীয় কোন রাশির সময়ের সহিত পরিবর্তনের হার দুই রকম হইতে পারে কেন? ইহাদের কোন্‌টিকে কিভাবে ধরা হয় বুঝাইয়া বল এবং

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}.\nabla$$

রূপী সংকারক সমীকরণটি ব্যাখ্যা কর।

3. প্রবাহীর গতিতে অবিচ্ছিন্নতা সূত্র কি এবং উহা দ্বারা কি বুঝায়? উহার গাণিতিক রূপ প্রতিষ্ঠা কর। শান্ত প্রবাহে ইহার রূপ কি হইবে?

অঘূর্ণ প্রবাহ এবং বেগবিভব বলিতে কি বুঝায়। ϕ বেগবিভব বুঝাইলে $\nabla^2\phi=0$ সমীকরণ কোন্ ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হইবে বুঝাইয়া বল।

4. বার্নুলি সূত্রটি কি? উহার গাণিতিকরূপ প্রতিষ্ঠা কর। অভিকর্ষীয় শির, গতীয় শির ও স্থিতীয় শির কাহাকে বলে?

বার্নুলি সূত্রের সঙ্গে শক্তি সংরক্ষণের সম্পর্ক কি?

বার্নুলি ক্রিয়ার দুটি উদাহরণ দাও ও উহাদের ব্যাখ্যা কর।

5. টরিচেল্লির সূত্র প্রতিষ্ঠা কর। কার্যত: ইহার ব্যতিক্রম হয় কেন?

কোন চৌবাচ্চার পাশের খাড়া দেওয়ালে একটি ছিদ্র আছে। ছিদ্র জলের উপরের তল হইতে 9 ft নিচে থাকিলে জল কি বেগে উহা হইতে নির্গত হইবে?

এই জলধারা নলের সাহায্যে বায়ুপূর্ণ কোন বদ্ধ পাত্রে চালনা করিলে ঐ পাত্রে চাপ কত হইবে? [উত্তর : 24 ft/sec ; 9 ft জল]।

6. বার্নুলি সূত্রের সাহায্যে নলে প্রবহমান তরলের প্রবাহ হার ও প্লেনের বায়ুসাপেক্ষ বেগ কিভাবে বাহির করা যায় তাহা প্রয়োজনীয় যন্ত্রের বর্ণনা দিয়া ব্যাখ্যা কর।

7. ভেনটুরিমিটার ও পিটো নলের ক্রিয়া ব্যাখ্যা কর। কোন্‌টির সাহায্যে কি মাপা যায় বুঝাইয়া বল।

8. আদর্শ প্রবাহীর গতীয় সমীকরণ স্থাপনা কর ও উহার সাহায্যে বার্নুলি সূত্র প্রতিষ্ঠা কর।

9. প্রবহমান তরলের স্থিতীয় ও গতীয় চাপ বলিতে কি বুঝায়? উহাদের কি ভাবে মাপা যায়? এইরূপ মাপনের সাহায্যে প্রবাহের বেগ কিভাবে জানা যায়?

1.2 cm ব্যাসের নলে কি বেগে জল প্রবাহিত হইলে গতীয় চাপ 0·25 cm জলের সমান হইবে? প্রতি সেকেণ্ডে নল দিয়া কত জল যাইবে? [উত্তর : 22·1 cm/s ; 25 cm^3/s]

10. কোন নলের ব্যাস এক স্থানে 2 cm, এবং ঐ স্থান হইতে 40 cm নিচে উহার ব্যাস 1 cm। নলে জল 30 cm^3/s হারে বহিতেছে। দুই স্থানে চাপের প্রভেদ কত cm জলের চাপের সমান? [উত্তর : 39·3]

11. একটি অনুভূমিক নলের দুই স্থানে ব্যাসার্ধ 0·5 cm ও 0·3 cm এবং প্রবহমান জলে ঐ দুই স্থানের চাপের প্রভেদ 1 cm জল। প্রবাহের হার কত? [উত্তর : 13·4 cm^3/s]

12. অসংনম্য, সান্দ্রতাহীন প্রবাহীর শান্ত প্রবাহে বার্নুলি সূত্রের রূপ কি? সমীকরণের বিভিন্ন পদের মাত্রাঘটিত মিল আছে দেখাও।

গোল প্রস্থচ্ছেদের ক্রমশ সরু একটি নলের এক প্রান্তের ব্যাস 10·0 cm ও অন্য প্রান্তের 7·5 cm। ইহার অক্ষ অনুভূমিক এবং ইহা দিয়া উপরে বর্ণিতরূপে প্রবাহ চলিতেছে। নলের দুই প্রান্তে চাপ বৈষম্য 25 cm পারা। কোন্ প্রান্তে প্রবাহীর বেগ কত? (প্রবাহীর ঘনত্ব = 1 g/cm^3 ; পারার ঘনত্ব 13·6 g/cm^3 ; $g = 981$ cm/s^2) [উত্তর : 5·56 ও 9·88 m/s]

13. আদর্শ প্রবাহীর কোন শান্ত প্রবাহরেখায় খুব কাছাকাছি দুই বিন্দুতে বিভিন্ন রাশির মধ্যে নিম্নলিখিত সম্পর্ক থাকে প্রমাণ কর—

$$g\,\delta h + v\delta v + \frac{\delta p}{\rho} = 0.$$

প্রবাহী গ্যাস হইলে, h-এর ক্রিয়া উপেক্ষা করিয়া এবং রুদ্ধতাপ (p/ρ^γ = স্থির) অবস্থা ধরিয়া প্রমাণ কর।

$$v^2/2g + Ap^n = \text{স্থির রাশি।}$$

এখানে A একটি স্থিরমান রাশি এবং $n = 1 - 1/\gamma$।

14. উপরের প্রশ্নে বর্ণিত গ্যাসের প্রবাহে সমোষ্ণ (p/ρ = স্থির) অবস্থা ধরিলে শেষের সম্পর্কটি কি হইবে?

15. বিস্তৃত তরল পৃষ্ঠে পৃষ্ঠতরঙ্গের বেগ হিসাব কর। কি কি শর্তাধীন অবস্থায় বেগের এই মান হইবে?

ত্রয়োদশ পরিচ্ছেদ

ব্রাউনীয় গতি

(Brownian Movements)

13·1. অবতরণিকা (Introduction)। 'পদার্থের ধর্ম' আলোচনার গণ্ডী বহু বিস্তৃত। কার্যত পদার্থ সংক্রান্ত সকল বিষয়ই ইহার অন্তর্গত বলিয়া ধরা যায়। বাস্তবে সীমিত গণ্ডীর ভিতরে এরূপ আলোচনা সম্ভব নয়। কাজেই 'পদার্থের ধর্ম' আলোচনায় প্রচলিত রীতি অনুসারে কেবল কয়েকটি বিষয়ের আলোচনা করা হয়। কিন্তু এই বিষয়গুলি কি কি হইবে সে বিষয়ে সকলে একমত নন।

বিচার করিয়া দেখিতে গেলে পদার্থের ধর্ম আলোচনায় প্রথমেই আসিয়া পড়ে পদার্থ মাত্রেরই কি কি ধর্ম আছে। জাড্য ও মহাকর্ষ এরূপ দুটি ধর্ম। পদার্থ মাত্রই স্থান ও কাল ব্যাপিয়া থাকে এজাতীয় আলোচনা আমরা সৃষ্টি ও জ্ঞান সংক্রান্ত দর্শন-শাস্ত্রের (Metaphysics-এর) অন্তর্গত মনে করি।

ইহার পরে আসে পদার্থ যে কঠিন, তরল ও বায়বীয় অবস্থায় থাকিতে পারে তাহার কারণই বা কি এবং ঐ সকল বিভিন্ন অবস্থার মৌলিক ধর্মই বা কি। মৌলিক ধর্মগুলির ব্যাখ্যা আমাদের পদার্থের উপাদানভূত অণু ও পরমাণুর সাহায্যে করিতে হইবে।

অণু পরমাণুর সাহায্যে কঠিন পদার্থের ধর্মের ব্যাখ্যায় (Solid state Physics-এ) আমরা বেশ খানিকটা আগাইয়াছি। চিকিৎসা শাস্ত্রে যেমন দৈহিক গঠনতন্ত্র বা শারীরস্থান (Anatomy), জীবনধারা সংক্রান্ত বিজ্ঞান বা শারীরবৃত্ত (Physiology), বিকারতত্ত্ব (Pathology) প্রভৃতি বিভিন্ন বিভাগ আছে, কঠিন পদার্থের ধর্মগুলিকে অনুরূপ ভাগ করিয়া উহাদের সম্বন্ধে অনেক কিছু জানা গিয়াছে। কেলাসের গঠন (Crystallography), ধাতু, সংকর ধাতু, আয়নিত কেলাস প্রভৃতি গঠন শারীরস্থানের মত এক বিভাগ। আপেক্ষিক তাপ, তাপীয় কম্পন, তাপীয় ও বৈদ্যুত পরিবাহিতা, নৈজ অর্ধপরিবাহিতা (Intrinsic semiconductivity) প্রভৃতি শারীরবৃত্তের অনুরূপ। বিশুদ্ধ কেলাস গঠনে ত্রুটি ঘটায় তাহার জন্য অপবস্তুভিত্তিক অর্ধপরিবাহিতা (Impurity semiconductivity), স্থিতিস্থাপকতা প্রভৃতি ধর্ম দেখা যায়। ইহা বিকার তত্ত্বের অনুরূপ।

তরলের ক্ষেত্রে আমাদের জ্ঞান অত্যন্ত সীমিত। হিমাংকের কাছাকাছি তরলের সঙ্গে কঠিনের কিছু মিল আছে। ক্রান্তিক উষ্ণতার (critical tem-

perature-এর) কাছাকাছি গ্যাসের সঙ্গে উহার প্রচুর মিল। ইহা কেন এবং মাঝখানে পরিবর্তন ক্রমশঃ কিভাবে হয় আমরা জানি না। তরলের পৃষ্ঠটানের গুণগত (qualitative) ব্যাখ্যা দিতে পারিলেও সঠিক মাত্রাগত (quantitative) ব্যাখ্যা আমরা দিতে পারি নাই। তরলে সান্দ্রতার প্রক্রিয়া গ্যাসের চেয়ে আলাদা ইহা জানি, কিন্তু সে প্রক্রিয়া কি তাহা সঠিক জানা যায় নাই। দ্বিধ্রুব অণুবিশিষ্ট তরল (liquid with molecular dipoles) এবং অধ্রুবিত অণুবিশিষ্ট তরলের আচরণের সকল প্রকার প্রভেদ এখনও জানা যায় নাই।

গ্যাসীয় অবস্থা সম্বন্ধেই আমাদের জ্ঞান তুলনায় সবচেয়ে বেশী। ইহার প্রধান কারণ গ্যাসকণার পারস্পরিক আকর্ষণের ক্ষীণতা। কঠিনে এরূপ আকর্ষণ ও বিকর্ষণ উভয়ই প্রবল। তরলের বিকর্ষণ প্রায় কঠিনের মতই ; কিন্তু আকর্ষণের প্রকৃতি জটিল।

গ্যাসের ধর্মের আলোচনা গ্যাসের গতীয় তত্ত্বের (Kinetic theory of gases-এর) উপর প্রতিষ্ঠিত। ইহাতে কয়েকটি বিষয় মানিয়া লওয়া হয়—যেমন কণাগুলির শাশ্বত, এলোমেলো গতি (eternal, random motion), পরস্পরের সঙ্গে স্থিতিস্থাপক ধাক্কা (elastic collisions), ইত্যাদি। গ্যাস-অণুর শাশ্বত এলোমেলো গতি চাক্ষুষ দেখিতে পাওয়া সম্ভব নয়। কিন্তু বিশেষ অবস্থায় ক্ষুদ্র কণায় এরূপ গতি আমরা দেখিতে পাই। ইহার নাম ব্রাউনীয় গতি। গ্যাসের ক্ষেত্রে আমরা যাহা মানিয়া লইয়াছি তাহার মৌলিক একটির চাক্ষুষ প্রমাণ অবশ্যই অতি মূল্যবান। ব্রাউনীয় গতি তাহাই জোগায়।

13-2. ব্রাউনীয় গতি (Brownian movements)। বৃটিশ উদ্ভিদ্-বিজ্ঞানী রবার্ট ব্রাউন 1827 খ্রীস্টাব্দে এক প্রকার অপ্রত্যাশিত গতি আবিষ্কার করেন। তিনি শক্তিশালী মাইক্রোস্কোপের সাহায্যে দেখিতে পান জলে নিলম্বিত (suspended) পরাগরেণু (pollen grain) যেন বিনা কারণেই অবিরাম ইতস্ততঃ ছুটাছুটি করিয়া বেড়াইতেছে। এ গতি কমেও না থামেও না ; অবিরত চলিতে থাকে। এই গতিকে 'ব্রাউনীয় গতি' (Brownian movements) নাম দেওয়া হয়। জলে বা বায়ুতে নিলম্বিত $10^{-3}-10^{-5}$ cm ব্যাসের কঠিন বা তরল কণায় এই গতি দেখিতে পাওয়া যায়। জলের চেয়ে বায়ুতে, এবং বড়র চেয়ে ছোট কণায় ব্রাউনীয় গতি বেশী পরিস্ফুট।

ব্রাউনীয় গতির কারণ এবং অর্থ অনুসন্ধান করিতে প্রথমেই নিচে বলা প্রধান প্রধান ঘটনাগুলি প্রতিষ্ঠিত হয়।

(১) ব্রাউনীয় গতি অবিচ্ছিন্ন, বিরামহীন ও সম্পূর্ণ এলোমেলো (random)। কণার যে কোন দিকে চলিবার সম্ভাব্যতা (probability) সমান। কাছাকাছি অবস্থিত দুইটি কণা কখনও একই সময়ে একই দিকে চলে না।

(২) আধারের কোন রকম কম্পনের উপর ব্রাউনীয় গতি নির্ভর করে না।

(৩) মাধ্যমের সান্দ্রতা কম হইলে গতি বেশী পরিস্ফুট হয়। জলের চেয়ে বায়ুতে গতি অনেক বেশী পরিস্ফুট।

(৪) ছোট কণার গতি বড় কণার গতির চেয়ে বেশী জোরাল।

(৫) একই পদার্থের সমান আকারের দুইটি কণা একই উষ্ণতায় গড়ে সমান বেগে চলে।

(৬) উষ্ণতা বাড়িলে গতিও বাড়ে।

উপরোক্ত ঘটনাগুলির ব্যাখ্যা পদার্থের গতীয় তত্ত্বের (kinetic theory of matter-এর) ভিত্তিতে সুষ্ঠুভাবে দেওয়া যায়। নিলম্বিত পদার্থকণাগুলি মাধ্যমের অণুর তুলনায় $10^6 - 10^{12}$ গুণ বড়। অণুগুলি তাপীয় গতির (thermal motion-এর) জন্য অবিরাম তীব্রবেগে ছুটিয়া বেড়ায়, এবং গতিপথে যাহা পড়ে তাহাতেই ধাক্কা দেয়। নিলম্বিত কণাগুলি আকারে বড় হইলে গড়ে সকল দিক হইতে উহার উপর অণুগুলির ধাক্কা সমান হয়। কিন্তু কণা আকারে যথেষ্ট ছোট হইলে সকল দিক হইতে অণুর ধাক্কা সমান না হইবার সম্ভাবনা বাড়ে। এই কারণে ছোট কণার উপর অপ্রতিমিত (unbalanced) বল ক্রিয়া করে এবং কণা এরূপ বলের অভিমুখে চলে। অণুর গতি সম্পূর্ণ এলোমেলো বলিয়া কণার ধাক্কাগুলিও এলোমেলো হয়; ইহাতে অপ্রতিমিত বলের প্রকৃতিও হয় এলোমেলো। স্থান পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে অপ্রতিমিত বলের মান ও দিক্ অনির্দিষ্টভাবে বদলায়। এজন্য কণার গতির অভিমুখও এলোমেলো ভাবে বদলায়। স্বভাবতঃই কণার ভর যত কম হয়, সমান বলের ক্রিয়ায় উহার গতি তত বেশী হয়। মাধ্যমের সান্দ্রতা কণার গতিতে বাধা দেয়; অতএব সান্দ্রতা কম হইলে গতি বাড়ে। উষ্ণতা বাড়িলে অণুর তাপীয় গতি (thermal motion) বাড়ে। তাহার ফলে উষ্ণতা বৃদ্ধিতে একই

কণার উপর ক্রিয়াশীল বলের মানও বাড়ে এবং উহার গতি আরও জোরাল হয়।

উপরের ব্যাখ্যা হইতে ভাবা যায় কণাগুলি যেন পদার্থের বড় অণু। মাধ্যমের অণুর কম্পিত তাপীয় গতির মতই উহাদের গতি। ব্রাউনীয় কণার গতি চোখে দেখা যায়। এই গতিই অণুর গতির চাক্ষুষ প্রতিরূপ। এইরূপ ভাবিলে গতীয়-তত্ত্ব (kinetic theory) এই কণাগুলিতেও প্রয়োগ করা যায় এবং ধরা যায় অণুর মত ইহাদের গড় গতিশক্তি $=\frac{3}{2}kT$। কণাগুলির ভর অণুর তুলনায় অনেক বেশী হওয়ায় ইহাদের বেগ ও সরণ অণুর বেগ ও সরণের তুলনায় অনেক কম। (সান্দ্রতার বাধা ইহা আরও কমায়।) গড় মুক্ত পথ ইহাদের ক্ষেত্রে খুবই কম হইবে। ব্রাউনীয় কণার গতি অণুর গতির অতি খর্বিত প্রতিরূপ।

কণাগুলি অণুর মতই আচরণ করিলে অণুর অন্য কোন কোন ধর্মও ইহাতে দেখা যাইবে। আমরা জানি গ্যাসের দীর্ঘস্তম্ভে (বায়ুর কথা ভাব) আণবিক ঘনত্ব উচ্চতার সঙ্গে এক্‌স্‌পোনেন্‌টীয় ভাবে কমে ; ইহাকে **বায়ুমণ্ডলীয় সূত্র (Law of atmospheres)** বলে। ব্রাউনীয় গতি যদি তাপীয় গতির জন্যই হয় তাহা হইলে কোন তরলে অতি ক্ষুদ্র কণার অবদ্রব (emulsion) বায়ুমণ্ডলীয় সূত্র মানিয়া চলিবে। পের‍্যাঁ (Perrin) ইহার সত্যতা প্রমাণ করেন। এই পরীক্ষা হইতেই তিনি আভোগাড্রোর সংখ্যার মানও বাহির করেন। এই সংখ্যার গৃহীত মান ($N_A=6.023\times10^{23}$/mole) ও পের‍্যাঁর লব্ধ মান কাছাকাছি। ব্রাউনীয় গতি যে তাপীয় গতিরই চাক্ষুষ প্রমাণ এই মিল তাহা সমর্থন করে।

13-3. কলয়্‌ড্‌ অবদ্রব বায়ুমণ্ডলীয় সূত্র মানে ; পের‍্যাঁর কাজ (Colloidal suspensions obey the law of atmospheres ; Perrin's work)। আস্রাবণ (osmosis) এবং দ্রবণ সংক্রান্ত ভৌত রসায়ন (physical chemistry) হইতে জানা আছে যে, যে সকল অণু জলীয় দ্রবণে বিযোজিত (dissociated) হয় না (ধর যেমন চিনির অণু), তাহারা জলে দ্রাবিত থাকিলে দ্রবণের আধারে গ্যাসের মত চাপ দেয়। যে আয়তনের লঘু দ্রবণে যতটুকু চিনি দ্রাবিত হইয়াছে, ঐ আয়তন জুড়িয়া সেইটুকু চিনির অণুগুলি গ্যাসের মত ছড়াইয়া থাকিলে গ্যাস যে চাপ দিত দ্রবণে চিনির অণুর চাপ তাহাই। সুবিধার জন্য মনে করা যাক, জলে নিলম্বিত যে সকল কলয়্‌ড্‌ (colloid) কণায় ব্রাউনীয় গতি দেখা যায় তাহারা উপরোক্ত চিনির অণুর মত দ্রবণের আধারে চাপ দেয় এবং আদর্শ গ্যাসকণার মত আচরণ করে।

কোন কলয়ড দ্রবণে একক প্রস্থচ্ছেদের একটি খাড়া স্তম্ভ কল্পনা কর। কণাগুলির জন্য h ও $h+dh$ উচ্চতায় চাপ যথাক্রমে p ও $p-dp$ ধর। ঐ h উচ্চতায় কণার সংখ্যাঘনত্ব মনে কর n এবং প্রত্যেকটি কণার কার্যকর (effective) ভর m'। স্তম্ভের dh বেধের অংশে স্থিত ndh সংখ্যক কণাগুলির ওজনের জন্য $h+dh$ অবস্থানের চাপ $p-dp$ h-অবস্থানে বাড়িয়া p হইয়াছে। অতএব

$$dp = -nm'g\,dh$$

(h বাড়িলে p কমে বলিয়া ঋণ চিহ্নটি আসিয়াছে।)

গ্যাসের গতীয় তত্ত্ব (kinetic theory of gases) অনুসারে $p=nkT$ (k = বোলৎস্‌মান নিত্যসংখ্যা, T অনপেক্ষ উষ্ণতা ও n সংখ্যাঘনত্ব)। অতএব $dp=kT\,dn$ এবং

$$kT\,dn = -nm'g\,dh \quad \text{বা} \quad \frac{dn}{n} = -\frac{m'g}{kT}dh \tag{13-3.1}$$

স্তম্ভের h_1 উচ্চতায় কণার সংখ্যাঘনত্ব n_1 এবং h_2 উচ্চতায় উহা n_2 ধরা যাক। উচ্চতার এই দুই সীমার মধ্যে উপরের সমীকরণটি সমাকলন করিয়া পাই

$$\int_{n_1}^{n_2}\frac{dn}{n} = -\frac{m'g}{kT}\int_{h_1}^{h_2} dh \quad \text{বা} \quad \ln\frac{n_2}{n_1} = -\frac{m'g}{kT}(h_2-h_1)$$

R = সার্বিক গ্যাসীয় নিত্যসংখ্যা (universal gas constant) এবং N_A = আভোগাড্রো সংখ্যা হইলে $k=R/N_A$। অতএব শেষ সমীকরণটির রূপ হয়

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left\{-\frac{m'gN_A}{RT}(h_2-h_1)\right\} \tag{13-3.2}$$

ইহাই বায়ুমণ্ডলীয় সূত্র (law of atmospheres)। গাম ম্যাস্টিক (gum mastic) এবং গ্যাম্বোজ (gamboge) নামে দুইটি রজন (resin) মিশ্রিত উদ্ভিজ্জ আঠার কলয়ড দ্রবণের (অবদ্রবের) সাহায্যে পের‍্যাঁ 13-3.2 সমীকরণের সত্যতা প্রমাণ করেন এবং উহা হইতে আভোগাড্রো সংখ্যা N_A-র মান বাহির করেন।

পের‍্যাঁর পরীক্ষায় সমান আকারের কলয়ড কণা পাইতে তিনি

প্রথমে আঠা অ্যালকোহলে গুলিয়া জলে ঢালিয়া অবদ্রব (emulsion) তৈয়ারি করেন ও ঐ অবদ্রব বার বার সেণ্ট্রিফিউজ (centrifuge) করিয়া সমান আকার কণা আলাদা করেন। সমান আকারের কণাবিশিষ্ট শেষ অবদ্রবের অল্প একটু অংশ শক্তিশালী মাইক্রোস্কোপে পরীক্ষা করা হয়। মাইক্রোস্কোপের ফোকাসের গভীরতা (depth of focus) df খুব কম ছিল। কণাগুলি পাশ হইতে আলোকিত। ইহাতে মাইক্রোস্কোপের দৃষ্টিক্ষেত্র (field of view) অন্ধকার থাকে এবং কেবল কলয়ড কণাগুলি দিয়া বিচ্ছুরিত (scattered) আলো মাইক্রোস্কোপে প্রবেশ করে। কণাগুলি অন্ধকার পটভূমিতে এক একটি আলোর কণার মত দেখায়। দৃষ্টিক্ষেত্রের পরিসর A হইলে Adf আয়তনের তরলের ভিতরে যে কণাগুলি আছে কেবল তাহাদেরই দেখা যায়। উহাদের সংখ্যা গণা সহজ। পেরাঁ বিভিন্ন উচ্চতায় এই সংখ্যা মাপেন। এইভাবে n_1, n_2 এবং h_1-h_2 পাওয়া যায়। g, R, T জানা রাশি। ইহার পর কেবল কণাগুলির 'কার্যকর' ভর m' জানা বাকী থাকে।

কণাগুলির পদার্থের ঘনত্ব ρ, অবদ্রবের তরলের ঘনত্ব σ ও কণার ব্যাসার্ধ r হইলে $m'=\frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\sigma)$। পেরাঁ তিনটি বিভিন্ন উপায়ে ρ মাপেন—(১) শুকনা আঠার ঘনত্ব মাপিয়া, (২) পিক্‌নোমিটার (pyknometer বা ঘনত্বমাপক বোতল)-এর সাহায্যে অবদ্রবের ঘনত্ব মাপিয়া এবং (৩) অবদ্রবে লবণ গুলিয়া উহার ঘনত্ব কণাগুলির ঘনত্বের সমান করিয়া। তিনভাবে মাপা ρ-তে প্রভেদ 10^3 অংশে 1 অংশের মত ছিল।

কণার ব্যাসার্ধ r ও তিনভাবে মাপা হইয়াছিল। আমরা কেবল একটির বর্ণনা দিব। অবদ্রব থিতাইতে দিলে কণাগুলি স্টোক্‌স্ সূত্র অনুসারে সীমান্ত বেগে নিচে পড়িবে। অতএব সম্পর্ক হইবে

$$6\pi\eta rv=\frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\sigma)g\ (=m'g)$$

$$\text{বা}\quad m'=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{9}{2}\eta\right)^{3/2}\left\{\frac{1}{(\rho-\sigma)g}\right\}^{3/2}v^{3/2}\rho$$

সীমান্ত বেগ v মাইক্রোস্কোপের সাহায্যে মাপা হয়। তিনভাবে মাপা m'-এ প্রভেদ 1%-এর মধ্যে ছিল।

এইভাবে 13-3.2 সমীকরণের সত্যতা যাচাই করার সকল উপাত্ত পাওয়া যায়। বিভিন্ন পরীক্ষায় ব্যবস্থার নানারকম পরিবর্তন করা হয়। ইহাতে ফলে একমুখী ত্রুটির (systematic error-এর) সম্ভাবনা কমে। বিভিন্ন পরীক্ষায়

তিনি N_A-র মান $6{\cdot}2\times10^{23}$ হইতে $7{\cdot}2\times10^{23}$-এর মধ্যে পান। পরীক্ষার জটিলতা বিবেচনা করিলে N_A-র সূক্ষ্মতম মান $6{\cdot}0225\times10^{23}$-এর সঙ্গে পের‍্যার পাওয়া মানের মিল খুবই ভাল মনে করিতে হইবে। এই মিল হইতে সিদ্ধান্ত করা যায় লঘু কলয়ড দ্রবণের ব্রাউনীয় গতিতে গ্যাসের গতীয় তত্ত্ব প্রযোজ্য, এবং ব্রাউনীয় কণার গতি গ্যাসকণার গতির অনুরূপ।

13-4. ব্রাউনীয় গতিতে কণার সরণ (Displacement of particles in Brownian motion)। ব্রাউনীয় গতি গ্যাসকণার গতির খর্বিত রূপ এবং ব্রাউনীয় গতিতে গ্যাসের গতীয় তত্ত্ব প্রযোজ্য, অবদ্রবে নিলম্বিত কণার সরণ মাপিয়াও ইহার সমর্থন পাওয়া যায়। এ উদ্দেশ্যে ব্যবহৃত মাইক্রোস্কোপের নেত্রিকার (eye-piece-এর) ফোকাস তলে গ্রাফকাগজে যেমন চৌকা ছক কাটা থাকে ঐ রকম ছক কাটা কাচের পাত (graticule) থাকা দরকার। দৃষ্টিক্ষেত্রে যেসব কণা দেখা যাইবে তাহাদের অবস্থান ঐ ছকের সাহায্যে সহজেই স্থির করা যাইবে।

গ্যাসের গতীয় তত্ত্বের ভিত্তিতে ব্রাউনীয় কণার যে কোন এক অক্ষে বর্গ-মাধ্য সরণ (mean square displacement) কত হইবে তাহা প্রথমে প্রায় একই সঙ্গে আইনস্টাইন ও স্মোলুকভ্স্কি (Einstein and Smoluchowski) বাহির করেন (1906)। পরে (1908) ফরাসী বৈজ্ঞানিক লাঁজভাঁ (Langevin) উহাকে সরলতর রূপ দেন। ইহা নিচে দেখান হইল।

মনে কর কোন মুহূর্তে ব্রাউনীয় কণার উপর অণুগুলির সংঘাতজনিত অপ্রতিমিত (unbalanced) বলের x-অক্ষীয় অংশের মান X। ইহার গতিতে মাধ্যমের সান্দ্রতাজনিত বাধা কণার বেগের আনুপাতিক। অতএব x-অক্ষে কণার গতীয় সমীকরণ

$$m\ddot{x}=-\alpha\dot{x}+X \tag{13-4.1}$$

সুবিধার জন্য সমীকরণের উভয় দিক x দিয়া গুণ করা যাক। সহজেই দেখা যায়

$$x\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x^2)-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

অতএব
$$\frac{1}{2}m\frac{d^2}{dt^2}x^2-m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}(x^2)+Xx \tag{13-4.2}$$

পর পর দুই আণবিক সংঘর্ষের মধ্যে অতিক্রান্ত সময় τ হইলে, τ-এর তুলনায় অনেক দীর্ঘ t অবসরে ($t > \tau$) উপরের সমীকরণের প্রত্যেকটি পদের গড়মান কত হয় দেখা যাক। এরূপ করিলে সমীকরণের বাঁ দিকের পদ x-অক্ষে কণার গড় গতিশক্তির দ্বিগুণ হইবে। গ্যাসের গতীয় তত্ত্ব অনুসারে এই মান kT। X সম্পূর্ণ এলোমেলো (random) হওয়ায় দীর্ঘকালে উহার গড়মান শূন্য। x রাশিটি সম্বন্ধেও ইহা সত্য। অতএব Xx-এর গড়মান শূন্য ধরা যায়। x^2 রাশিটির গড়মান $\bar{x}^2$ রূপে এবং $(d/dt)(\bar{x}^2) = z$ লেখা যাক। তাহা হইলে 13-4.2 সমীকরণ হইয়া দাঁড়ায়

$$\tfrac{1}{2}m\frac{d}{dt}z - kT = \tfrac{1}{2}\alpha z$$

$$\text{বা} \quad \frac{dz}{z - 2kT/\alpha} = -\frac{\alpha}{m}dt \tag{13-4 3}$$

$t = 0$ তে $z = 0$ এবং $t = t$ তে $z = z$ ধরিয়া উপরের সমীকরণ সমাকলন করিলে পাই

$$\Big| \ln(z - 2kT/\alpha)\Big|_0^z = -\frac{\alpha}{m}\Big| t \Big|_0^t$$

$$\text{বা} \quad \ln(z - 2kT/\alpha) - \ln(-2kT/\alpha) = -(\alpha/m)t$$

$$\text{বা} \quad \ln\left(\frac{z}{-2kT/\alpha} + 1\right) = -(\alpha/m)t$$

$$\text{বা} \quad 1 - \frac{z\alpha}{2kT} = \exp(-\alpha t/m) \tag{13-4.4}$$

α-র মান স্টোক্‌স্‌ সূত্র অনুসারে মোটামুটি $6\pi\eta r$ বলিয়া ধরা যায়। $r = 10^{-4}$ cm এবং $\eta = 10^{-2}$ P ধরিলে α/m প্রায় 10^{-6} ক্রমের হয়। t প্রায় এক সেকেণ্ড ধরিলে 13-4.4 সমীকরণের এক্‌স্‌পোনেণ্টীয় রাশিটি সম্পূর্ণ উপেক্ষণীয় হয়। অতএব এই সমীকরণের রূপ হয়

$$1 - \frac{2z\alpha}{2kT} = 0 \quad \text{বা} \quad z\left(= \frac{d}{dt}\bar{x}^2\right) = 2kT/\alpha$$

এক সেকেণ্ড ক্রমের কোন কালের অবকাশে উপরের সমীকরণ সমাকলন করিয়া পাই

$$x^2 = 2kT\,t_0/\alpha \tag{13-4.5}$$

আলোচ্য ক্ষেত্রে স্টোক্‌স্ সূত্র প্রযোজ্য ধরিলে $\alpha = 6\pi\eta r$ বলিয়া

$$\overline{x^2} = \frac{kT\, t_o}{3\,\pi\eta r} = \frac{RT}{3\,\pi N_A \eta r}\, t_o \qquad (13\text{-}4.6)$$

পরীক্ষায় t_0 (=প্রায় এক সেকেণ্ড বা কিছু বেশী) সময় পর পর বিভিন্ন কণার অবস্থান মাইক্রোস্কোপের ছকে (graticule-এ) দেখা হয়। এই অবস্থানগুলি গ্রাফকাগজে নির্দেশ করিয়া পর পর দুই অবস্থানের মধ্যে বিশেষ কোন অক্ষে (ইহাই x-অক্ষ) দূরত্ব কত তাহাই মাপা হয়। ইহাই x, এবং x-এর মান কখন পজিটিভ, কখন নিগেটিভ। x^2 বাহির করিয়া বহু সংখ্যক x^2-এর গড় মান নেওয়া হয়। ইহাই $\overline{x^2}$।

পেরাঁ 13-4.6 সমীকরণও হাজার হাজার মাপন দিয়া যাচাই করেন। বিভিন্ন মাপনে r-এর মান $0{\cdot}2 \times 10^{-4}$ হইতে 5×10^{-4} cm-এর মধ্যে ছিল। যে সব তরল নেওয়া হইয়াছিল তাহাদের η ছিল 1 cP হইতে 125 cP (centipoise)-র মধ্যে। বিভিন্ন পরীক্ষার মধ্যে সঙ্গতি ছিল এবং N_A-র মান পাওয়া গিয়াছিল $5{\cdot}5 \times 10^{23}$ হইতে $8{\cdot}0 \times 10^{23}$-র মধ্যে।

অবদ্রবের বিভিন্ন গভীরতায় ব্রাউনীয় কণার সংখ্যাঘনত্ব মাপিয়া এবং ব্রাউনীয় কণার $\overline{x^2}$ মাপিয়া N_A-র মানে যে মিল পাওয়া যায় তাহাতে নিঃসন্দেহে বিশ্বাস করা যায় আমরা ব্রাউনীয় গতির কারণ বলিয়া যাহা ধরিয়াছি তাহা সত্য। পরে (1911 খ্রীঃ) গ্যাসে নিলম্বিত অতিক্ষুদ্র কণা লইয়া পরীক্ষা করা হয়। গ্যাসে ব্রাউনীয় গতি অনেক প্রকট। ইহাও আগের সিদ্ধান্ত সমর্থন করে।

প্রশ্ন

1. ব্রাউনীয় গতি কাহাকে বলে? উহা কি কারণে ঘটে?

2. ব্রাউনীয় গতির কারণ বলিয়া আমরা যাহা মনে করি তাহার সত্যতা কি ভাবে যাচাই হইয়াছে?

3. ব্রাউনীয় গতি গ্যাস কণার গতির অতিবর্ধিত রূপ একথা বলার তাৎপর্য কি?

4. কলয়ড অবদ্রবের বিভিন্ন গভীরতায় ব্রাউনীয় কলয়ড কণার সংখ্যাঘনত্ব মাপিয়া পেরাঁ যে পরীক্ষা করিয়াছিলেন ব্রাউনীয় গতির তত্ত্ব সম্বন্ধে তাহা কি আলোকপাত করে? তত্ত্বসমেত পেরাঁর এই পরীক্ষা বর্ণনা কর।

5. কোন অক্ষে ব্রাউনীয় কণার গতির গড় বর্গ কত হইবে তাহার একটি সমীকরণ স্থাপন কর। ইহার জন্য তুমি কি কি বিষয় মানিয়া লইলে তাহা স্পষ্ট করিয়া বলিও। পরীক্ষার সাহায্যে এই সমীকরণ কিভাবে যাচাই করিবে সংক্ষেপে বল। এই পরীক্ষার গুরুত্ব কি?

চতুর্দশ পরিচ্ছেদ

পাম্প ও প্রেষমান

(Pumps and manometers)

14-1. সূচনা। 1915 খৃষ্টাব্দে Gaede ব্যাপন পাম্প (Diffusion pump) উদ্ভাবন করার পর হইতে অতিমাত্রার শূন্যতা বা 'উচ্চ নির্বাত' (High vacuum) সৃষ্টির কলাকৌশল দ্রুত আগাইয়া গিয়াছে। ইহার ফলে নির্বাত আলো (vacuum lamps), রেডিও ভ্যাল্‌ভ্‌, টেলিভিশন টিউব ও নির্বাত আধারে ক্রিয়াশীল নানাবিধ যন্ত্রের উদ্ভাবন ও উৎপাদন সম্ভব হইয়াছে। তাছাড়া, যে সকল ক্রিয়া বায়ুর উপস্থিতিতে ব্যাহত হয়, নির্বাত আধারে সেগুলি ঘটান সম্ভব হইয়াছে এবং তাহার ফলে নানাবিধ শিল্পও গড়িয়া উঠিয়াছে। পরমাণুর কেন্দ্রক সংক্রান্ত অধিকাংশ কাজেই নির্বাত আধারের প্রয়োজন হয়।

'নির্বাত' (vacuum) অর্থে সম্পূর্ণ বায়ু শূন্য অবস্থা বুঝায় না। কিছু বায়ু সর্বদাই পাত্রে থাকে। পাত্রস্থ বায়ু যে চাপ দেয় তাহা দ্বারাই পাত্রের নির্বাত অবস্থা বুঝান হয়। যে উচ্চতার পারাস্তম্ভ ঐ পরিমাণ ঔদ (hydrostatic) চাপ দেয় তাহা দ্বারাই পাত্রের শূন্যতার পরিমাণ বুঝান হয়। এক মিলিমিটার উচ্চ পারাস্তম্ভ যে চাপ দেয় তাহাকেই শূন্যতা বুঝাইবার চাপের একক ধরা হয়। ইটালীয় বৈজ্ঞানিক টরিচেল্লির (Torricelli) সম্মানার্থে এই এককের নাম দেওয়া হইয়াছে 'টর' (torr)।

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mmHg}$$

যথার্থ বলিতে গেলে, সংজ্ঞা অনুসারে

$$\begin{aligned} 1 \text{ torr} &= 1{,}013{,}250/760 \text{ dyn/cm}^2 \\ &= 1333{\cdot}224 \text{ dyn/cm}^2 \end{aligned}$$

1 mmHg-র সহিত ইহার কোন প্রভেদ থাকিলে উহা 10^7 অংশে 2 অংশের অনধিক।

760 mmHg হইতে 10^{-3} mmHg পর্যন্ত শূন্যতাকে 'আংশিক নির্বাত' (partial vacuum) ধরা হয়। 10^{-3} হইতে 10^{-8} টরের শূন্যতাকে 'উচ্চ নির্বাত' (high vacuum), এবং চাপ আরও কম হইলে উহাকে 'অত্যুচ্চ নির্বাত' (ultrahigh vacuum) বলে। বর্তমানে 10^{-13} টর অপেক্ষাও

কম চাপের শূন্যতা সৃষ্টি ও মাপন সম্ভব হইয়াছে। আরও অনেক কম চাপ সম্ভবতঃ সৃষ্ট হইয়াছে ; কিন্তু তাহা মাপন সম্ভব হয় নাই।

বিভিন্ন মাত্রার শূন্যতায় 1 cm^3 আয়তনে 25 °C-তে কি সংখ্যক বায়ুকণা থাকে, উহাদের গড় মুক্তপথ কত ও সেকেণ্ডে 1 cm^2 তলে কতগুলি কণা আপতিত হয় তাহা নিচের তালিকায় দেখান হইল।

চাপ (torr)	প্রতি ঘন সেন্টিমিটারে অণুর সংখ্যা	গড় মুক্তপথ (cm)	1 cm^2-এ প্রতি সেকেণ্ডে আপতিত অণুর সংখ্যা
760	2.5×10^{19}	6.3×10^{-6}	2.9×10^{23}
1	3.3×10^{16}	4.8×10^{-3}	3.9×10^{20}
10^{-6}	3.3×10^{10}	4800	3.9×10^{14}
10^{-10}	3.3×10^{6}	4.8×10^{7}	3.9×10^{10}

10^{18} টর শূন্যতায় নাইট্রোজেন অণুর গড় মুক্তপথ প্রায় পৃথিবী হইতে চাঁদের দূরত্বের সমান।

14-2. নির্বাতন হার (Pumping speed)। যে পাত্রের নির্বাতন করিতে হইবে উহা হইতে পাম্প প্রতি সেকেণ্ডে উপস্থিত চাপ P-তে যে আয়তন গ্যাস টানিয়া নেয় তাহাকে পাম্পের 'নির্বাতন হার' বলে। ইহা litre/second এককে প্রকাশ করা হয়। অনেক পাম্পের নির্বাতন হার চাপ নিরপেক্ষ।

নির্বাতেয় পাত্রের আয়তন V_0 স্থির থাকিলে পাম্পের ক্রিয়ায় dt সময়ে চাপ P হইতে $P+dP$ হইলে $dm=V_0dP/RT$ ভরের গ্যাস ঐ সময়ে বাহির হইয়াছে। এখানে R একক ভর গ্যাসের গ্যাস স্থিরাংক। P চাপে এই dm ভর গ্যাসের আয়তন dV হইলে

$$PdV=V_0\frac{dP}{RT}.RT=V_0dP$$

অতএব নির্বাতন হারের সংজ্ঞা অনুসারে

$$\text{নির্বাতন হার } S=-\frac{dV}{dt}=-\frac{V_0}{P}\frac{dP}{dt} \qquad (14\text{-}2.1)$$

পাত্র হইতে ভর নির্গমনের হার

$$\sigma=-\frac{dm}{dt}=-\frac{V_0}{RT}\frac{dP}{dt}=\frac{P}{RT}.S \qquad (14\text{-}2.2)$$

নির্বাতন হারের সহিত ভর নির্গমনের হারের ইহাই সম্পর্ক।

S P-নিরপেক্ষ হইলে $t=t_1$ হইতে $t=t_2$ সময়ের অবকাশে

$$\int_{t_1}^{t_2} S\, dt = -V_0 \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P}$$

বা $S(t_2-t_1)=V_0 \ln \frac{P_1}{P_2}$

$$\therefore \quad S = \frac{V_0}{t_2-t_1} \ln \frac{P_1}{P_2} = 2{\cdot}303 \frac{V_0}{t_2-t_1} \log_{10} \frac{P_1}{P_2} \qquad (14\text{-}2.3)$$

এই সমীকরণ অনুসারে P_2 যথেচ্ছ কমান যাইতে পারে বলিয়া মনে হয়। কিন্তু তাহা কেন হয় না সে কথা 14-3 অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হইয়াছে।

কোন ছেদ অতিক্রম করিয়া গ্যাস প্রবাহিত হইতে থাকিলে

$$Q = -P\frac{dV}{dt} = SP \qquad (14\text{-}2.4)$$

রাশিটিকে গ্যাসের 'আয়তনিক প্রবাহ হার' (volumetric flow rate) বলা হয়। ইহা dt সময়ে P চাপে dV আয়তনের প্রবাহ। 14-2.2 সমীকরণ হইতে দেখা যায় ভরের প্রবাহ হার

$$\sigma = \frac{SP}{RT} = \frac{Q}{RT} \qquad (14\text{-}2.5)$$

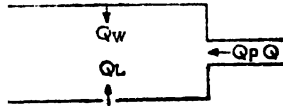
নির্বাতন আলোচনায় চাপ torr এককে ও V লিটারে নেওয়া হয়। অতএব Q-র একক 1 torr litre/second। PdV-র ঘাত শক্তির; অতএব Q শক্তির প্রবাহ হার; উহাকে RT দিয়া ভাগ করিলে (14-2.5 সমীকরণ) ভরের প্রবাহ হার পাওয়া যায়।

14-3. নির্বাতন প্রক্রিয়া (Pumping process)। পাম্পের সাহায্যে সাধারণতঃ বদ্ধ পাত্র হইতে বায়ু নিষ্কাশন করা হয়। পাম্প নিজের আগম মুখ (inlet end) হইতে বায়ু টানিয়া নির্গমন মুখ (outlet end) দিয়া বাহির করিয়া দেওয়ায় আগম মুখে চাপ কমে। বদ্ধ পাত্রে চাপ বেশী থাকায় পাত্র হইতে বায়ু পাম্পে প্রবেশ করে। পাম্পের ক্রিয়া ক্রমাগত চলিতে থাকায় পাত্রে চাপ ক্রমশ কমে এবং শেষ পর্যন্ত একটা অবম মানে পৌঁছায় ও উহার নিচে আর যায় না। এই অবম চাপকে আমরা 'অন্তিম চাপ' (ultimate pressure) বলিব।

পাত্রের চাপ ক্রমশ কমিয়া শূন্যে পরিণত না হইয়া অন্তিম মানে কেন স্থির হয় তাহা 14.1 চিত্রের সাহায্যে আমরা বুঝিতে চেষ্টা করিব। প্রধানতঃ একটি কারণে পাত্রে গ্যাসের উদ্‌গম ও দুটি কারণে আগম হয়।

(১) পাত্রের দেওয়ালে সব সময়ই কিছু গ্যাস অধিশোষিত (adsorbed) থাকে ; চাপ কমিলে উহা মুক্ত হইতে থাকে। অধিশোষিত গ্যাসের পরিমাণ নিম্নচাপ পাত্রস্থ গ্যাসের তুলনায় অনেক বেশী। 1 cm ব্যাসের নলের দেওয়ালে অধিশোষিত এক অণু পুরু স্তর (mono-molecular layer) গ্যাস হঠাৎ মুক্ত হইলে চাপ 0·1 টর বাড়িয়া যাইবে। এক লিটার আয়তনের গোল পাত্র হইতে অনুরূপ গ্যাস মুক্তিতে চাপ বাড়িবে 0·01 টর। গ্যাস মুক্তির শক্তি তাপ ও আলো হইতে আসে।

(২) পাম্প ও উহাতে যুক্ত নল ইত্যাদিতে এবং পাত্রে কোথাও খুব ছোট ছেঁদা (leak) থাকিলে উহা দিয়া গ্যাস প্রবেশ করে।

(৩) পাম্প হইতে কিছু বাষ্প ব্যাপন (diffusion) প্রক্রিয়ায় পাত্রে ঢোকে। 14-6 অনুচ্ছেদে ইহার বিস্তারিত আলোচনা করা হইয়াছে।

14.1 চিত্র

ধরা যাক,

Q_W = পাত্রের দেওয়াল হইতে অধিশোষিত গ্যাস মুক্তির (বা গ্যাস বিশোষণের) হার ;

Q_L = ছেঁদা দিয়া গ্যাস প্রবেশের হার ;

Q_P = ব্যাপনে পাম্প হইতে পাত্রে গ্যাস প্রবেশের হার ;

ও $Q = SP$ = পাম্পে আয়তনিক প্রবাহ হার (14-2.4 সমীকরণ)।

Q হারে পাত্র হইতে গ্যাস বাহির হয় ও $Q_W + Q_L + Q_P$ হারে পাত্রে গ্যাস ঢোকে। পাত্রের আয়তন V_0 হইলে এ অবস্থায় পাত্র হইতে গ্যাস নির্গমনের হার

$$-V_0 dP/dt = SP - Q_W - Q_L - Q_P \quad (14\text{-}3.1)$$

যখন চাপ আর কমে না তখন $dP/dt=0$ হয়। এই অবস্থায় পাত্রের চাপ P_u-ই অন্তিম চাপ।

$$\therefore \quad P_u S = Q_W + Q_L + Q_P \tag{14-3·2}$$

এবং $$S = (Q_W + Q_L + Q_P)/P_u = \Sigma Q/P_u \tag{14-3.3}$$

নির্বাতের তন্ত্রে ছেঁদা থাকিলে Q_L-এর মান সাধারণতঃ স্থির। সতর্ক চেষ্টায় $Q_L=0$ করা যায়। Q_W এবং Q_P সময়ের সহিত আস্তে আস্তে বদলায়। উহাদের স্বল্পমান বা প্রায় স্থির এবং S-কে চাপ নিরপেক্ষ ধরিয়া নিম্নোক্তভাবে 14-3.1 সমীকরণের সমাকলন করা যায়।

$$-V_0 dP/dt = SP - SP_u$$

বা $$\frac{dP}{P-P_u} = -\frac{S}{V_0}dt.$$

$t=0$ সময়ে $P=P_0$ হইলে সমাকলনে পাই

$$\Big| \ln (P-P_u) \Big|^{P} = -\frac{S}{V_0}t$$

বা $$(P-P_u) = (P_0 - P_u)\, e^{-(S/V_0)t}$$

আদি চাপ $P_0 \gg P_u$ হওয়ায় ডান দিকে P_u উপেক্ষা করা যায়। অতএব

$$P = P_0\, e^{-(S/V_0)t} + P_u \tag{14-3.4}$$

$V_0/S=\tau$ রাশিটি সময় বুঝায়। ইহাকে আলোচ্য নির্বাতের তন্ত্রের কালাংক (time constant) বলে। τ ছোট হইলে চাপ দ্রুত কমে। P_u উপেক্ষা করিলে বলা যায় τ সময়ে চাপ আদি চাপের $1/e$ অংশে (প্রায় 37%) পরিণত হয়। বলা ভাল যে P_u-র কাছাকাছি আসিলে S-এর মান কমিতে থাকে এবং P_u-তে উহার মান হয় শূন্য।

14-4. নলের চালকতা (Conductance of a tube)। দুই পাত্রে $\triangle P$ চাপ বৈষম্য থাকিলে এবং উহারা কোন নল দিয়া যুক্ত থাকিলে

$$C = \frac{Q}{\triangle P} \tag{14-4.1}$$

রাশিটিকে নলের 'চালকতা' (conductance) বলে। Q হইল গ্যাসের আয়তনিক প্রবাহ হার (14-2.4 সমীকরণ)। পাত্রে চাপ P হইলে এবং dt সময়ে dV আয়তন প্রবাহিত হইলে $Q=-PdV/dt$।

C-র বিপরীত রাশি $1/C = \Delta P/Q$-কে নলের 'রোধ' (resistance) বলে। ওহ্‌ম্ সূত্রের সঙ্গে 14-4.1 সমীকরণের মিল লক্ষণীয়। চাপবৈষম্য ΔP বৈদ্যুত বিভববৈষম্যের অনুরূপ, Q বৈদ্যুত প্রবাহের এবং চালকতা C বৈদ্যুত চালকতা $1/R$-এর অনুরূপ। বিদ্যুৎ প্রবাহের আলোচনায় একাধিক রোধ শ্রেণী বা সমান্তরাল সজ্জায় যুক্ত থাকিলে যৌথ রোধ যেভাবে পাওয়া যায়, এখানেও একাধিক নল ঐভাবে যুক্ত থাকিলে একই প্রকার সম্পর্ক পাওয়া যাইবে। অতএব

নলের শ্রেণীসজ্জায় $$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \qquad (14\text{-}4.2)$$

নলের সমান্তরাল সজ্জায় $$C = C_1 + C_2 + \cdots\cdots \qquad (14\text{-}4.3)$$

নলের বদলে পাত্রের দেওয়ালে ছিদ্র সম্বন্ধেও উপরের কথাগুলি প্রযোজ্য। ছিদ্রের চালকতা 14-4.1 হইতে 14-4.3 সমীকরণ তিনটি মানিয়া চলে।

নলের ব্যাস অণুর গড় মুক্তপথের সঙ্গে তুলনীয় বা উহা হইতে ছোট হইলে প্রবাহকে আণবিক প্রবাহ (molecular flow) বলা হয়। এ অবস্থায় অণুগুলির পরস্পর ধাক্কার সংখ্যার তুলনায় দেওয়ালের সঙ্গে ধাক্কার সংখ্যা বেশী। প্রবাহের প্রকৃতি আণবিক হইলে $T°K$ উষ্ণতায় M আণবিক ভরের গ্যাসের প্রবাহে D cm ব্যাসের L cm দীর্ঘ নলের চালকতা

$$C = 3.8 \left(\frac{T}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{D^3}{L} \text{ litre/sec} \qquad (14\text{-}4.4)$$

বায়ুতে ঘরের উষ্ণতায় ধরা যায়

$$C = 12.3\ D^3/L \text{ litre/sec} \qquad (14\text{-}4.5)$$

নলের চালকতা উহার ব্যাসের ঘনমানের সমানুপাতিক ও দৈর্ঘ্যের বিষমানুপাতিক। নির্বাতনের কাজে পাম্পের সঙ্গে পাত্র যোগ করিতে যে সব নল ব্যবহার করিতে হয় তাহাদের ভিতরের ব্যাস যথাসম্ভব বড় এবং দৈর্ঘ্য ছোট হওয়া দরকার।

14-2.1 ও 14-4.1 সমীকরণ হইতে দেখা যায় নির্বাতন হার S এবং চালকতা C-র ঘাত একই; উভয়েই $[V]/[T]$। অতএব উভয়ে এক জাতীয় রাশি। S-কে পাম্পের চালকতা মনে করা যায়।

S নির্বাতন হারের পাম্প C চালকতার নলের সাহায্যে নির্বাতেয় কোন পাত্রে যোগ করিলে S ও C শ্রেণীসজ্জায় বলিয়া পাম্প ও নলের যৌথ

চালকতা বা পাম্পের কার্যকর নির্বাতন হার S_e 14-4.2 সমীকরণ হইতে পাওয়া যাইবে।

$$\frac{1}{S_e}=\frac{1}{S}+\frac{1}{C} \quad \text{বা} \quad S_e=\frac{SC}{S+C} \qquad (14\text{-}4.6)$$

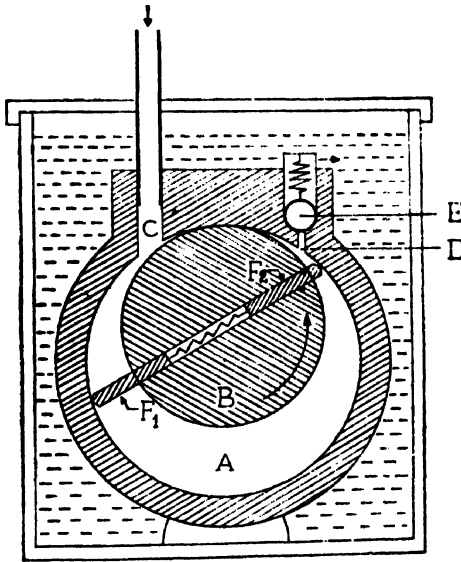
C কম হইলে S_eও কম হইবে। পাম্পের নিজস্ব S-এর ফল পাইতে হইলে নলের C বড় রাখিতে হইবে. অর্থাৎ বড় ব্যাসের নল ব্যবহার করিতে হইবে কারণ $C \propto D^3$। L খুব ছোট হইবার দরকার নাই, কারণ $C \propto 1/L$।

14-5 দুটি বহু ব্যবহৃত পাম্প। বিভিন্ন রকম কাজের প্রয়োজনে নানা প্রকার পাম্প উদ্ভাবিত হইয়াছে। যে কোন পাম্প চাপের নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে ক্রিয়া করে। নিম্নচাপ পাইতে হইলে উপযুক্ত সীমাবিশিষ্ট একাধিক পাম্প ব্যবহার করিতে হয়। পাম্পের আগম (inlet) মুখে গ্যাসের চাপ একটা নির্দিষ্ট সীমার নিচে হইলে পাম্পে গ্যাস প্রবেশ করে না। ঐ পাম্পের সাহায্যে ইহার কম চাপ পাওয়া যায় না। নির্গম (outlet) মুখেও অনুরূপ সীমা আছে ; নির্গম মুখে বাহিরের গ্যাসের চাপ ইহার বেশী হইলে পাম্প ক্রিয়া করে না। নির্গম মুখের এই সীমাস্থ চাপকে আমরা 'অগ্রচাপ' (fore-pressure) বলিব।

বিভিন্ন পাম্পের শ্রেণীবিভাগ বা তাহাদের সম্বন্ধে সাধারণ আলোচনা না করিয়া আমরা এখানে কেবল উচ্চ নির্বাত সৃষ্টির কাজে সবচেয়ে বেশী ব্যবহৃত পাম্পের কথা বলিব। এ কাজে প্রধানতঃ গ্যাসের অন্তর্ব্যাপনের (inter-diffussion) সাহায্য নেওয়া হয়। যে সকল পাম্প এই প্রক্রিয়ায় কাজ করে তাহাদের 'ব্যাপন পাম্প' (Diffusion pump) বলে। যে পাত্র হইতে বায়ু নিষ্কাশন করিতে হইবে তাহাতে বায়ুর চাপ 0·1—0·01 টরের বেশী হইলে ব্যাপন পাম্প সাধারণতঃ ক্রিয়া করিতে পারে না। এজন্য গোড়ার চাপ বায়ুমণ্ডলের চাপ হইলে অন্য কোন প্রকার পাম্পের সাহায্যে চাপ কমাইয়া প্রয়োজনীয় সীমার নিচে আনিয়া লইতে হয়। তখন ব্যাপন পাম্প ক্রিয়া করিতে পারে। প্রথমের পাম্পটিকে 'সহায়ক পাম্প' (Backing pump বা fore pump) বলে। ব্যাপন পাম্পের সঙ্গে সহায়ক পাম্পও চালাইয়া রাখিতে হয়। ব্যাপন পাম্প নিজ ক্রিয়াকালে পাত্র হইতে বায়ু নিষ্কাশন করিয়া সহায়ক পাম্পকে দেয় ; সহায়ক পাম্প সেই বায়ু বায়ুমণ্ডলে ছাড়িয়া দেয়। ব্যাপন পাম্প সোজাসুজি বায়ুমণ্ডলে বায়ু বাহির করিয়া দিতে পারে না।

সহায়ক পাম্প নানা প্রকারের হইতে পারিলেও বর্তমানে এ উদ্দেশ্যে

ঘূর্ণী পাম্প (Rotary pump)-এর প্রচলন সবচেয়ে বেশী। গঠনে বিভিন্নতা থাকিলেও সকল প্রকার ঘূর্ণী পাম্পের ক্রিয়া একই প্রকার। নিচে একটির বর্ণনা দেওয়া হইল।

14-5.1. ঘূর্ণী পাম্প (Rotary pump)। ঘূর্ণী পাম্প যন্ত্রটি অপেক্ষাকৃত আধুনিক ; ইহা পুরাতন প্রায় সকল পাম্পকে হটাইয়া দিয়াছে। ইহার ক্রিয়া খুব দ্রুত এবং ইহার সাহায্যে অল্প সময়েই চাপ বায়ুমণ্ডলের চাপ হইতে 0·01—0·001 টরে নামাইয়া আনা যায়। পরীক্ষাগারে এবং নানাবিধ শিল্পে ইহার ব্যাপক প্রয়োগ আছে।

14.2 চিত্র

গঠন। 14·2 চিত্রে ঘূর্ণী পাম্পের গঠন বুঝান হইয়াছে। চিত্রের *A* ইস্পাতের বেলন আকারে ফাঁপা একটি কুঠরি। *B* বেলন এই কুঠরির ভিতরে *A*-র দেওয়াল স্পর্শ করিয়া নিজ অক্ষে বেগে ঘুরিতে পারে। *C* পথে বায়ু *A*-তে প্রবেশ করিতে, এবং *D* পথে বাহির হইয়া যাইতে পারে। যে পাত্র বায়ুশূন্য করিতে হইবে তাহা রবারের মোটা নল দিয়া পাম্পের *C* নলের সঙ্গে যোগ করা হয়। এই পাত্রের বায়ু *C* দিয়া *A*-তে প্রবেশ করে। *D* ছিদ্র স্প্রিং চালিত ভ্যাল্‌ভ্ *E* দিয়া বন্ধ থাকে। *A* তে বায়ু-চাপ একটা সীমা ছাড়াইলে *E* খুলিয়া যায় ও বায়ু *D* পথে নির্গত হয়।

B-র দেওয়ালে কাটা গর্তে একই ব্যাসের দুই বিপরীত দিকে দুখানা পাত (F_1, F_2) স্প্রিং-এর সাহায্যে A-র গায় চাপিয়া থাকে। A ও B-র স্পর্শস্থান C ও D-র মধ্যে সংযোগ বিচ্ছিন্ন রাখে। B ঘুরিলে F_1, F_2 A-র গায় লাগিয়া থাকিয়া ঘুরিতে থাকে। যন্ত্রটি তেলে ডুবান থাকে।

ক্রিয়া। ইলেকট্রিক মোটরের সাহায্যে বেলন B-কে ঘুরান হয়। মনে কর চিত্রের তীর চিহ্নের দিকে (বামাবর্তে) উহা ঘুরিতেছে। B ঘুরিতে থাকিলে C পার হইবার পর F_1-এর পিছনের অংশের আয়তন বাড়িবে. এবং C পথে পাত্র হইতে বায়ু এখানে আসিবে। এই সময়ে সম্মুখের অংশের আয়তন কমিবে এবং ঐ অংশে বায়ুর চাপ বাড়িবে। চাপ যথেষ্ট বাড়িলে E ভ্যাল্‌ভ্ ঠেলিয়া এই বায়ু বাহির হইয়া যাইবে। F_2 ঘুরিয়া C পার হইয়া আসিলে অনুরূপ ক্রিয়া আবার ঘটিবে। B-র প্রতি পাকে D পথে দুইবার বায়ু বাহির হইবে। এইভাবে পাম্পের ক্রিয়া চলিতে থাকিবে।

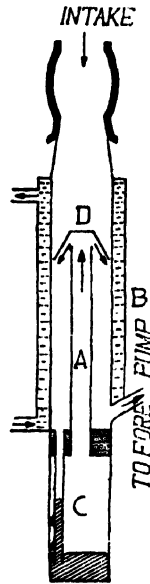
বাহিরের বায়ু যাহাতে A-তে ঢুকিতে না পারে সেজন্য সমস্ত যন্ত্রটি তেলে ডুবান থাকে। ইহাতে যন্ত্রের সচল অংশগুলিও তেলে ভিজা থাকে এবং ঘষায় উহাদের ক্ষয় হয় না। পাম্প বন্ধ করিলে C-তে রবারের নল বিযুক্ত করিয়া দেওয়া উচিত। না হইলে A-র ভিতরে চাপ কম এবং বাহিরে চাপ বেশী বলিয়া E-র সরু ফাঁক দিয়া তেল ঢুকিয়া শেষ পর্যন্ত বায়ুশূন্য পাত্রেও চলিয়া যাইতে পারে। যাহাতে এ অবস্থা না হয় সেজন্য অনেক পাম্পে C-র পর খানিকটা শূন্যস্থান রাখিয়া দেওয়া হয়। তেল আসিলে এখানে জমে।

গ্যাস পাত্রে বেশী জলীয় বাষ্প থাকিলে ঘূর্ণী পাম্পের সহিত উহাকে সোজাসুজি যোগ করা অনুচিত। জলীয় বাষ্প পাম্পের তেলের সহিত মিশিয়া পাম্পের ক্রিয়ার অবনতি ঘটায়। গ্যাস পাত্র ও পাম্পের মাঝে জল-শোষক কোন দানাদার পদার্থের স্তম্ভ থাকিলে উহাতে জলীয় বাষ্প শোষিত হইতে পারে। আধুনিক Gas ballast পাম্প জলীয় বাষ্প থাকিলেও ব্যবহার করা চলে। এগুলি ঘূর্ণী পাম্পের একটু পরিবর্তিত রূপ। গ্যাস যখন সংনমিত হয় তখন উপযুক্ত সময়ে আরও বায়ু ঢুকাইয়া ইহার ভ্যাল্‌ভ্ আগেই খুলিয়া দেওয়া হয়। ইহাতে জলীয় বাষ্প না জমিয়া বাহির হইয়া যায়।

মাত্র একটি পাম্পে চাপ বড় একটা 10^{-1} হইতে 10^{-2} টরের নিচে নামে

না। চাপ আরও কমাইতে একই আধারে পরপর দুটি ঘূর্ণী পাম্পের ব্যবহার প্রশস্ত। ইহাদের two-stage পাম্প বলে। প্রথমের শোষণমুখ দ্বিতীয়ের ভ্যাল্‌ভের সঙ্গে যুক্ত থাকে। ভাল two-stage পাম্পে চাপ 10^{-3} টর বা আরও কিছু নিচে নামান যায়।

14-5.2. ব্যাপন পাম্প (Diffusion pumps)। 1915 খৃষ্টাব্দে Gaede ব্যাপন পাম্প উদ্ভাবন করেন। পরে উহার গঠনে অনেক রদবদল হয়। উহাদের বর্তমান রূপের পিছনে আছে Langmuir-এর অবদান।

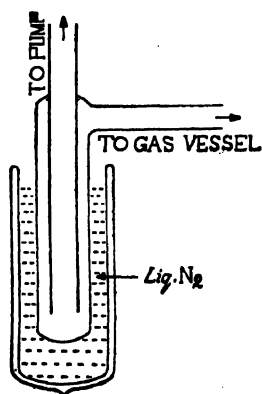
বর্তমানে ব্যাপন পাম্প সাধারণতঃ ইস্পাতে তৈয়ারী হয়, যদিও কাচের বা গলান কোয়ার্টজের পাম্পও কিছু কিছু দেখিতে পাওয়া যায়। 14.3 চিত্রে একটি আধুনিক ব্যাপন পাম্প দেখান হইয়াছে। *C* পাত্রে পারা

14.3 চিত্র

তাপে বাষ্পায়িত হইয়া *A* নল দিয়া উঠিয়া ছাতার আকারের ঢাল (shield) *D*-তে ধাক্কা খাইয়া *A* ও *B*-র মধ্যের বলয় আকার অংশে তীব্র গতিতে নামিয়া আসে। *B*-র দেওয়াল বাহিরের জল-প্রবাহে ঠাণ্ডা রাখা হয়। *B*-র সংস্পর্শে পারার বাষ্প জমিয়া শেষ পর্যন্ত *C*-তে ফিরিয়া আসে।

B-র নিচের দিকে একটি নলের মারফৎ ব্যাপন পাম্পের সঙ্গে সহায়ক

পাম্পের যোগ থাকে। D-র উপরের দিকে পাম্পের চোঙের মুখ বড়। যে পাত্র বায়ুশূন্য করিতে হইবে তাহা এই বড় মুখে যোগ করা হয়।

গ্যাসের যে অণুগুলি ব্যাপন ক্রিয়ায় D ও B-র ফাঁক দিয়া নিচের অংশে আসে নিম্নগামী পারার অণুতে ধাক্কা খাইয়া তাহারাও নিচের দিকে নামে। এইভাবে নিচের নলের কাছে তাহাদের ঘনত্ব বাড়ে এবং সহায়ক পাম্প তাহাদের টানিয়া বাহিরে ছাড়িয়া দেয়। নির্বাতের গ্যাসপাত্রে এইভাবে অণুর সংখ্যা কমিতে থাকে ও শূন্যতা বাড়ে।

ব্যাপনে পারা বাষ্পের যে অণুগুলি গ্যাস পাত্রের দিকে যায় তাহাদের আটকাইতে না পারিলে নির্বাতের পাত্রে চাপ পারা বাষ্পের চাপের নিচে নামান যাইবে না। অণুগুলিকে ধরিবার জন্য একরকম ফাঁদ (Trap) ব্যবহার করা হয়। পাম্প ও গ্যাস পাত্রের ঠিক মাঝখানে ইহা থাকে। ফাঁদের গঠন

14.4 চিত্র

14.4 চিত্রে দেখান হইয়াছে। তরল বায়ুতে ডুবাইয়া উহার দেওয়াল ঠাণ্ডা রাখা হয়। পারা বাষ্পের অণুগুলি দেওয়ালের সংস্পর্শে আসিয়া জমিয়া ফাঁদেই থাকিয়া যায়।

পারা বাষ্পের স্রোতে ব্যাপনে প্রবিষ্ট গ্যাসের অণুগুলির একটা বড় অংশ নিচের দিকে ঠেলিয়া দিতে হইলে

(১) বাষ্পের অণুগুলির গড় মুক্তপথ D ও B-র ফাঁকের চেয়ে কিছু ছোট হওয়া দরকার, কিন্তু অনেক ছোট নয়।

(২) বাষ্পের স্রোতে পারার অণুগুলি খুব ঘন সন্নিবিষ্ট হইবে না বা

খুব ফাঁক ফাঁকও থাকিবে না। ঘন হইলে ব্যাপনে D ও B-র ফাঁক দিয়া উপরে উঠিতে উহারা আগন্তুক গ্যাসের অধিকাংশ অণুগুলিকে ঠেলিয়া পিছাইয়া দিবে। বেশী ফাঁকে থাকিলে উহারা মাত্র অল্পসংখ্যক গ্যাস অণুকে নিচে ঠেলিতে পারিবে।

এই দুই কারণে C বয়লারের উষ্ণতা ও উহাতে তাপ সরবরাহের হার ঠিকমত নিয়ন্ত্রিত থাকা দরকার। ইহা ভিন্ন

(৩) বাষ্পের অণুর বেগ গ্যাসের অণুর বেগের চেয়ে বেশী করিতে পারিলে গ্যাসের বেশী সংখ্যক অণু ধাক্কা খাইয়া নিচে নামিবে। বাষ্পীয় টারবাইনে বাষ্পের নির্গম পথ যেরূপ করা হয়, ব্যাপন পাম্পে পারার নির্গম পথ সেরূপ করিয়া পারার অণুগুলিকে গ্যাসের অণুর চেয়ে বেশী বেগ দেওয়া যায়। এরূপ গঠনের পাম্পের ক্রিয়া খুব দ্রুত।

ব্যাপন পাম্পে পারা ব্যবহার করিবার প্রধান কারণ কয়েকটি—

(ক) পারার বাষ্পচাপ খুব কম এবং অণুগুলি ভারী বলিয়া গ্যাস-পাত্রের দিকে উহার ব্যাপন কম।

(খ) উহাকে সহজে বাষ্পায়িত করিতে বা জমাইয়া তরল করিতে পারা যায়।

(গ) উষ্ণ বায়ুর সহিত (বা অধিকাংশ গ্যাস বা বাষ্পের সহিত) উহার কোন রাসায়নিক ক্রিয়া হয় না।

(ঘ) উহা সহজেই বিশুদ্ধ অবস্থায় পাওয়া যায়।

(ঙ) পারা ভারী বলিয়া পারাবাষ্পে অণুগুলির প্রচুর ভরবেগ থাকে। ইহাতে পারাবাষ্প সহজেই নিজের স্রোতের দিকে আগন্তুক অণুগুলিকে ভরবেগ দিতে পারে।

1928 সালের পর হইতে ব্যাপন পাম্পে পারার বদলে কয়েকটি বিশেষ ধরনের তেলের ব্যবহার প্রচলিত হইয়াছে। পাম্পে ব্যবহার্য তেলের নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যগুলি থাকা দরকার—

(১) ঘরের উষ্ণতায় বাষ্পচাপ খুব কম ($<10^{-6}$ mmHg) হইতে হইবে। এজন্য অণুগুলির ভর বেশী হওয়া এবং তেলে কোন উদ্বায়ী অপবস্তু না থাকা দরকার।

(২) উষ্ণ করিলে অণুগুলির বিযোজন (dissociation) বা জারণ (oxidation) হইবে না।

(৩) পাম্পের তেল বা তেলের বাষ্প যে সকল পদার্থের সংস্পর্শে আসিবে তাহাদের কোনটির সহিত উহার রাসায়নিক ক্রিয়া ঘটিবে না।

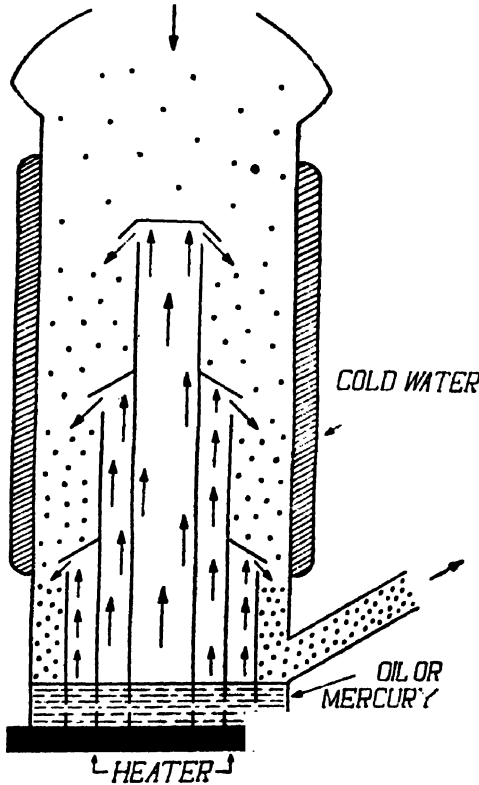
ব্যবহৃত তেলগুলিকে মোটামুটি চার শ্রেণীতে ভাগ করা যায়। প্রত্যেক শ্রেণীর একটি করিয়া তেলের ব্যবসায়িক নাম, রাসায়নিক গঠন ইত্যাদি নীচে দেওয়া হইল।

ব্যবসায়িক নাম	রাসায়নিক গঠন	25°C উষ্ণতায় বাষ্প চাপ (mmHg)	10^{-2} টর চাপে স্ফুটনাংক (°C)
অ্যাপিজন সি (Apiezon C)	জটিল হাইড্রো-কার্বন	5×10^{-8}	~180
অক্টয়েল এস্ (Octoil S)	ডাই-2-ইথাইল ডাইহেক্সাইল সিবাকেট	9×10^{-8}	143
নার্কয়েল-40 (Narcoil 40)	ডাই ননাইল থ্যালেট	1×10^{-7}	142
ডি সি 704 (D.C. 704)	মিথাইল ফিনাইল পলিসিলক্সেন	$\sim10^{-8}$	185

পরে phenoxy-benzene এবং এমন সব polyphenyl ether পাওয়া গিয়াছে ঘরের উষ্ণতায় যাহাদের বাষ্পচাপ $<10^{-9}$ tor।

তেলের ব্যাপন পাম্প ভাল কি পারার—এ প্রশ্নের কোন উত্তর হয় না। তেল এবং পারা উভয়েরই নিজস্ব দোষগুণ আছে। ক্ষেত্র বুঝিয়া পাম্প বাছাই করিতে হয়।

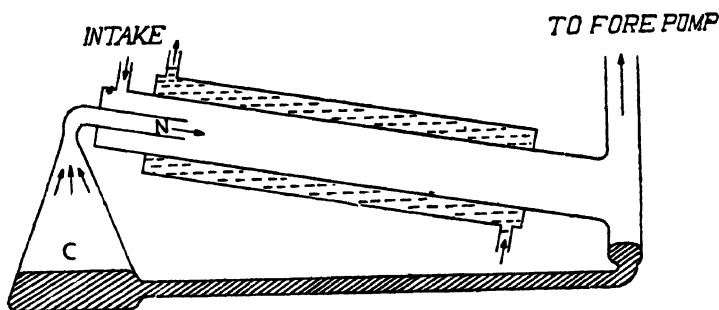
পাত্র হইতে ব্যাপনে গ্যাসের অণু সরাইবার তত্ত্বগতভাবে কোন নিচ সীমা নাই। কার্যতঃ কোন পাম্পই একটা অবম সীমার নীচে যাইতে পারে না। ইহার কারণগুলি 14-3 ও 14-7 অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হইয়াছে। মোটামুটি বলা যায় বিশেষ ব্যবস্থা না করিলে ব্যাপন পাম্পে লভ্য অন্তিম চাপ পাম্পে ব্যবহৃত পারা বা তেলের 25°C উষ্ণতায় বাষ্পচাপের কাছাকাছি হইবে। এই উষ্ণতায় পারার বাষ্পচাপ $1{\cdot}7\times10^{-3}$ mmHg।

অনেক সময় ব্যাপন পাম্পে দুই বা তিনটি পাম্প পরপর জোড়া থাকে। ইহাদের multistage pump বা একাধিক পর্যায়ের পাম্প বলে। প্রথম পাম্পটি দ্বিতীয়ের সহায়ক পাম্পের কাজ করে; দ্বিতীয়টি তৃতীয়ের। 14.5 চিত্রে এইরূপ একটি পাম্পের গঠন দেখান হইয়াছে। প্রথমে পাম্পটি ছোট হইলেই চলে কারণ উহা বেশী চাপে ক্রিয়া করে। পরেরগুলি ক্রমশঃ বড়। ছোট পাম্প উহার গ্যাস নির্গম মুখে বেশী চাপ থাকিলেও ক্রিয়া করিতে পারে; এমন কি চাপ 20 টর বা তাহার বেশী হইলেও ক্রিয়া বন্ধ হয় না। এই কারণে প্রথম ব্যাপন পাম্পের সহায়ক পাম্প ঘূর্ণী পাম্প না হইয়া অন্যরূপ হইলেও চলে।

14.5 চিত্র

অন্যান্য আকারের ব্যাপন পাম্পও দেখা যায়। 14.6 ও 14.7 চিত্রে কাচের

তৈয়ারী এরূপ দুটি পাম্পের গঠন দেখান হইয়াছে। সকলের ক্রিয়া একই প্রকার। এই দুই চিত্রে *N* বাষ্প বাহির হইবার মুখ (nozzle)।

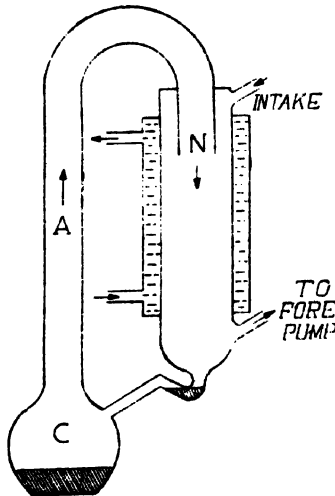
অনেক পাম্পে বাষ্প স্রোতের শীর্ষ হইতে ব্যাপনে গ্যাসপাত্রে বাষ্পের অনুপ্রবেশ কমাইতে পাম্পের ভিতরেই ঢালের (shield) একটু উপরে সচ্ছিদ্র ঠাণ্ডা পাত রাখা হয়। ইহাকে বাধিকা (Baffle) বলে। বাষ্পের অণুগুলি ঠাণ্ডা পাতের গায় লাগিলে জমিয়া তরল হয়, এবং বয়লারে ফিরিয়া আসে। অল্প সংখ্যক অণুই এই বাধা পার হইতে পারে। বাধিকা ও ফাঁদ থাকিলে পাম্পের নির্বাতন হার কমে।

14.6. নির্বাতনের অন্য কয়েকটি উপায়। যান্ত্রিক ক্রিয়ায় নির্বাতনের জন্য উদ্ভাবিত নানা প্রকার পাম্পের (mechanical pumps) মধ্যে ঘূর্ণী পাম্পকে কার্যতঃ শ্রেষ্ঠ বলা যায়। উচ্চ নির্বাতের জন্য Gaede 'Molecular drag pump' উদ্ভাবন করেন। 1958 সালে বেকার (Becker) 'Turbo-molecular pump' নামে যে পাম্প উদ্ভাবন করেন তাহাতে 10^{-9} tor পর্যন্ত নির্বাত পাওয়া যায়। ইহাতে তেল, শীতলন ব্যবস্থা বা সহায়ক পাম্পের

14.6 চিত্র

দরকার হয় না। অযান্ত্রিক কোন কোন ক্রিয়ার সাহায্যেও চাপ কমান সম্ভব এবং সেরূপ কিছু কিছু পাম্পও উদ্ভাবিত হইয়াছে। ইহাদের ব্যবহার ঘূর্ণী ও ব্যাপন পাম্পের মত ব্যাপক না হইলেও বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে ইহাদের কার্যকারিতা আছে। আমরা এরূপ কয়েকটি ক্রিয়ার কথা এখানে আলোচনা করিব।

শোষণ দ্বারা নির্বাতন (Sorption pumping)। কঠিন পদার্থের পৃষ্ঠে গ্যাস দুইভাবে বদ্ধ হইয়া থাকিতে পারে। ইহাদের একটিকে ভৌত অধিশোষণ (Physical adsorption) ও অন্যটিকে রাসায়নিক

অধিশোষণ (Chemical adsorption) বলে। ভৌত অধিশোষণে আকর্ষক বল ভ্যান ডার ওয়াল্স্ (van der Waals) বল এবং অধিশোষণে মুক্ততাপের পরিমাণ মোটামুটি 5 Kcal/mole ক্রমের। রাসায়নিক অধিশোষণে আকর্ষক বল প্রকৃতিতে রাসায়নিক, এবং মুক্ততাপ 20-100 Kcal/mole ক্রমের। ঠাণ্ডা কাঠকয়লায় নাইট্রোজেন অধিশোষণ ভৌত ; টাংস্টিনে অক্সিজেন অধিশোষণ রাসায়নিক।

অধিশোষণ ও রাসায়নিক বন্ধনে নির্বাতন সম্ভব। কিন্তু ইহাতে গ্যাস অণু পাত্র হইতে বাহিরে চলিয়া যায় না, ভিতরেই বদ্ধ হইয়া থাকে। রাসায়নিক অধিশোষণ ও রাসায়নিক ক্রিয়ায় যে সকল পদার্থ নির্বাতন করিতে পারে তাহাদের 'গেটার' (Getter) বলে। এ কাজে সাধারণতঃ ধাতুই ব্যবহার করা হয়। বাষ্পন দ্বারা পাতলা ফিলমের আকারে গেটারকে পাত্রের দেওয়ালে জমান হয়। গেটার ফিলম গ্যাস শোষণ করে। কোন কোন গ্যাসের সহিত উহা রাসায়নিক ক্রিয়া করিয়া যৌগে পরিণত হয়। গেটার গ্যাস বাহির করিয়া দেয় না এবং অল্প পরিমাণ গ্যাস আটকাইয়া রাখিতে পারে বলিয়া নির্বাতের পাত্র হইতে অন্য পাম্পের সাহায্যে যথাসম্ভব

14.7 চিত্র

গ্যাস বাহির করিয়া দিয়া গেটার ব্যবহার করা হয়। অল্প পরিমাণ ধাতব গেটার আগ হইতেই পাত্রে রাখিয়া দেওয়া হয়। পরে উপযুক্ত উপায়ে তাপ প্রয়োগ করিয়া উহাকে বাষ্পায়িত করা হয়। গেটার বাষ্প ফিলমের

আকারে দেওয়ালে জমে। ইলেকট্রন নলে (electron tubes) গেটারের ব্যবহার অনেকদিন হইতেই প্রচলিত। টাইটেনিয়াম, বেরিয়াম, ক্যালসিয়াম ভাল গেটার। অন্যান্য ধাতুও ব্যবহার হয়।

জিওলাইট (Zeolite) পদার্থটি ধাতুমিশ্রিত সচ্ছিদ্র অ্যালুমিনিয়াম সিলিকেট। তরল নাইট্রোজেনে ঠাণ্ডা করিলে ইহা প্রচুর গ্যাস শোষণ করিতে পারে। উষ্ণ করিলে ইহা গ্যাস ছাড়িয়া দেয়। জিওলাইট শোষণ পাম্প কিনিতে পাওয়া যায়। ইহা 20 লিটার পাত্রের চাপ 20 মিনিটে 0.02 টরে এবং দেড় ঘণ্টায় 0.01 টরে নামাইতে পারে।

আয়নদে নির্বাতন (Ion pumping)। নিম্নচাপ গ্যাসে ইলেকট্রন স্রোত প্রবাহিত হইতে দিলে উপযুক্ত পরিবেশে গ্যাস অণুগুলি আয়নিত হইতে থাকে। পজিটিভ আয়নগুলি পাত্রের নিগেটিভ বিভববিশিষ্ট অংশের দিকে ছুটিয়া যায় ও কিছু সেখানে আবদ্ধ হইয়া থাকে। এভাবে পাত্রে মুক্ত অণুর সংখ্যা আস্তে আস্তে কমিতে থাকে। আয়ন পাম্পের গঠন 14-8.3 অনুচ্ছেদে আলোচিত যে কোন আয়ন গেজের মত হইতে পারে। এই কারণে সকল আয়ন গেজের কিছু নির্বাতন ক্রিয়া থাকে। ট্রায়োড ভ্যালভের মত গঠনের আয়ন পাম্পের অক্ষে উষ্ণ ক্যাথোড, ক্যাথোডকে ঘেরিয়া ফাঁক ফাঁক পেঁচের গ্রিড, ও গ্রিডকে ঘেরিয়া আয়ন সংগ্রাহক (ion collector) থাকে। সংগ্রাহককে ভূমি সংযুক্ত রাখা হয়। ক্যাথোডের বিভব ইহার তুলনায় কয়েক ভোল্ট পজিটিভ এবং গ্রিড আরও বেশী পজিটিভ। গ্রিড ও সংগ্রাহকের মধ্যবর্তী অংশে পজিটিভ আয়ন সৃষ্ট হয়, এবং সংগ্রাহকে আকৃষ্ট হইয়া উহাতে ধাক্কা খাইলে কিছু আয়ন উহাতে বদ্ধ হয়। সংগ্রাহক ভূমি সংযুক্ত থাকায় আয়ন উহার আধান (charge) হারাইয়া অনাহিত অণুতে পরিণত হয়। সংগ্রাহকের অণু ধরিয়া রাখার ক্ষমতা পরিমিত; উহা ক্রমে সংপৃক্ত হয়। তখন আয়ন পাম্প বিচ্ছিন্ন করিয়া তাপনে সংগ্রাহক হইতে গ্যাস অণু মুক্ত করিয়া সহায়ক পাম্পের সাহায্যে মুক্ত অণুগুলি সরাইয়া নিতে হয়। আয়ন পাম্প অল্প পরিমাণ অণু সরাইতে পারে বলিয়া উহা ব্যবহার করিবার আগে ব্যাপন পাম্পের সাহায্যে নির্বাতের পাত্রে চাপ যথাসম্ভব কমাইয়া নেওয়া দরকার। আয়ন পাম্পের ক্রিয়া মন্থর।

বিশুদ্ধ আয়ন পাম্প এখন আর বড় একটা ব্যবহার হয় না। উহার সহিত গেটারের অধিশোষণ যোগ করিয়া দুই প্রকার পাম্পের প্রচলন হইয়াছে। ইহাদের একটিকে বলে আয়ন-শোষণ বা **গেটার আয়ন পাম্প**

(Ion-sorption or Getter-ion pump)। ইহার কথা 14-7 অনুচ্ছেদের (খ) অংশে বলা হইয়াছে।

অন্যটির নাম **স্পাটার-আয়ন পাম্প** (Sputter-ion pump)। শীতল ক্যাথোড ব্যবহার করিয়া একটি অতিরিক্ত ক্যাথোড হইতে স্পাটার (sputter) করিয়া মূল ক্যাথোডে গেটারিং গুণ-বিশিষ্ট ধাতু ক্রমাগত জমিতে দিলে উহা অধিশোষণে ও রাসায়নিক ক্রিয়ার বায়ুর প্রায় সব উপাদানগুলিই বদ্ধ করে। এ পাম্পের গঠন পেনিং গেজের মত (14-8.3 অনুচ্ছেদ দেখ)। ঐ গেজের মত এ পাম্পে একই কারণে চৌম্বক ক্ষেত্রও ব্যবহার করা হয়। পাম্পের নির্বাতন হার প্রচুর হইতে পারে। অত্যুচ্চ নির্বাত পাইতে ইহাদের ব্যবহার করা হয়। আগে কোন সহায়ক পাম্পের সাহায্যে নির্বাতেয় পাত্রে চাপ যথাসম্ভব কমাইয়া নেওয়া হয়। হাইড্রোকার্বন বাষ্প অধিশোষণে বিঘ্ন ঘটায় বলিয়া স্পাটার-আয়ন পাম্পের সঙ্গে তেল ব্যবহারী কোন পাম্প যোগ না করাই ভাল। সহায়ক পাম্প হিসাবে ইহার সঙ্গে জিওলাইট পাম্প ব্যবহার এ কারণে প্রশস্ত। পাম্পে প্রযুক্ত বিভববৈষম্য কয়েক হাজার ভোল্ট ক্রমের ও চৌম্বক ক্ষেত্রে 1000 গাউস ক্রমের।

শৈত্যে নির্বাতন (Cryogenic pumping)। বিস্তৃত আয়তনে প্রচুর পরিমাণ গ্যাসের চাপ দ্রুত কমাইতে শৈত্য পাম্প (Cryogenic pump) ব্যবহার হয়। তরল হাইড্রোজেন (20.4°K) বা তরল হিলিয়ামে (4.2°K) ঠাণ্ডা করা তলের সংস্পর্শে বায়ুর প্রায় সকল গ্যাসই জমিয়া যায় ও চাপ কমে। ইহাতে পাত্রে চাপ তরলিত গ্যাসের বাষ্প চাপের সমান হয়।

4.2°Kতে ও হাইড্রোজেনের বাষ্পচাপ $10^{-6}-10^{-7}$ tor। চাপ আরও কমাইতে হইলে এমন কোন বস্তু আধারের ভিতর রাখিতে হইবে যাহা ঐ শীতল অবস্থার অবশিষ্ট গ্যাস শোষণ করিয়া ধরিয়া রাখিতে পারে। এ রূপ নির্বাতনকে cryosorption বা শৈত্য-শোষণ বলে। এক দশকের বেশী হইল এরূপ নির্বাতন প্রচলিত হইয়াছে।

14-7. উচ্চ ও অত্যুচ্চ নির্বাত সৃষ্টি। (Production of high and ultrahigh vacuum)। নির্বাতের বিভিন্ন পাল্লার সীমারেখা স্পষ্ট না থাকিলেও মোটামুটি 10^{-3} হইতে 10^{-8} টর চাপের নির্বাতকে উচ্চ নির্বাত (high vacuum) ও 10^{-8} টরেরও কম চাপের নির্বাতকে অত্যুচ্চ নির্বাত (ultrahigh vacuum) ধরা হয়। ব্যাপন পাম্পের সাহায্যে 10^{-11} টরের নির্বাতও সৃষ্টি করা গিয়াছে।

14.3 অনুচ্ছেদের আলোচনা হইতে দেখা যায় অন্তিম চাপ কমাইতে হইলে পাত্রে গ্যাসের উদ্‌গম ও আগম কমাইতে হইবে। উদ্‌গমের প্রধান কারণ নিম্নচাপে পাত্রের দেওয়াল হইতে অধিশোষিত গ্যাসের মুক্তি। পাত্র যথেষ্ট উত্তপ্ত করিতে পারিলে গ্যাসের মুক্তি তাড়াতাড়ি হয়। নহিলে পাম্প দীর্ঘ সময় চালাইয়া রাখিয়া উহা আস্তে আস্তে কমান যায়।

আগমের একটি কারণ হইল নির্বাতেয় তন্ত্রে কোথাও ছেঁদা থাকে। যথেষ্ট সতর্কতা অবলম্বন করিলে ইহা সম্পূর্ণ বন্ধ করা যায়।

পাত্রে গ্যাস আগমের অন্যতম কারণ হইল পাম্প হইতে ব্যাপনে পাম্প বাষ্প ও গ্যাসের প্রবেশ। ইহাদের মধ্যে প্রধান হইল বিপরীত প্রবাহ (Back streaming) ও পশ্চাদ্‌ব্যাপন (Back diffusion)। নিম্নমুখী বাষ্পস্রোতের উপরের অংশ হইতে ব্যাপনে বাষ্প অণুর নিম্নচাপ অংশে প্রবেশকে বিপরীত প্রবাহ বলে। পাম্পের নির্গম মুখের নিকটস্থ উচ্চচাপ অংশ হইতে পাম্পবাষ্পের ভিতর দিয়া ব্যাপনে নিম্নচাপ অংশে গ্যাসের প্রবেশকে বলে পশ্চাদ্‌ব্যাপন।

অগ্রচাপ (Fore pressure) বেশী থাকিলে পশ্চাদ্‌ব্যাপন বেশী হয়। একই পাম্পে পর পর ক্রিয়াশীল বাষ্পস্রোতের সংখ্যা বাড়াইলে, অর্থাৎ multistage pump ব্যবহার করিলে, পশ্চাদ্‌ব্যাপন কমে কারণ শেষ পর্যায়ের পাম্পের অগ্রচাপ অনেক কম থাকে।

বিপরীত প্রবাহ কমাইতে বাধিকা (Baffle) ও ফাঁদ (Trap) ব্যবহার করা হয়। বাধিকা রাখা হয় পাম্পের ভিতরে বাষ্পস্রোত যে ঢালে (shield) ধাক্কা খাইয়া নিচে নামে, তাহার একটু উপরে। শীতকের (coolant) সাহায্যে বাধিকা শীতল রাখা হয়। অনেক বাধিকা < আকারের ছিদ্র বিশিষ্ট পাত। বিপরীত প্রবাহের যে সকল অণু শীতল বাধিকায় ধাক্কা খায় তাহাদের বড় একটা অংশ জমিয়া তরল হইয়া বয়লারে ফিরিয়া আসে। বাধিকার পিছনের অংশে বাষ্পচাপ 10^{-6} টরের কম হইতে পারে। বাধিকা বেশী শীতল করিতে পারিলে এই চাপ আরও কমে।

বাধিকার পিছনে চাপ আরও কমাইতে ফাঁদ ব্যবহার হয়। ফাঁদ থাকে পাম্পের পরে নির্বাতের পাত্রের আগে। ফাঁদে তরল নাইট্রোজেনে ঠাণ্ডা করা দেওয়ালের গায় পারাবাষ্পের অণু ধাক্কা খাইলে জমিয়া কঠিন হয়। এইভাবে একটু একটু করিয়া কঠিন পারা ফাঁদে জমিতে থাকে। কঠিন পারার বাষ্পচাপ

উপেক্ষণীয়। পাম্প অনেকক্ষণ একটানা চালিলে উহার বয়লারের পারা বা তেল ক্রমশঃ ফাঁদে জমিতে থাকে।

উপরের আলোচনা হইতে বোঝা যাইবে

(ক) উচ্চ নির্বাত (10^{-3}—10^{-8}) সৃষ্টিতে নিম্নোক্ত ব্যবস্থা অবলম্বন করা যায় :—

(১) উপযুক্ত সহায়ক পাম্পের সঙ্গে পারা বা তেল ব্যাপন পাম্প ব্যবহার।

(২) নির্বাতেয় তন্ত্রকে সম্পূর্ণ ছিদ্রমুক্ত করা।

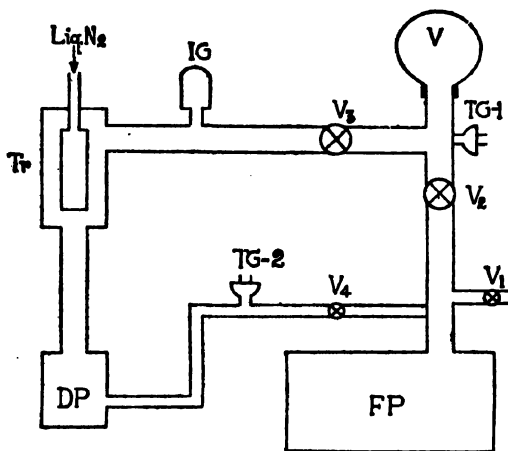
(৩) পাম্পে বাধিকা না থাকিলে উপযুক্ত শীতকে ঠাণ্ডা করা ফাঁদ ব্যবহার। অবস্থা অনুকূল থাকিলে ইথার ও কঠিন কার্বনডাইঅক্সাইডের মিশ্রণ (—78°C) শীতক হিসাবে ব্যবহার করা যায়। তরল নাইট্রোজেন (—196°C) সকল অবস্থায়ই ভাল। তেল পাম্পে বাধিকা থাকিলে ফাঁদ ব্যবহার না করিয়াও উচ্চ নির্বাত পাওয়া যাইতে পারে।

ফাঁদের চালকতা (conductance) পাম্পের সঙ্গে শ্রেণীসজ্জায় যুক্ত হওয়ায় পাম্পের নির্বাতন হার কমে।

(৪) নির্বাতেয় পাত্রে অধিশোষিত গ্যাসের পরিমাণ বেশী মনে হইলে যেখানে পারা যায় পাত্রকে যথাসম্ভব উষ্ণ করিয়া অধিশোষিত গ্যাস মুক্ত করা। ইহাতে প্রয়োজনীয় নির্বাতন তাড়াতাড়ি হইবে।

(৫) দরকার হইলে গেটার (getter) ব্যবহার করিয়া পাত্রে অবশিষ্ট গ্যাস অধিশোষণ করিয়া নেওয়া (14-6 অনুচ্ছেদ)।

উচ্চ নির্বাত সৃষ্টির একটি কার্যকর ব্যবস্থার আভাস 14.8 চিত্রে দেওয়া হইয়াছে। V_1 ভ্যাল্‌ভ্ বাহিরের বায়ুর সঙ্গে নির্বাতেয় তন্ত্রের সংযোগ বিচ্ছিন্ন রাখে। নির্বাতনের সময় ইহা বন্ধ থাকে। V_2, V_3, V_4 ভ্যাল্‌ভ্ খুলিয়া প্রথমে ঘূর্ণী পাম্পের সাহায্যে চাপ প্রায় 5×10^{-2} টরে নামান হয়। উভয় থার্মকাপল গেজে এই চাপ দেখা হয়। ইহার পর V_3 বন্ধ করিয়া ব্যাপন পাম্প চালান হয়। আয়নগেজ *IG*-তে চাপ 10^{-4} টর হইলে ফাঁদে তরল নাইট্রোজেন ঢালা হয়। ব্যাপন পাম্প হইতে নির্বাতেয় পাত্র পর্যন্ত সংযোগী নলগুলির ভিতরের ব্যাস যথাসম্ভব বেশী হওয়া দরকার। সহায়ক পাম্পে যুক্ত নলের ব্যাস ইহার অর্ধেক বা আর একটু কম হইলেও

ক্ষতি নাই। ব্যবহার্য পাম্পের নির্বাতন হার যাহাতে প্রায় 60%-এর বেশী না কমে, নলগুলির চালকতা এরূপ থাকা উচিত।

14.8 চিত্র

FP—সহায়ক ঘূর্ণী পাম্প
DP—পারা বা তেল ব্যাপন পাম্প
Tr—তরল নাইট্রোজেনে ঠাণ্ডা করা ফাঁদ
V—নির্বাতের পাত্র
TG 1, 2—থার্মকাপল বা পিরানি গেজ
IG—আয়ন গেজ
V_1, V_2, V_3, V_4—ভ্যাল্‌ভ্‌

(খ) **অত্যুচ্চ নির্বাত** (চাপ$<10^{-8}$ টর) পাইতে (ক)-তে উল্লিখিত ব্যবস্থাগুলি সবই দরকার। বাধিকাবিশিষ্ট তেল ব্যাপন পাম্প, এবং একের বদলে দুটি ফাঁদ ব্যবহার প্রশস্ত। নির্বাতের পাত্রকে যথাসম্ভব উষ্ণ করিয়া উহার দেওয়াল হইতে অধিশোষিত গ্যাস মুক্ত করিতে হইবে।

কয়েক লিটার পরিমিত স্থানে অত্যুচ্চ নির্বাত পাইতে **গেটার-আয়ন পাম্প** (Getter-ion pump ; ইহাকে আয়ন শোষণ (Ion-sorption) পাম্প ও বলে) ব্যবহার করা যায়। ব্যাপন পাম্পের সাহায্যে চাপ 10^{-6} টরে নামাইয়া তাহার পর গেটার-আয়ন পাম্প ব্যবহার করিতে হয়। ইহার ক্রিয়া দ্বিবিধ এবং গঠন অনেকটা আয়ন গেজের (14-8.3 অনুচ্ছেদ) মত। কার্যতঃ ইহাকে আয়ন গেজ হিসাবেও ব্যবহার করা যায়। উষ্ণক্যাথোড আয়ন পাম্পে ক্যাথোড হইতে নির্গত ইলেকট্রন গ্রিডে ত্বরিত হইয়া অবশিষ্ট গ্যাস অণুকে আয়নিত করে। পজিটিভ আয়নগুলি পাত্রের দেওয়ালে আকৃষ্ট হইয়া অংশতঃ

সেখানে বদ্ধ হয়। কেবল এই ক্রিয়াই হইলে অণুর সংখ্যা আস্তে আস্তে কমে—ইহা কেবল আয়ন পাম্পের ক্রিয়া। ইহার সহিত গেটারের ক্রিয়া যোগ করা হয়। দেওয়ালে উপযুক্ত গেটারের ফিলম থাকিলে অধিশোষণে ও রাসায়নিক ক্রিয়ায় অণুর সংখ্যা দ্রুত কমে। গ্যাসের পরিমাণ বেশী থাকিলে গেটারকে ক্রমাগত বাষ্পায়িত করিয়া যাইতে হয়, কারণ প্রায় এক অণু পুরু গ্যাস স্তর গঠিত হইলেই ফিলম সংপৃক্ত হয়। টাইটেনিয়াম ও বেরিয়াম ভাল গেটার। সাধারণতঃ ইলেকট্রনের আঘাতে গেটার বাষ্পায়ন করা হয়।

গেটার-আয়ন পাম্পের বদলে স্পাটার-আয়ন পাম্পও (14.6 অনুচ্ছেদ) ব্যবহার করা যায়।

অত্যুচ্চ নির্বাতনের সংক্ষিপ্ত-তত্ত্ব। 14-3.3 সমীকরণে আমরা দেখিয়াছি $P_u = \Sigma Q/S$। অত্যুচ্চ নির্বাত সৃষ্টি করিতে ΣQ কমাইতে হইবে ও S বাড়াইতে হইবে। Q যে সকল কারণে বাড়ে তাহাদের প্রধান হইল (১) বিপরীত প্রবাহ (Back streaming), (২) পাত্রের ভিতরের দেওয়াল ও ভিতরস্থ অন্যান্য বস্তু হইতে শোষিত গ্যাসের মুক্তি (Desorption from walls and interior parts), (৩) পাত্রের দেওয়াল ভেদ করিয়া গ্যাসের প্রবেশ (Permeation of gas through walls) এবং (৪) ভিতরের অংশের পদার্থগুলির বাষ্পচাপ। Q কমাইতে প্রধানতঃ তিনটি ব্যবস্থা করা দরকার (১) ফাঁদে বিপরীত প্রবাহ আটকান (Adequate trapping), (২) পাত্রের দেওয়াল ঠাণ্ডা রাখা (Cooling of the walls) এবং (৩) বেশী উষ্ণতায় দেওয়াল ও ভিতরের বস্তুগুলি হইতে গ্যাস বাহির করিয়া দেওয়া (High temperature bake out)।

নির্বাতন হার S বাড়াইতে (১) ভিতরের গ্যাস বাহির করিয়া দিতে হইবে ও (২) পাত্রস্থ অবশিষ্ট গ্যাস শোষণ করিয়া নিতে হইবে।

14-8. নিম্নচাপ মাপন (Measurement of low pressure)। নিম্নচাপ মাপনে প্রধানতঃ যে সকল যন্ত্র ব্যবহার হয় তাহাদের নাম এবং কোন্‌টি মোটামুটি কি চাপ মাপিতে পারে তাহার একটি তালিকা নিচে দেওয়া হইল। বিশেষ ব্যবস্থায় প্রায় সকল ক্ষেত্রেই চাপের পাল্লা কিছু বাড়ান যায়। যন্ত্রগুলির ক্রিয়াবিধি পরে বলা হইয়াছে। তালিকার যেগুলি তারকা (*) চিহ্নিত উহাদের ক্রিয়া নিরপেক্ষ (absolute)। অন্যগুলির মাপন গৌণ; নিরপেক্ষ মাপনের কোন যন্ত্রের সাহায্যে উহাদের স্কেল ক্রমাংকিত করিয়া লইতে হয়। কোন কোন ক্ষেত্রে বহির্বেশন (extrapolation)

সমীকরণের সাহায্যে স্কেল বাড়ান যায়। নিম্নচাপ মাপন খুব সূক্ষ্ম করা যায় না, বা তাহার দরকারও হয় না। 10% ত্রুটিকে সহনীয় মনে করা হয়।

নাম	চাপের মোটামুটি পাল্লা
* (১) তরল প্রেষমান (Liquid manometers)	
(ক) পারা	$10^2 - 10^0$ torr
(গ) তেল	$10^1 - 10^{-2}$
(২) ডায়াফ্রাম গেজ (Diaphragm gauge)	$10^1 - 10^{-3}$
* (৩) ম্যাক্লিওড গেজ (McLeod gauge)	$10^0 - 10^{-4}$
(৪) তাপপরিবাহিতা গেজ (Thermal conductivity gauge)	
(ক) পিরানি গেজ (Pirani gauge)	$10^1 - 10^{-4}$
(খ) থার্মকাপল গেজ (Thermocouple gauge)	$10^1 - 10^{-3}$
(৫) আয়নন গেজ (Ionization gauge)	
(ক) আয়ন গেজ (Ion gauge)	$10^{-3} - 10^{-8}$
(খ) বেয়ার্ড-অ্যালপার্ট গেজ (Bayard-Alpert gauge)	$10^{-5} - 10^{-10}$
(গ) পেনিং বা ফিলিপ্‌স্ গেজ (Penning or Philips gauge)	$10^{-3} - 10^{-7}$
(ঘ) ম্যাগনেট্রন গেজ (Magnetron gauge)	$10^{-9} - 10^{-14}$

একমুখ বন্ধ U-নল প্রেষমানে পারা ব্যবহার করিয়া 1 torr চাপ সহজেই মাপা যায়। পারার বদলে কম বাষ্পচাপের তেল ব্যবহার করিলে প্রেষমানে তরল স্তম্ভের দৈর্ঘ্যের প্রভেদ প্রায় 15 গুণ বাড়ায় এই প্রেষমানে 10^{-1} torr অপেক্ষাও কিছু কম চাপ মাপা যায়। হেলান প্রেষমানে (Inclined manometer) এভাবে 10^{-2} torr বা তাহা অপেক্ষাও কিছু কম চাপ মাপা সম্ভব।

গত ত্রিশ বৎসরে ডায়াফ্রাম গেজের প্রচুর উন্নতি হওয়ায় তরল প্রেষমানের

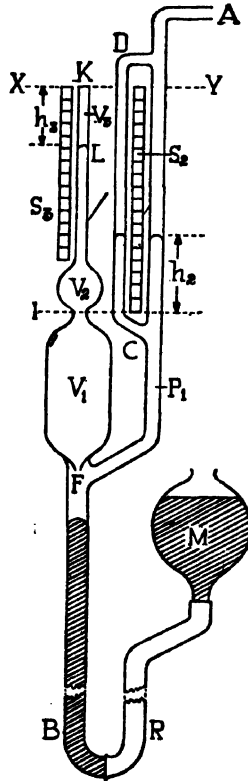
বিকল্প হিসাবে এগুলির ব্যবহার সম্ভব হইয়াছে। ইহাদের ক্রিয়া তরলহীন (aneroid) ব্যারোমিটারের মত। খুব পাতলা একখানা ধাতব পর্দার এক পাশ নির্বাতেয় তন্ত্রের সঙ্গে যোগ করা হয়। পর্দা উহার দুই পাশের প্রেষ-বৈষম্যে বিচলিত হয়। পর্দার কেন্দ্রের বিচলনের মাত্রা প্রেষবৈষম্যের উপর নির্ভর করে। বিচলন নানাভাবে মাপা যায়। লিভার ইত্যাদির সাহায্যে উহা বিবর্ধিত করিয়া স্কেলের উপর কাঁটা সরান যায়। বর্তমানে ঐ পর্দাকে বৈদ্যুত ধারকের (electrical capacitor) এক পাত হিসাবে ব্যবহার করিয়া পর্দার বিচলনে ধারকত্বের (capacitance) যে পরিবর্তন হয় তাহা দিয়া প্রেষবৈষম্য মাপিবার ব্যবস্থা করা হইয়াছে। এভাবে 10^{-4} torr মাপাও সম্ভব।

নিম্নচাপের নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাস লইয়া চাপিয়া উহার আয়তন অনেক কমাইয়া বর্ধিত চাপ মাপিয়া বয়েল সূত্রের সাহায্যে নিম্নচাপ জানা যায়। ম্যাকলিওড গেজ এইভাবে ক্রিয়া করে। ম্যাকলিওড গেজ নিরপেক্ষ গেজ ; ইহা দ্বারা চাপ মাপনে কোন জানা চাপের সঙ্গে তুলনার দরকার হয় না। তবে ইহার ক্রিয়া খুব মন্থর (14-8.1 অনুচ্ছেদ দেখ)। চাপ মাপিতে ইহা সোজাসুজি বড় একটা ব্যবহার করা হয় না। ইহার সাহায্যে সাধারণতঃ গৌণ গেজগুলির স্কেল ক্রমাংকন করা বা ক্রমাংকনের ত্রুটি যাচাই করা হয়। গ্যাসে বাষ্পের সংমিশ্রণ থাকিলে সংনমনে বাষ্প সংপৃক্ত (saturated) হইতে পারে, এবং সংপৃক্ত বাষ্প বয়েলসূত্র মানে না বলিয়া বাষ্প থাকিলে ম্যাকলিওড গেজ ব্যবহারে ভুল হইতে পারে।

ম্যাকলিওড গেজের ক্রিয়া মন্থর এবং উহা সোজাসুজি ব্যবহার করা অসুবিধা বলিয়া 10^{-3} torr-এর কম চাপ দ্রুত মাপিতে চাপের সহিত দ্রুত পরিবর্তিত হয় গ্যাসের এরূপ কোন ধর্মের সাহায্য নেওয়া হয়। এ উদ্দেশ্যে সাধারণতঃ গ্যাসের তাপ পরিবাহিতা (thermal conductivity) ও গ্যাসে সৃষ্ট আয়ন প্রবাহ দেখা হয়।

পিরানি গেজ ও থার্মকাপল্ গেজের ক্রিয়া গ্যাসের পরিবাহিতার উপর নির্ভর করে (14-8.2 অনুচ্ছেদ দেখ)। তালিকায় উল্লিখিত বাকী গেজগুলিতে নিম্নচাপ গ্যাসে সৃষ্ট আয়ন প্রবাহের সাহায্যে চাপ মাপা হয় (14-8.3 অনুচ্ছেদ)। এরূপ কোন গেজে নির্দিষ্ট অবস্থায় যে আয়ন প্রবাহ পাওয়া যায় তাহার মান গ্যাসের ঘনত্বের, অতএব চাপের, আনুপাতিক। নুডসেন গেজ নামক অন্য একটি গেজের ক্রিয়া রেডিও-মিটার প্রভাবের (Radiometer effect) উপর

নির্ভর করে। আয়ন গেজের উন্নতির পর ন্যুডসেন গেজের প্রচলন প্রায় লোপ পাইয়াছে।

14-8.1. ম্যাকলিওড গেজ। পণ্য হিসাবে উৎপাদিত ম্যাকলিওড গেজ সাধারণতঃ 1.5 হইতে 10^{-4} torr পাল্লায় ব্যবহার করা হয়। ইহার ক্রিয়া বয়েল সূত্রের উপর নির্ভর করে। 14.9 চিত্রে ইহার গঠন দেখান হইয়াছে।

14.9 চিত্র

গ্যাস পাত্র গেজের A মুখে যোগ করা হয়। B নল প্রায় 85 cm লম্বা; একটি মোটা লম্বা রবারের নল (R) দিয়া উহা পারার পাত্র M-এর সঙ্গে সংযুক্ত। চাপ মাপিতে M-কে আস্তে আস্তে উপরে উঠান হয়। ইহাতে V_1 বালবে পারা ঢুকিয়া গ্যাস পাত্রের সহিত V_1-এর F মুখের উপরের গ্যাসের সংযোগ বিচ্ছিন্ন করে। চাপ মাপনের দুটি উপায়।

(১) 1·5 হইতে 0·25 torr পর্যন্ত। M পাত্র উপরে তুলিয়া B নলের পারা V_1 বালবের উপরের দাগ I পর্যন্ত উঠান হয়। এই অবস্থায় CD কৈশিক নলের পারা I অপেক্ষা কতটা উঁচুতে ওঠে তাহা S_2 স্কেলের সাহায্যে দেখা হয়। মনে কর এই উচ্চতা h_2, এবং F মুখের ও I দাগের উপরে যন্ত্রের ভিতরের আয়তন যথাক্রমে v_1 ও v_2। A-তে চাপ p_1 হইলে বয়েল সূত্র অনুসারে

$$p_1v_1=(h_2+p_1)v_2$$

$$\text{বা } p_1=\frac{v_2}{v_1-v_2}h_2=k_1h_2 \qquad (14\text{-}8.1)$$

যন্ত্র নির্মাণের সময়ই v_1 ও v_2 ভাল করিয়া মাপা হয়। S_2 স্কেল এমনভাবে দাগান থাকে যে উহা হইতে সোজাসুজি p_1-এর মান পাওয়া যায়। h_2 p_1-এর সমানুপাতিক বলিয়া ইহা সম্ভব।

(২) 0.25 হইতে 10^{-4} টর পর্যন্ত। কম চাপ মাপিতে M পাত্রের পারা সব সময় বদ্ধ কৈশিক নলের ঠিক উপর (XY দাগ) পর্যন্ত তোলা হয়। ইহাতে v_1 আয়তন গ্যাস V_2 বালবের উপরের কৈশিক নল KL-এ আবদ্ধ হয়। ধরা যাক KL-এ আবদ্ধ গ্যাসের আয়তন v_3 এবং উহার চাপ h_3 সেণ্টিমিটার পারা। বয়েল সূত্র অনুসারে $p_1v_1=h_3v_3$। KL-এর প্রস্থচ্ছেদ সুষম ও উহার মান α হইলে $v_3=\alpha h_3$। (যন্ত্র নির্মাণের সময় α মাপিয়া নেওয়া হয়।)

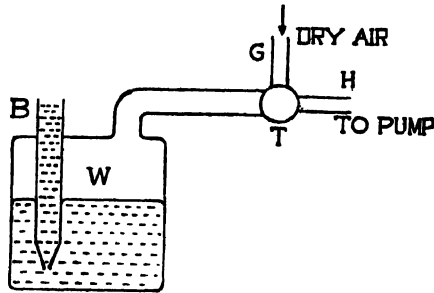
$$\text{অতএব}\quad p_1v_1=h_3(\alpha h_3)=\alpha h_3^2$$

$$\text{বা}\quad p_1=\frac{\alpha}{v_1}h_3^2=k_2h_3^2 \qquad (14\text{-}8.2)$$

S_3 স্কেল হইতে h_3-এর মান পাওয়া যায়। p_1 h_3^2-এর আনুপাতিক হওয়ায় S_3 স্কেল সোজাসুজি চাপে ক্রমাংকিত করা যায়; নিম্নচাপের দিকে দাগগুলি বেশী ফাঁক।

সংনমনের অনুপাত 1000 : 1 হইলে 10^{-4} টর চাপের গ্যাসের চাপ হইবে 0.1 টর। অনুপাত আরও বড় করা হইলে যন্ত্রে 10^{-4} টর অপেক্ষাও কম চাপ মাপা যাইবে।

কৈশিক নলে পারা পৃষ্ঠটানের জন্য কিছু দাবিয়া থাকে। ইহার শুদ্ধি দরকার।

ম্যাকলিওড গেজের পূর্ব বর্ণিত রূপ ইহার মূলরূপ। দীর্ঘ B নল থাকায় যন্ত্রটি অনেক লম্বা হয়; তাছাড়া মাপনে পারাপাত্র তুলিতে নামাইতে হয় এবং পারা রবারের সংস্পর্শে আসে। প্রথম দুটি অসুবিধার; শেষেরটি অবাঞ্ছিত কারণ রবার পারাকে দূষিত করে এবং রবারের নলের ভিতর দিয়া বায়ু ভিতরে ঢুকিতে পারে। আধুনিক যন্ত্রে এ ত্রুটিগুলি দূর করা হইয়াছে। B নলকে খুব খাট করিয়া উহার নিচের মুখ একটি বদ্ধ পারাপাত্রে (14.10 চিত্রের W) ঢুকাইয়া রাখা হয়। পাত্রে সংযুক্ত একটি দ্বিমুখী ছিপির (T) সাহায্যে পাত্রে G পথে খুব সরু একটি কৈশিক নল দিয়া শুষ্ক বায়ু আস্তে আস্তে ঢুকান যায়, এবং H পাম্পের সাহায্যে W হইতে বায়ু বাহির করিয়া নেওয়া যায়। বায়ু টানিয়া নিলে যন্ত্রের পারা W পাত্রে আসিয়া জমে এবং B নলের উপরের অংশের বায়ু নির্বাতেয় পাত্রের চাপে থাকে। H পথ বন্ধ করিয়া G পথ খুলিলে বায়ু ঢোকায় পারা B নলে আস্তে আস্তে উঠিতে থাকে।

14.10 চিত্র

বয়েল সূত্রের প্রয়োগ হয় বলিয়া মাপনকালে যন্ত্রের উষ্ণতা পরিবর্তন অবাঞ্ছনীয়। এজন্য গ্যাসের সংনমনও খুব আস্তে হওয়া দরকার।

14-8.2. তাপপরিবাহিতা গেজ (Thermal conductivity gauges)। কোন তারের মধ্য দিয়া বিদ্যুৎপ্রবাহ চালাইলে তারের উষ্ণতা বাড়িয়া একটা সাম্যাবস্থা আসে। এই অবস্থায় তারে জোগান বৈদ্যুতিক শক্তি তিনভাবে ব্যয়িত হয়—(১) বিকিরণ, (২) তারে পরিবহণ ও (৩) সন্নিহিত গ্যাসে তাপ পরিবহণ। (১) ও (২) তারের উষ্ণতার উপর নির্ভর করে। নিম্নচাপে (যখন অণুগুলির মধ্যে পারস্পরিক সংঘর্ষের সংখ্যার তুলনায় দেওয়ালের সঙ্গে সংঘর্ষের সংখ্যা বেশী হয় তখন) গ্যাসীয় পরিবহণে তার হইতে

তাপক্ষয়ের হার গ্যাসের চাপের সমানুপাতিক হয়। তারে জোগান শক্তি স্থির রাখিয়া গ্যাসের চাপ কমান হইলে (৩) কমায় তারের উষ্ণতা ও সেই সঙ্গে তাহার রোধ (electrical resistance) বাড়ে।

(১) **পিরানি গেজ।** তারে নির্দিষ্ট হারে শক্তি জোগাইয়া বিভিন্ন চাপে রোধ জানিতে পারিলে রোধ মাপিয়া চাপ জানা যায়। পিরানি গেজের ক্রিয়া এই তত্ত্বের উপর নির্ভর করে। গেজের তার টাংস্টেন বা প্ল্যাটিনামের ; উষ্ণতার অল্প পরিবর্তনেই ইহাদের রোধের পরিমেয় পরিবর্তন হয়। গেজে এরূপ একগাছা তার বালবের ভিতরে টানা দেওয়া বা পেঁচান থাকে। (14.11 চিত্র)। নির্বাতেয় পাত্রের সঙ্গে বালবের খোলামুখ মোটা নল দিয়া যোগ করা হয়। রোধ মাপিবার জন্য তারগাছা হুইটস্টোন ব্রিজের চতুর্থ বাহুতে থাকে, এবং মাপনের সময় এই বাহুতে বিদ্যুৎপ্রবাহ স্থির রাখা হয় (14.12 চিত্র)। প্রবাহের মান এমন করা হয় যাহাতে তারের উষ্ণতা প্রায় 200°C থাকে। এ উষ্ণতায় তার বিকিরণে বেশী তাপ হারায় না এবং তারের সঙ্গে গ্যাসের কোন রাসায়নিক ক্রিয়াও হয় না।

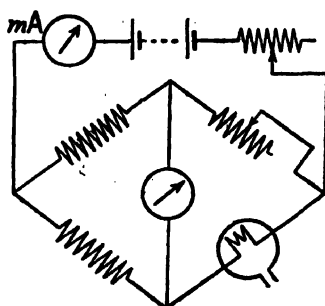
14.11 চিত্র

গেজের তারে প্রবাহ স্থির না রাখিয়া উহার প্রান্তে প্রযুক্ত বিভববৈষম্য স্থির রাখিয়াও গেজ ব্যবহার করিবার রীতি প্রচলিত আছে। এরূপ ক্ষেত্রে নিম্নচাপে তারের রোধ বাড়ায় প্রবাহ কমাইতে হয়।

ম্যাকলিওড গেজের সাহায্যে বিভিন্ন চাপে রোধ (বা প্রবাহ) মাপিয়া চাপ ও রোধের (বা চাপ ও প্রবাহের) সম্পর্ক জানিয়া লইয়া রোধ (বা প্রবাহ) মাপিয়া চাপ জানা যায়। চাপের অনেকটা পাল্লার মধ্যে রোধের পরিবর্তন চাপের পরিবর্তনের সমানুপাতিক থাকে, অর্থাৎ $R-P$ লেখ (graph)

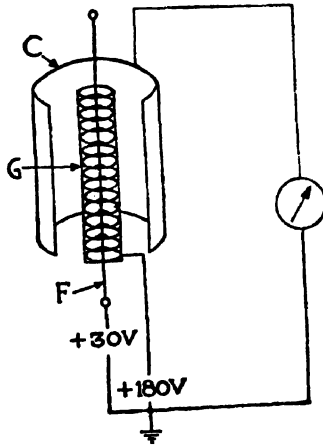
সরলরেখা হয় ; dR/dP নিগেটিভ হয় ও উহার মান স্থির থাকে। 10 টর হইতে 10^{-4} টর, এবং পেঁচান তার ব্যবহার করিয়া এমন কি 10^{-6} টর পর্যন্ত চাপও ইহাতে মাপা যায়। যন্ত্রটি মজবুত ও গঠনে সরল ; ইহার সাহায্যে অল্প সময়েই পাঠ নেওয়া যায়। তাছাড়া, ভিতরে হঠাৎ বায়ু ঢুকিয়া পড়িলে ইহার কোন ক্ষতি হয় না।

(২) **থার্মকাপল গেজ।** উপরে আলোচিত তারের সঙ্গে থার্মকাপলের এক সন্ধি (junction) লাগান থাকিলে তারের উষ্ণতা পরিবর্তনে থার্মকাপল সার্কিটে উদ্ভূত বিদ্যুচ্চালক বলেরও (electromotive force) পরিবর্তন হইবে। এই বি.চা.ব. (e.m.f.) মাপিয়াও চাপ জানা যাইতে পারে। বি.চা.ব. ও চাপের সম্পর্ক ম্যাক্লিওড গেজের সাহায্যে আগে জানিয়া লইতে হয়।

ভিতরে যে গ্যাস নিয়া পিরানি বা থার্মকাপল গেজ ক্রমাংকিত করা হয়, কেবল সেই গ্যাসেই ক্রমাংকন শুদ্ধ থাকে। বিভিন্ন গ্যাসের তাপ পরিবাহিতা বিভিন্ন বলিয়া এক গ্যাসে ক্রমাংকিত যন্ত্র অন্য গ্যাসে ব্যবহার করা অনুচিত।

14.12 চিত্র

14-8.3. আয়নন গেজ (Ionization gauge)। নিম্নচাপ পাত্রে রাখা দুটি তড়িৎদ্বারে (electrodes) যথেষ্ট বিভববৈষম্য প্রয়োগ করিলে ইলেকট্রন ক্যাথোড হইতে নির্গত হইয়া অ্যানোডের দিকে যায়। পথে গ্যাস অণুর সঙ্গে সংঘর্ষ ঘটিলে ও ইলেকট্রনের শক্তি যথেষ্ট থাকিলে সংঘর্ষে গ্যাস অণু আয়নিত হয়। ইহার ফলে অণু হইতে একটি ইলেকট্রন বিচ্ছিন্ন হয় ও অণুর বাকী অংশ পজিটিভ আধান লইয়া ক্যাথোডের দিকে যায়। পজিটিভ

আয়ন স্রোতের মান গ্যাসের প্রকৃতি ও ঘনত্ব, প্রযুক্ত বিভববৈষম্য এবং ইলেকট্রন স্রোতের মানের উপর নির্ভর করে। নির্দিষ্ট গ্যাসে প্রযুক্ত বিভববৈষম্য স্থির রাখিলে, আয়ন স্রোতের মান ইলেকট্রন স্রোত ও চাপের উপর নির্ভর করিবে। ইলেকট্রন স্রোতও যদি স্থির রাখা যায়, তাহা হইলে আয়ন স্রোত কেবল চাপের উপর নির্ভর করিবে। অতএব উপরোক্ত অবস্থায় আয়ন স্রোত মাপিয়া চাপ জানা সম্ভব। আয়ন গেজের ক্রিয়া এই তথ্যের উপর নির্ভর করে।

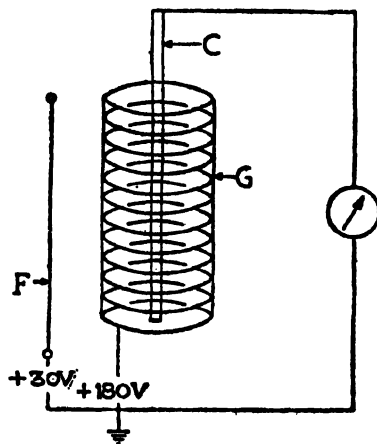
আয়নের ঘনত্ব (প্রতি ঘন সেন্টিমিটারে আয়ন সংখ্যা) কম থাকিলে আয়ন স্রোতের মান চাপের সমানুপাতিক হয়। ঘনত্ব বেশী হইলে ইলেকট্রন স্রোতের উপর উহার অনুভাব্য প্রতিক্রিয়া হওয়ায় সমানুপাতিকতা থাকে না। মোটামুটি বলা যায় শূন্য চাপ হইতে 10^{-8} টর চাপ পর্যন্ত সমানুপাতিকতা রাখা যায়। প্রধানতঃ এই কারণেই 10^{-3} টরের বেশী চাপে আয়ন গেজ ব্যবহার করা হয় না।

14.13 চিত্র

1 টর চাপের 1 লিটার গ্যাসকে 1000 লিটারে প্রসারিত করিলে চাপ হইবে 10^{-3} টর। উহাকে 100 গুণ প্রসারিত করিলে চাপ হইবে 10^{-5} টর ইত্যাদি। এইভাবে জানা চাপের গ্যাসকে নির্দিষ্ট অনুপাতে প্রসারিত করিয়া প্রসারিত গ্যাসের চাপে আয়ন স্রোত মাপিয়া আয়নন গেজ ক্রমাংকিত করা যায়।

(ক) পূর্বতন উষ্ণ ক্যাথোড আয়ন গেজ গঠনে প্রায় সাধারণ ট্রায়োড-ভ্যালভের (triode valve) মত (14.13 চিত্র)। চিত্রের F ফিলামেণ্ট (filament), G গ্রিড (grid), এবং C আয়ন সংগ্রাহক (ion collector)। C ভূমি সংযুক্ত থাকে এবং F-কে প্রায় $+30V$ ও G-কে প্রায় $+180V$ বিভবে রাখা হয়। F হইতে মুক্ত ইলেকট্রনগুলি গ্রিডের দিকে ছুটিয়া যায়। অল্প কিছু গ্রিডে আটকায়; বেশীর ভাগই গ্রিডের তারের ফাঁক দিয়া G ও C-র মধ্যবর্তী অঞ্চলে চলিয়া আসিয়া গ্যাস অণুগুলিকে আয়নিত করে। পজিটিভ আয়নগুলি C-তে যায়।

চাপ কম থাকিলে আয়ন স্রোত (i_{ion}) ইলেকট্রন স্রোত ($i_{electron}$) ও চাপ P উভয়ের সমানুপাতিক হয়। তথন লেখা যায়

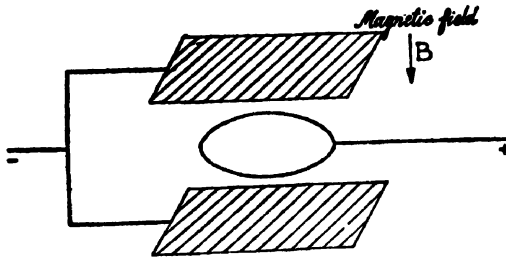
$$i_{ion} = s\, i_{electron}\, P \qquad (14\text{-}8.3)$$

নির্দিষ্ট গেজে s আনুপাতিকতার স্থিরাংক; ইহাকে কখন কখন গেজের 'সুবেদিতা' (sensitivity) বলা হয়। কিন্তু গেজের সুবেদিতা বলিতে অনেকে উহার সাহায্যে যে নিম্নতম চাপ মাপা যায় তাহা বোঝেন। s-এর মান গেজের গঠন, গ্রিডের বিভব ও গ্যাসের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে। আয়ন স্রোত মাইক্রো-অ্যাম্মিটারের সাহায্যে মাপা যায়। ইলেকট্রন স্রোতের মান 10^{-2} হইতে 10^{-5} অ্যাম্পিয়ারের মধ্যে থাকে।

14.14 চিত্র

গ্রিডে ইলেকট্রনের আঘাতে দীর্ঘ X-রশ্মি নির্গত হয়। ইহারা সংগ্রাহকে পড়িলে সংগ্রাহক হইতে ফটো-ইলেকট্রন (photo-electron) বাহির হইয়া

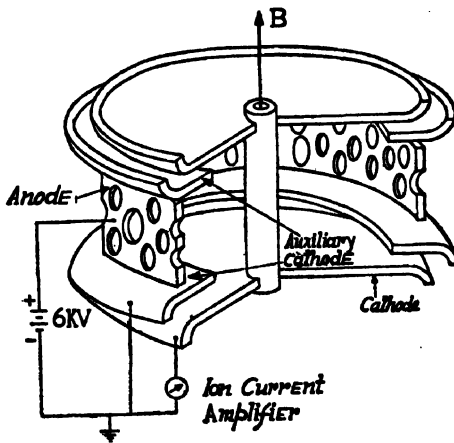
গ্রিডে যায়। গেজে প্রায় 10^{-8} টর চাপ থাকিলে যে আয়ন স্রোত হইত এই অতিরিক্ত ইলেকট্রন স্রোত তাহার সমান। কাজেই গেজ 10^{-7} টরের নিচের চাপ ঠিকমত মাপিতে পারে না।

(খ) বেয়ার্ড-অ্যালপার্ট গেজ। ইহাকে 'উলটান আয়ন গেজ' (Inverted ion gauge)-ও বলা হয়। ইহাতে ফিলামেণ্ট গ্রিডের বাহিরে থাকে, এবং সংগ্রাহক সরু তারের আকারে গ্রিডের অক্ষে থাকে (14.14 চিত্র)। সংগ্রাহক চওড়ায় খুব কম হওয়ায় খুব কম X-রশ্মিই উহাতে পড়ে এবং ফটো-ইলেকট্রন স্রোত খুব কম হয়। যাহা হয় তাহা প্রায় 5×10^{-11} টর চাপে আয়ন স্রোতের সমান। এরূপ গেজে প্রায় 10^{-10} টর পর্যন্ত চাপ মাপা যায়। বায়ুতে ইহার s-এর মান প্রায় 10।

উষ্ণ ক্যাথোড গেজের সক্রিয় অবস্থায় গেজে হঠাৎ বায়ু ঢুকিলে ফিলামেণ্ট পুড়িয়া গেজটি নষ্ট হইয়া যায়। কোন কোন গ্যাস ফিলামেণ্ট হইতে ইলেকট্রন মুক্তিতে বাধা দেয়। এরূপ গ্যাস থাকিলে আয়ন গেজ ব্যবহার করা উচিত নয়। হাইড্রোকার্বন গ্যাস এই জাতীয়। কাজেই তেল ব্যাপন পাম্প ব্যবহার করিলে তেলের বাষ্প যাহাতে গেজ অবধি আসিতে না পারে সে সম্বন্ধে খুব সতর্ক হওয়া দরকার। পাম্পের সঙ্গে তরল নাইট্রোজেনে ঠাণ্ডা করা ফাঁদ ব্যবহার করিয়া বাষ্প আগম বন্ধ করা যায়।

14.15 চিত্র

আয়ন গেজে চৌম্বক ক্ষেত্র ব্যবহার। উপযুক্ত চৌম্বক ক্ষেত্র প্রয়োগ করিয়া ইলেকট্রন স্রোতের ক্রিয়া নানাভাবে নিয়ন্ত্রিত করা যায়। আয়ন গেজে বৈদ্যুত বলরেখার মোটামুটি অভিলম্বে চৌম্বক বলক্ষেত্র প্রয়োগ করিলে ইলেকট্রনগুলি বৈদ্যুত বলরেখার চারিদিকে ঘুরিতে ঘুরিতে আগাইবে। ইহাতে ইলেকট্রনের পথ অনেক বাড়িয়া যায় এবং উহার আয়ন সৃষ্টির

সম্ভাবনাও সেই অনুপাতে বাড়ে। ফলে আয়নপ্রবাহ বেশী হওয়ায় যন্ত্রের সুবেদিতা বাড়ে।

(গ) উষ্ণ ক্যাথোডের বদলে শীতল ক্যাথোড লইয়া এরূপ একটি ব্যবস্থা পেনিং (Penning) উদ্ভাবন করেন। ইহাকে এখন **পেনিং বা ফিলিপ্‌স্ গেজ**, সংক্ষেপে PIG বলা হয়। ইহাতে ক্যাথোড দুখানা ধাতব পাত এবং অ্যানোড উহাদের মাঝখানে রাখা ধাতব আংটা (14.15 চিত্র) বা বেলন। প্রযুক্ত বিভব বৈষম্য প্রায় 2000 V। স্থায়ী চুম্বকে সৃষ্ট 500 হইতে 1500 গাউসের চৌম্বক ক্ষেত্রে তড়িৎদ্বারগুলি রাখা। ইলেকট্রনের পথ বাড়াইয়া বেশী আয়ন সৃষ্টি করা ছাড়াও চৌম্বক ক্ষেত্রের জন্য আর একটি সুবিধা হয়। এই ক্ষেত্রের জন্য বেশীর ভাগ ইলেকট্রনই অ্যানোডে পড়িতে পারে না। যে সকল ইলেকট্রন সংঘর্ষে যথেষ্ট শক্তি হারাইয়াছে তাহারাই অ্যানোডে পড়িতে পারে। ফলে যে ইলেকট্রন প্রবাহ হয় তাহা প্রায় পজিটিভ আয়ন স্রোতের আনুপাতিক হয়। X-রশ্মির পরিমাণও যথেষ্ট কম হয়; প্রায় থাকে না বলা চলে। সাধারণতঃ 10^{-8} হইতে 10^{-7} টরের মধ্যে ইহা ব্যবহার করা হয়। ক্যাথোডে একটি ছোট ছিদ্রের পিছনে উষ্ণ ফিলামেণ্ট রাখিয়া এরূপ গেজের সাহায্যে 10^{-11} টর অবধি চাপ মাপা গিয়াছে।

14.16 চিত্র

10^{-8} হইতে 10^{-11} টর পাল্লায় আয়ন প্রবাহ চাপের কার্যতঃ আনুপাতিক ছিল।

(ঘ) ম্যাগনেট্রন ভ্যালভে অ্যানোড ও ক্যাথোডের গঠন ও বিন্যাস যেরূপ প্রায় সেরূপ গঠন ও বিন্যাস অবলম্বন করিয়া রেডহেড (Red-head) **ম্যাগনেট্রন** গেজ উদ্ভাবন করেন। পেনিং গেজের মত ইহারও সুবেদিতা বেশী এবং উহাতে উষ্ণ ফিলামেণ্ট বা X-রশ্মি নাই। এ গেজে 10^{-13} টর পর্যন্ত চাপ মাপা গিয়াছে। ক্যাথোডের আকার দণ্ডের মত (14.16 চিত্র); উহার দুপ্রান্তে দুখানা চাকতি ক্যাথোডের অংশ। বেলন আকারের অ্যানোড ইহাদের ঘেরিয়া থাকে। চৌম্বক ক্ষেত্র বেলন অক্ষের সমান্তরাল। গেজের গঠনে আরও জটিলতা আছে। প্রযুক্ত বিভববৈষম্য প্রায় 6000 V এবং চৌম্বক ক্ষেত্র 1000 গাউস। বাহিরের বেলনকে ক্যাথোড ও ভিতরের দণ্ডকে অ্যানোড করিয়া গঠিত 'উলটান ম্যাগনেট্রন গেজে' (Inverted magnetron gauge) 10^{-14} টর চাপও মাপা গিয়াছে।

প্রশ্ন

1. টর, নির্বাতন হার (S), আয়তনিক প্রবাহ হার (Q) ও অন্তিম চাপ (P_u) কাহাকে বলে?

$$S = \frac{V_0}{t_2 - t_1} \ln \frac{P_1}{P_2} \text{ এবং } P = P_0 e^{-(S/V_0)t} + P_u$$

সম্পর্ক দুটি স্থাপন কর এবং উহাদের অর্থ বুঝাইয়া বল।

পরীক্ষার সাহায্যে সম্পর্ক দুটির সত্যতা যাচাই করার একটি সম্ভাব্য ব্যবস্থা বর্ণনা কর। তোমার কাজে কি গেজ ব্যবহার করিবে এবং কেন?

2. নলের চালকতা কাহাকে বলে? উহা নলের দৈর্ঘ্য ও ব্যাসের উপর কিভাবে নির্ভর করে? C_1, C_2 চালকতার দুটি নল (ক) শ্রেণীসজ্জায় (খ) সমান্তরাল সজ্জায় থাকিলে উহাদের যৌথ চালকতা কত হইবে? S নির্বাতন হারের পাম্পের সঙ্গে C চালকতার নল যুক্ত থাকিলে পাম্পের কার্যকর নির্বাতন হার কত হইবে?

10 লিটার আয়তনের একটি পাত্রের সঙ্গে 10 l/s(l = লিটার) নির্বাতন হারের একটি পাম্প 1 l/s চালকতার নল দিয়া যুক্ত। পাত্রে বায়ুর চাপ 760 টর হইতে 0·1 টরে নামিতে মোটামুটি কত সময় লাগিবে?

নলের ব্যাস 1 cm এবং দৈর্ঘ্য 1 m হইলে এই সময় কত হইবে? (চালকতা পাইতে 14-4.5 সমীকরণ ব্যবহার কর।) [উত্তর: 98 s ; 12 min]

3. ব্যাপন পাম্পের ক্রিয়া আলোচনা কর। পাম্পে পারার বদলে তেল ব্যবহার করার সুবিধা অসুবিধা কি? এরূপ তেলের কি প্রকার ধর্ম থাকা উচিত?

ব্যাপন পাম্পের সাহায্যে উচ্চ নির্বাত পাইতে হইলে কি ব্যবস্থা এবং কি সতর্কতা অবলম্বন করিবে ? এ সম্পর্কে বাধিকা ও ফাঁদের ক্রিয়া উল্লেখ কর।

4. উচ্চ ও অত্যুচ্চ নির্বাত পাইবার পথে যে সকল বাধা আছে সেগুলি আলোচনা কর এবং কিভাবে উহাদের কমান যায় বল।

5. গেটারের ক্রিয়া বর্ণনা কর। আয়ন পাম্পের সঙ্গে গেটারের ক্রিয়া যোগ করিয়া কিভাবে অত্যুচ্চ নির্বাত পাওয়া যাইতে পারে আলোচনা কর।

6. নিম্নচাপ মাপনে পদার্থের কি কি ধর্ম সাধারণত: প্রযুক্ত হয় বল। বায়ুর স্বাভাবিক চাপ হইতে 10^{-6} টর পর্যন্ত চাপ মাপিতে বিভিন্ন স্তরে কি কি প্রকার প্রেষমান ব্যবহার করিবে তাহাদের নাম কর ও ক্রিয়া বুঝাইয়া বল।

7. ম্যাকলিওড গেজ ও আয়ন গেজের ক্রিয়া বর্ণনা কর। প্রথমটির সুবিধা অসুবিধা কি ?

পারিভাষিক শব্দাবলী

[পরিভাষাগুলি প্রধানতঃ কলিকাতার 'সাহিত্য সংসদ্' কর্তৃক প্রকাশিত 'সংসদ্ বাংলা অভিধান' এবং ভারত সরকারের প্রকাশিত 'বিজ্ঞান শব্দাবলী' হইতে নেওয়া। কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়কৃত পরিভাষা ও 'চলন্তিকা'-র পরিভাষা সংসদ্ বাঙ্গলা অভিধানে দেওয়া আছে। সংসদ্ অভিধান হইতে নেওয়া শব্দগুলিতে শীর্ষাংক দেওয়া হইয়াছে [১]; বিজ্ঞান শব্দাবলীর পরিভাষার শীর্ষাংক [২]। শীর্ষাংকহীন শব্দগুলি হয় আভিধানিক, নয় অন্য লেখক বা বর্তমান লেখকের করা। শীর্ষচিহ্ন [চ] হইলে বুঝিতে হইবে উহা কেবল 'চলন্তিকা'য় আছে।]

Abscissa ভুজ[১,২]
Absolute temperature নিরপেক্ষ[২] উষ্ণতা; অনপেক্ষ উষ্ণতা
Acceleration ত্বরণ[১,২]
— , **angular** কৌণিক ত্বরণ
— , **linear** রৈখিক ত্বরণ
— , **normal** অভিলম্ব ত্বরণ
— , **tangential** স্পার্শিক ত্বরণ
— , **due to gravity** অভিকর্ষীয় ত্বরণ
Action ক্রিয়া[১,২] (force অর্থে) কর্ম[২]
— , **least** ন্যূনতম কর্ম[২]
— , **line of** ক্রিয়ারেখা
— , **and reaction** ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া
Adhesion আসঞ্জন[১,২]
Adiabatic রুদ্ধতাপ[১,২]
Adsorption অধিশোষণ[২]
Analysis বিশ্লেষণ[১,২]
Angle of contact স্পর্শকোণ[২]
Angular momentum কৌণিক ভরবেগ[১]
Anisotropic বিষমদৈশিক[২]
Annulus বলয়[১,২]
Anomaly অসংগতি[২]
Apogee অপভূ[১,২]
Arbitrary স্বৈচ্ছিক, যদৃচ্ছ, স্বেচ্ছ[২]
Axis, major দীর্ঘ অক্ষ[২], পরাক্ষ[১]
— , **minor** হ্রস্ব অক্ষ, লঘু, অক্ষ[২], উপাক্ষ[১]

Balanced প্রতিমিত[১]
Beam আড়া, দণ্ড[১,২], কড়ি[১]
— , **built in (encastré)** বদ্ধপ্রান্ত আড়া
Bending বংকন[২], বক্রণ
— , **moment** বংকনের দ্বন্দ্ব
Body বস্তু[১,২]
— , **rigid** দৃঢ়বস্তু[২]
Boundary conditions সীমাস্থ প্রতিবন্ধ,[২] সীমান্ত সংস্থিতি, সীমাবস্থা[১]
Bubble বুদ্বুদ
Buoyancy ঊর্ধ্বচাপ, প্লবতা[১], প্লাবিতা[১]

Calculus, differential অবকলন গণিত[২]
— , **integral** সমাকলন গণিত[২]
Calibration অংশাংকন[২], ক্রমাংকন[১]
Cantilever ক্যান্টিলিভার, আড়া[১]
Capillary কৈশিক[১]
— , **curve** কৈশিক বক্র

Central force কেন্দ্রগ বল
Centre of oscillation দোলন কেন্দ্র[২]
— , of suspension লম্বন কেন্দ্র
Centrifugal অপকেন্দ্র চ
Centripetal অভিকেন্দ্র[১ ২]
Coefficient (physical) গুণাংক[১ ২]
—(arith) সহগ[১], গুণক[১]
Cohesion সংসক্তি[১]
Column স্তম্ভ[১ ২]
Commutative ক্রমবিনিমেয়[২]
Component উপাংশ[১]
Compressibility সংনম্যতা[১]
Compressive strain চাপের ক্ষতি[১]
— , stress চাপের পীড়ন[১]
Concentration গাঢ়তা
Concept কল্পন, ধারণা[১ ২], প্রত্যয়[১]
Configuration বিন্যাস[২]
Conic কোনিক[২]
Conservation of energy শক্তির নিত্যতা[১], শক্তি সংরক্ষণ[২]
Conservative সংরক্ষী[২]
Constant (adj) স্থির,[২] সুষম
— , (quantity) অচর[২] (রাশি)
— , (fixed number) স্থিরাংক[২]
Constrained motion সবাধগতি[১]
Co-ordinate (s) নির্দেশাংক[২]
— , origin of মূলবিন্দু
— , polar ধ্রুবীয় নির্দেশাংক[২]
— , position স্থানাংক[১]
— , rectangular সমকোণী নির্দেশাংক[২]
— , system of নির্দেশতন্ত্র[২]
Correction শুদ্ধি
Couple বলযুগ্ম,[২] দ্বন্দ্ব[১]
— , moment of দ্বন্দ্বের ভ্রামক[১]
Critical velocity ক্রান্তিক বেগ[২]
Cross section প্রস্থচ্ছেদ[১]
Cryogenic নিম্নতাপী[২]
Curvature বক্রতা
— , anticlastic অসদৃশ বক্রতা
— , synclastic সদৃশ বক্রতা
— , centre of বক্রতা কেন্দ্র
Curve বক্র[১ ২]
— , closed বদ্ধবক্র
Curved surface বক্রপৃষ্ঠ,[২] বক্রতল
Cycle চক্র[১ ২]
Cyclic order চক্রীয় ক্রম[২]
Cylinder বেলন চ
— , right circular লম্ববৃত্তীয়[২] বেলন

Damped oscillation অবমন্দিত[২] দোলন
Damping অবমন্দন[২]
Data উপাত্ত[১ ২]
Deceleration মন্দন[২]
Defect ত্রুটি, দোষ
Definite integral নিশ্চিত সমাকল[২]
Definition সংজ্ঞা, সংজ্ঞার্থ[১]
Deflection বিক্ষেপ[১ ২]
Deformation বিকৃতি[২]
Degree (of temperature) ডিগ্রী[২]
Degree of freedom স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা
Degree of smallness ক্ষুদ্রতার ক্রম
Density ঘনত্ব,[২] ঘনাংক[১]
Depression নমন, অবনমন[১ ২]
Derivation ব্যুৎপত্তি
Desorption বিশোষণ[২]
Deviation বিচলন,[২] বিচ্যুতি, চ্যুতি[১]
Diagonal কর্ণ[১]
Diagram চিত্র[১]
Diameter ব্যাস

Differential (of a function) অবকল[২]
— , coefficient অবকল গুণাংক[২]
— , equation অবকল সমীকরণ[২]
— , operator অবকল সংকারক[২]
— , perfect যথার্থ অবকল[২]
— , total সম্পূর্ণ অবকল[২]
Diffusion ব্যাপন[১]
— , pump ব্যাপন পাম্প
Dimensions (of a physical quantity) মাত্রা, জাতি
Dimensional equation মাত্রীয় সমীকরণ
Direction cosine দিক্ কোসাইন
Directrix নিয়তা[২]
Displacement সরণ[১]
Distribution বণ্টন
Dynamic system গতীয়তন্ত্র
Dynamics গতিবিজ্ঞান[২], গতিবিদ্যা[১]
— , of a particle কণার গতিবিজ্ঞান
— , of a system of particles কণাগোষ্ঠীর গতিবিজ্ঞান

Earth's crust ভূত্বক
Eccentric উৎকেন্দ্র
Edge কিনারা
Effect প্রভাব[২]
Elastic স্থিতিস্থাপক[১]
— , limit স্থিতিস্থাপক সীমা
Elasticity স্থিতিস্থাপকতা[১], প্রত্যাস্থতা[২]
— modulus of স্থিতিস্থাপক গুণাংক[১]
Electrical বৈদ্যুত
Ellipse উপবৃত্ত[১], ইলিপ্‌স্
Ellipsoid ইলিপ্‌সয়ড্[২]
— , of inertia জাড্য ইলিপ্‌সয়ড্
Empirical পরীক্ষালব্ধ[১] প্রায়োগিক[১]
Emulsion অবদ্রব[১]
Energy শক্তি চ
— , equipartition of শক্তির সমবণ্টন
Energy, kinetic গতিশক্তি
— , mechanical যান্ত্রিক শক্তি
— , potential স্থিতিশক্তি
— , principle of conservation of energy শক্তি সংরক্ষণ সূত্র
— , transformation of শক্তির রূপান্তর
Equator নিরক্ষরেখা[১]
Equilibrium সাম্য[১,২]
— , conditions of সাম্যের শর্ত
Equivalent তুল্যমান[১]
Error ত্রুটি
Escape velocity মুক্তির বেগ, পলায়নের বেগ[২]
Evacuate নির্বাত করা[১]
Exhaust নির্বাত করা
Exit নির্গম
Experiment পরীক্ষা[১]
Experimental পরীক্ষালব্ধ
Expression (mathematical) ব্যঞ্জক[২]
External force বাহ্যবল[১,২]
Factor (physical) কারক[১], কারণ[২]
— (math) গুণক[২]
Fibre তন্তু, তাঁত
Fictitious force অলীক বল
Field ক্ষেত্র[২]
Figure চিত্র[১,২]
Filament তন্তু[২] তাঁত, সূত্র[১]
Film (as of soap) ঝিল্লী, সর[১]
Flexure আনমন[২]
Flexural rigidity নমন দৃঢ়তা

Flow প্রবাহ
— - line of প্রবাহরেখা
— , tube of প্রবাহ নলিকা
Fluid প্রবাহী
Flux ফ্লাক্স্
Force বল
— , impulsive ঘাত বল[১]
— , line of বলরেখা
— , tangential স্পার্শিক বল
— , tube of বল নলিকা
Forces, composition of লব্ধি নির্ণয়[১], বল সংযোজন
— , coplanar সমতলীয় বল
— , equilibrium of বলসাম্য
— , like সমমুখী বল
— , parallelogram of বল সামান্তরিক
— , resolution of বল বিভাজন
— , triangle of বল ত্রিভুজ
— , unlike বিপরীতমুখী বল
Formula সূত্র[১ ২], সংকেত[১]
Frame of reference নির্দেশ ফ্রেম[২]
Free মুক্ত
Freedom, degree of স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা
Frequency কম্পাংক, কম্পন সংখ্যা
Friction ঘর্ষণ,[১ ২]
— , limiting সীমান্ত ঘর্ষণ[২]
— , rolling আবর্ত ঘর্ষণ
— , sliding বিসর্প ঘর্ষণ[১]
Function (Math) ফলন,[২] অপেক্ষক[১]

Gauge গেজ
Gettering গেটারিং
General solution সার্বিক সমাধান, ব্যাপক সমাধান
Geoid জিঅয়ড্

Gradient গ্রেডিয়েন্ট[২] ; নতিমাত্রা[১]
Graduated অংশাংকিত [১ ২]
Graph গ্রাফ, লেখ[১] রেখাচিত্র
Gravitation মহাকর্ষ[১]
Gravitational constant মহাকর্ষীয় নিত্যসংখ্যা, মহাকর্ষাংক[১]
Gravitational intensity অভিকর্ষীয় তীব্রতা[১]
Gravimeter অভিকর্ষ-মাপী
Gravity অভিকর্ষ[১]
— , survey অভিকর্ষ জরিপ
— , acceleration due to অভিকর্ষীয় ত্বরণ
— , centre of ভারকেন্দ্র[১]
— , motion under অভিকর্ষাধীন গতি
Grid গ্রিড
Gyration, radius of আবর্তনের কার্যকর ব্যাসার্ধ
Gyroscope গাইরোস্কোপ
Harmonic motion, simple সরল সমঞ্জস[১] গতি, সরল দোলগতি
Head, dynamic গতীয় শির
— , elevation (or gravity) অভিকর্ষীয় শির
— , pressure স্থিতীয় শির
— , static স্থিতীয় শির
— , velocity গতীয় শির
Heat তাপ চ
Helical spring কুণ্ডলিত স্প্রিং
High vacuum উচ্চ নির্বাত[২]
Homogeneous সমসত্ত্ব[১]
— , function সমঘাত ফলন[২]
Horizontal অনুভূমিক[১]
Hydrostatic pressure ঔদ চাপ, স্থিতোদ চাপ,[১] উদস্থৈতিক চাপ

Hyperbola পরাবৃত্ত চ
Hypotenuse অতিভুজ[১]
Hysteresis শৈথিল্য[২]

Identical অভিন্ন
Impact সংঘাত[১]
Impressed force প্রযুক্ত বল
Impulse ঘাত[১]
Impulsive force ঘাতবল[১]
Inclined plane নততল[১], আনততল[১]
Independent স্বতন্ত্র
Inertia জড়ত্ব,[২] জাড্য[১]
  —, moment of জাড্য ভ্রামক
  —, ellipsoid of জাড্য ইলিপ্‌সয়ড্‌
  —, product of জাড্য গুণফল
Inertial frame জড়ত্বীয় ফ্রেম
  — — of reference জড়ত্বীয় নির্দেশ ফ্রেম[২]
Inertial mass জড়ত্বীয় ভর
Infinite অনন্ত[১ ২] অসীম[১]
Infinitesimal অনন্ত ক্ষুদ্র অত্যণু,[২] ক্ষুদ্রাদপি ক্ষুদ্র
Inflexion, point of নতিপরিবর্তন বিন্দু[২]
Inflow অন্তর্বাহ[২]
Initial আদি,[২] আদ্য, প্রারম্ভিক[১ ২]
  — conditions আদি সংস্থিতি
Inlet আগম পথ, প্রবেশ পথ[১]
Insensitive কুগ্রাহী
Instability অস্থিতা, অস্থিতি অস্থায়িত্ব[২]
Instantaneous তাৎক্ষণিক[২]
  — axis তাৎক্ষণিক অক্ষ,[২] চঞ্চল অক্ষ
Integral সমাকল[২]
  —, definite নিশ্চিত সমাকল[২]
  —, double দ্বিসমাকল[২]
  —, indefinite অনিশ্চিত সমাকল[২]
  —, line রেখা সমাকল[২]
  —, surface পৃষ্ঠ সমাকল[২]
  —, triple ত্রিসমাকল[২]
  —, volume আয়তন সমাকল[২]
Integrand সমাকল্য[২]
Integration সমাকলন[১ ২]
Intensity তীব্রতা[১ ২]
Inter আন্তঃ
Interaction অন্যোন্য ক্রিয়া[২], মিথস্ক্রিয়া[১], পারস্পরিক ক্রিয়া[২]
Interchange বিনিময়
Interfacial surface tension আন্তস্তল পৃষ্ঠটান
Interference ব্যতিচার,[১] ব্যতিকরণ[২]
  —fringe ব্যতিকরণ ফ্রিঞ্জ[২]
  —pattern ব্যতিচার চিত্র
Interpolation অন্তর্বেশন[২]
Interval (of time) অবকাশ, অবসর
Intrinsic সহজাত, স্বকীয়[১], নৈজ[২]
Invariable অচর[২], নিশ্চর
Inverse বিপরীত[১], ব্যস্ত[১]
Inversely proportional ব্যস্তানুপাতিক
Ionisation আয়নন[২]
Ionised আয়নিত[১ ২]
Irrotational অঘূর্ণ[২]
Isothermal সমোষ্ণ[১]
Isostasy সমস্থিতি[১ ২]
Isotropic সমদৈশিক[২]

Joule's equivalent জুল তুল্যাংক[১]
Junction সন্ধি[১ ২]

Kinematics শুদ্ধগতি বিজ্ঞান,[2] সৃতিবিদ্যা[1]
Kinetic গতীয়[1]
— energy গতিশক্তি
Kinetic theory of gases, গ্যাসের গতিক তত্ত্ব[1], গ্যাসের অণুগতিবাদ, গ্যাসের গতীয় তত্ত্ব
Kinetics বলগতিবিজ্ঞান, গতিবিদ্যা[1]
Knife edge ক্ষুরধার[2]

Lamellar flow স্তরিত প্রবাহ[2]
Lamina পাত[1]
Latitude অক্ষাংশ[1] [2]
Latus rectum নাভিলম্ব[1] [2]
Law সূত্র, নিয়ম
Least action, principle of ন্যূনতম কর্মের[2] তত্ত্ব
Length, breadth and thickness দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ ; লম্বাই চওড়াই ও খাড়াই
Level, water জলতল,[2] জলপৃষ্ঠ,[1] জলের লেভ্‌ল্‌, জল সমতল[1]
Lift (force) উত্তোলক (বল)
Limit সীমা
Limiting velocity সীমান্ত বেগ[2]
Linear রৈখিক
Linear equation একঘাতী[1] সমীকরণ
Liquefaction তরলন
Liquid তরল
Locus সঞ্চার পথ[1]
Longitude দ্রাঘিমা,[1] দেশান্তর[1] [2]
Longitudinal অনুদৈর্ঘ্য

Macroscopic স্থূল
Magnitude মান[1]
Major axis দীর্ঘাক্ষ,[2] প্রধান অক্ষ,[1] [2] মুখ্য অক্ষ[1] [2]
Manometer প্রেষমান
Mass ভর[1]
— , centre of ভরকেন্দ্র[1]
Material বাস্তব
— medium বাস্তব মাধ্যম
Matrix মেইট্রিক্‌স্‌
Matter পদার্থ,[2] জড়[1]
Maximum চরম,[1] উচ্চতম[2]
Mean square displacement সরণ বর্গমাধ্য[2]
Mean value গড়মান,[1] মাধ্যমান
Measurement মাপন[1] [2]
Mechanical যান্ত্রিক[1] [2]
Mechanics বলবিজ্ঞান, বলবিদ্যা চ
Medium (n) মাধ্যম চ
Membrane ঝিল্লী[1] [2]
Meridian মধ্যরেখা[1]
Method বিধি,[2] উপায়, পদ্ধতি চ
Microscopic সূক্ষ্ম
Microseism সূক্ষ্ম ভূকম্পন
Minimum অবম,[1] নিম্নতম[1]
Minor axis হ্রস্বাক্ষ, গৌণ অক্ষ
Modulus (of elasticity) (স্থিতিস্থাপক) গুণাংক
Mole মোল, গ্রামঅণু
Molecular আণবিক
Moment (of a force) ভ্রামক[1]
—of inertia জাড্য ভ্রামক
Momentum ভরবেগ[1]
Monochromatic একবর্ণী[2]
Motion গতি
Mutual অন্যোন্য, পারস্পরিক

Necking মধ্য কৃশন[2]
Needle কাঁটা

Negative নেগেটিভ, ঋণ
Neutral উদাসীন
Normal (perpendicular) অভিলম্ব[১]
Notation সংকেতন

Object বস্তু[১]
Oblate spheroid লঘু অক্ষ গোলাভ[২]
Oblique তির্যক[১ ২]
Oblong আয়ত[১]
Observation পর্যবেক্ষণ,[১] প্রেক্ষণ[২]
Observed প্রেক্ষিত,[২] লক্ষিত
Observer দর্শক, দ্রষ্টা
Oil pump তেল পাম্প
Open tube manometer মুক্তপ্রান্ত প্রেষমান, খোলামুখ প্রেষমান
Operator (mathematical) (গাণিতীয়) সংকারক[২]
— , **differential** অবকল সংকারক[২]
Orbit কক্ষ
Order (of the order of) ক্রম[১ ২]
— **of smallness** ন্যূনতার ক্রম[১]
Ordinate কোটি[১ ২]
Orientation দিগ্‌বিন্যাস[২], দিক্ স্থিতি[১]
Origin (math) মূলবিন্দু[১ ২]
Oscillation দোলন
Oscillator দোলক
Osmosis আস্রবণ[১]
Outlet নির্গম দ্বার

Parabola অধিবৃত্ত,[১] পরবলয়[২]
Parallelepiped সমান্তর ষট্‌ফলক[২]
— , **rectangular** আয়ত ফলক[২]
Parallelogram সামান্তরিক[১]
Parameter (math) প্রাচল[২]
Partial differential coefficient আংশিক অবকল গুণাংক[২]
Particle কণা
Pattern, flow প্রবাহের আকৃতি,[২] প্রবাহের রূপ
Peak value চরম মান
Pendulum দোলক
— , **bar** দণ্ড দোলক
— , **compound** যৌগিক দোলক, বাস্তব দোলক
— , **conical** শংকু দোলক
— , **cycloidal** চক্রজীয়[২] দোলক
— , **equivalent simple** সমকালীয় সরল দোলক, সমপর্যায়ী সরল দোলক
— , **reversible** বিপর্যেয়[২] দোলক
— , **torsional** ব্যাবর্তন[১] দোলক
Per cent শতকরা
Percentage শতকরা হার
Perfect differential পূর্ণ অবকল[১]
Perigee উপভূ,[২] অনুভূ[১]
Perimeter পরিসীমা[১]
Period পর্যায়কাল[১], দোলনকাল[১]
Periphery সীমারেখা
Permanent set স্থায়ী পরিবর্তন
Perpendicular লম্ব[১ ২]
— **section** লম্বচ্ছেদ
Phase দশা[১]
— **difference** দশান্তর[১], দশাবৈষম্য
— **velocity** দশাবেগ
Physical ভৌত[১], ভৌতিক[২]
Physicist পদার্থবিৎ, পদার্থ বিজ্ঞানী
Physics পদার্থবিদ্যা, পদার্থ বিজ্ঞান
Plane সমতল
— **surface** সমতল পৃষ্ঠ

— wave সমতল তরঙ্গ
Plastic নমনীয়[1]
Plumb line ওলন দড়ি[1]
Point particle বিন্দুকণা
Polar ধ্রুবীয়[2]
—coordinates ধ্রুবীয় নির্দেশাংক,[2] ধ্রুবীয় নির্দেশতন্ত্র[2]
— —, reciprocal ধ্রুবীয় বিপরীত নির্দেশাংক
Position অবস্থান, অবস্থিতি
Positive পজিটিভ
Postulate স্বীকার্য[1]
Potential বিভব[1] [2]
—difference বিভব বৈষম্য
—drop বিভব হ্রাস
—energy স্থিতিশক্তি, স্থৈতিক শক্তি চ
—gradient বিভবনতি
—gravitational মহাকর্ষীয় বিভব
Practical ব্যবহারিক[1] [2] ফলিত[1]
Precaution প্রাগ্‌বিধান[1]
Precession পুরঃসরণ[2]
Precision পরিশুদ্ধতা[2], সূক্ষ্মতা
Pressure প্রেষ[1], চাপ[1]
Primary মুখ্য, প্রধান, প্রাথমিক
Principal মুখ্য
Principle তত্ত্ব[1], সূত্র
Problem প্রশ্ন
Procedure প্রক্রিয়া[1] [2] প্রণালী[1]
Process প্রক্রিয়া[1], পদ্ধতি[1]
Projectile প্রাস[1]
Projection (of a line etc.) অভিক্ষেপ[1]
Prolate spheroid দীর্ঘাক্ষ গোলাভ[2]
Propagation (of waves) অগ্রগতি
Property ধর্ম
Proportional আনুপাতিক
— , directly সমানুপাতিক
— , inversely বিষমানুপাতিক
Pseudo ছদ্ম
Pulsation স্পন্দন
Pump পাম্প

Quantity পরিমাণ, রাশি
Quartz কোয়ার্টজ

Radial অরীয়
Radius of gyration আবর্তনের কার্যকর ব্যাসার্ধ
Range পাল্লা, সীমা
Rank (of a tensor) জাতি
Reading পাঠ[1], পাঠাংক[2]
Reciprocal বিপরীত (রাশি); অন্যোন্য, পারস্পরিক
Record অভিলেখ[2], বিবরণী[1]
Rectangular আয়তাকার, সমকোণী
—parallelepiped সমকোণী ষট্‌ফলক
Reduced mass সমানীত[2] ভর
Relative আপেক্ষিক
Removal নিষ্কাশন, অপনয়ন
Residual অবশিষ্ট
Resistance রোধ[1], প্রতিরোধ[2]
Resonance অনুনাদ[1] [2]
Restoring force প্রত্যানয়ক[2] বল
Resultant লব্ধি[1]
Retardation মন্দন[1] [2]
Revolution আবর্তন
Right cylinder লম্ববৃত্তীয় বেলন[2]
Right hand rule দক্ষিণ-হস্ত সূত্র
Rigid body দৃঢ় বস্তু
Rigidity দৃঢ়তা
Ripple ঊর্মি, ঊর্মিকা[2]
Rod দণ্ড, ছড়

Root mean square বর্গমাধ্য মূল
Rotary pump ঘূর্ণী পাম্প
Rotating vector ঘূর্ণী ভেক্টর

Satellite, artificial নকল উপগ্রহ
Sea bed সমুদ্রতল, সিন্ধুতল[1]
Sea level সমুদ্র পৃষ্ঠ[1], সাগরাংক[1]
Section ছেদ
Semilatus rectum নাভিলম্বার্ধ[2]
Sensitive সুবেদী[1], সুগ্রাহী[2]
Sharpness of resonance অনুনাদের তীক্ষ্ণতা
Shear কৃন্তন[1]
Shell খোলক[1]
Shield ঢাল
Sidereal নাক্ষত্র
Significant digit সার্থক অংক চ [2]
Similar সমরূপ[2], সদৃশ চ
Sink অভিগম[2]
Size আয়তন[1], সাইজ[2], মাপ
Sketch রেখাচিত্র[2]
Solid angle ঘনকোণ
Source উদ্‌গম[2], প্রভব[1], উৎস
Space দেশ[1], স্থান[1] [2]
Space coordinate স্থানাংক[1], স্থানিক নির্দেশাংক[2]
Sphere গোলক
Spherical coordinates গোলীয় নির্দেশতন্ত্র[2], গোলীয় নির্দেশাংক[2]
Spherical shell গোলীয় খোলক[1]
Spheroid গোলাভ[2], উপগোলক[1]
— , oblate হ্রস্বাক্ষ গোলাভ[2]
— , prolate দীর্ঘাক্ষ গোলাভ[2]
Spiral spring সর্পিল স্প্রিং[1] [2]
Stable স্থায়ী [1] [2]

Stand আধার[2]
Standard মানক[2], প্রমাণ[1]
— atmosphere মানক (বা প্রমাণ) বায়ুমণ্ডল
Static pressure স্থৈতিক[1] চাপ
Steady deflection স্থায়ী বিক্ষেপ
Steady state স্থায়ী দশা
Strain তথি[1]
Stream line শান্ত প্রবাহরেখা, ধারারেখা[2]
— — flow শান্ত প্রবাহ, ধারারেখী প্রবাহ[2]
Stream tube ধারারেখী[2] নল
Strength (of a field) তীব্রতা[1] [2]
Stress পীড়ন[1]
— , longitudinal অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন
— , normal লম্ব পীড়ন
— , tangential স্পার্শক পীড়ন
Subscript পাদাংক
Superscript শীর্ষাংক
Surface পৃষ্ঠ[1] [2], তল[1], বহিস্তল[2]
Surface area পৃষ্ঠীয় ক্ষেত্রফল
Surface integral পৃষ্ঠ সমাকল, তল সমাকল,
Surface tension পৃষ্ঠটান[1]
Symbol প্রতীক, সংকেত[1], চিহ্ন[1] [2]
Symmetry প্রতিসাম্য[1], সমমিতি[2]
Symmetrical প্রতিসম[1] সমমিত
System তন্ত্র[1] [2] শ্রেণী
— of bodies বস্তুতন্ত্র, বস্তুশ্রেণী[1]
—of coordinates নির্দেশতন্ত্র[1]
—of forces বলশ্রেণী[1]
— of particles কণাশ্রেণী, কণা গোষ্ঠী, কণা সংহতি

Table সারণী[1] [2]
Tangent স্পর্শক[1]

Tangential স্পার্শনী,[১] স্পার্শক
Temperature উষ্ণতা[১]
Tensile টানজাত, টানজ
Tensiometer পৃষ্ঠটানমাপী
Tension টান[১]
Tensor টেনসর
Term (math) পদ[১ ২]
Terminal velocity অন্তিম বেগ[২] সীমান্ত বেগ
Theoretical তাত্ত্বিক, তত্ত্বীয়[১], বাদীয়[১]
Theory তত্ত্ব[১], বাদ[১ ২]
Thermal তাপীয়[২]
Thermodynamics তাপগতি বিদ্যা
Thermometer থার্মমিটার
Three dimensional ত্রিমাত্রিক
Time সময়, কাল
Time interval সময়ের ব্যবধান, কালান্তর
Torque টর্ক
Torsion মোচড়, ব্যাবর্তন[১]
—balance ব্যাবর্তন[১] তুলা
Torsional oscillation ব্যাবর্তন[১] দোলন
Trace (n) অনুরেখ[২]
Transverse অনুপ্রস্থ[১ ২]
Trap ফাঁদ
Triple ত্রিধা[১], ত্রিতয়, ত্রিক[২], ত্রৈধ[১]
Turbulent flow অশান্ত প্রবাহ, বিক্ষুব্ধ প্রবাহ[২]

Uniform সুষম, সম[১]
Unit (of a physical quantity) মাত্রক[২], একক[১]
—(as in unit mass) একমাত্রা. ঐকিক, একাংক
Unit vector ঐকিক ভেক্টর
Units, derived যৌগিক মাত্রক/একক
— , fundamental মৌলিক মাত্রক/একক
Universal সার্বিক চ, সার্বত্রিক[২]

Vacuum নির্বাত[২]
— , high উচ্চ নির্বাত[২]
— , low নিম্ন নির্বাত[২]
— , pump নির্বাত পাম্প
— , ultrahigh অত্যুচ্চ নির্বাত[১]
Value মান[২]
Variable (Math) চররাশি[২]
Vector ভেক্টর, সদিশ[২] রাশি
Velocity gradient বেগের নতিমাত্রা
Vertical উল্লম্ব,[১] খাড়া[১ ২]
Vibration কম্পন,[১ ২] স্পন্দন চ
Virtual displacement কল্পিত[২] সরণ
Virtual work কল্পিত[২] কার্য
Viscosity সান্দ্রতা চ
Viscometer সান্দ্রতামাপী
Viscous সান্দ্র চ
Volume আয়তন[১ ২]
Wavelength তরঙ্গদৈর্ঘ্য

Waves, capillary পৃষ্ঠটানী তরঙ্গ
Weight ভার[১], ওজন[১]

Yield point পরাভব বিন্দু[২]
Young's modulus ইয়ং গুণাংক